随机过程及其应用

陆大绘 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书系作者在清华大学无线电电子学系多年任教的基础上编写的教材。

全书共分七章。书中着重讨论了随机过程的基本研究方法，论述了应用广泛的几种基本随机过程，并对其在控制和电子技术中的应用作了相应的介绍。各章后面均配有习题。

本书可供理工科大学有关专业的教师、研究生和高年级学生作教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员自学。

随 机 过 程 及 其 应 用

陆大绘　编著

☆

清华大学出版社出版

（北京　清华园）

北京市昌平环球科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32　印张：22 1/16　字数：429千字

1986年8月第1版　1986年8月第1次印刷

印数：00001～8000

统一书号：15235・223　　定价：平装3.65元

精装4.65元

前　　言

近年来，作者为清华大学无线电电子学系以及有关专业的研究生、无线电电子学系的本科高年级学生开设了“随机过程”课程，同时编写了这方面的参考教材。本书就是在此基础上编写而成的。

随机过程已广泛应用于许多领域中，如物理、生物、社会科学(管理、经济)以及工程科学技术中，并且在这些领域中显示出十分重要的作用。本书将着重讨论随机过程的基本研究方法，并介绍应用中常遇到的几种基本随机过程，对某些应用，尤其是在控制和电子技术中的应用作了相应的介绍。

考虑到学生在学习本课程之前已学过概率论的基本内容，但又可能还不够深入和熟练，因此，本书在某些章节中，为了引出过程的概念对概率论的基本内容作一些讨论，如对多元随机变量、n维正态分布的讨论；又如在研究马尔可夫过程中不断地回顾概率论的基本内容，并在附录中加入了一段“特征函数”。

在学习本课程之前，学生一般已经掌握了对确定性函数（信号）的研究分析方法。本书采用平行于分析研究确定性函数（信号）时使用的方法，确立一套相应的对随机过程的研究分析方法，如随机分析、谱分析，又如把大家所熟知的傅氏变换用于研究宽平稳过程等等。

全书共分七章。第一章提出随机过程的两类基本分析方

法。第二章、第三章是采用第一类分析方法研究马尔可夫过程和马尔可夫链，对马尔可夫过程着重研究的是参数连续状态离散的马尔可夫过程，对泊松过程作了较详细的讨论，并引出了排队问题。第四章采用第二类分析方法研究二阶矩过程、平稳过程，并着重讨论了随机分析 第五章研究谱分析和线性系统，先用相关函数方法研究初始状态为零的条件下线性系统的响应，然后进一步讨论非零初始情况下线性系统的响应。第六章讨论正态过程。第七章为估值理论，它是随机过程应用的一个方面，也是为学习下一门课程“信号的统计检测和估值”作准备。

本书篇幅稍大，可根据对象的不同选用其中的一部分，如对本科学生带*的章节可以不学。不同专业的学生也可作不同的选择，也可增添一些内容。

学习本课程前需要有一定的数学基础，包括微积分、微分方程、线性代数、复变函数和概率论的基础知识，最好对信号和系统有一定的了解。

为了配合理论的学习，在各章后面配有一定数量的习题。随机过程的分析方法有其自身的特点，读者需要多做一些习题，才能对理论有较深入的理解。

限于水平，书中难免有许多不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

作 者

1984年2月

目　　录

第一章 概　论

§1 随机过程

在自然界中事物的变化过程可以分为两大类。第一类具有确定形式的变化过程，或者说具有必然的变化规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间t的确定函数来描述。这类过程称为确定性过程。例如电容器通过电阻放电时，电容两端的电位差随时间的变化就是一个确定性函数。而另一类过程没有确定的变化形式，也就是说，每次对它的测量结果没有一个确定的变化规律，用数学语言来说，这类事物的变化过程不能用一个时间t的确定性函数来描述。如果对该事物的变化全过程进行一次观察，可得到一个时间t的函数，但是若对该事物的变化过程重复地独立地进行多次观察，则每次所得到的结果是不相同的。从另一角度来看，如果固定某一观测时刻t，事物在时刻t出现的状态是随机的。这类过程称为随机过程。

自然界有许多属于随机性质的过程，例如：

（1）在电话问题中，我们用$\xi(t)$表示在时刻t前电话局接到的呼唤次数。如果固定t，则$\xi(t)$显然是一个随机变量。但是t是可变参数，是一个连续变量，所以$\xi(t)$又是一个过程。因此，这个问题所涉及的不仅是一个随机变量的问题，它既是随机的，又是一个过程。

（2）在波耳氢原子模型中，电子可以在允许的轨道之

一上运动。我们用"$\xi(t)=i$"表示"在t时刻电子是在第i条轨道上运动"的事件。电子可以从一条轨道跃迁到另一条轨道上（即从第i轨道跃迁到第j轨道），而跃迁到哪一条轨道上是随机的，跃迁的时刻t_1，t_2，…也是随机的。因此经过t时间后，电子所处的轨道$\xi(t)$是随机的。

（3）液面上质点的运动。观察液面上一个作布朗运动的质点A。若用$\{\xi(t),\ \eta(t)\}$表示在时刻t该质点在液面上的坐标位置，显然，当固定t时，$\{\xi(t),\ \eta(t)\}$是一对二维随机变量。但是t是一个连续变量，因此$\{\xi(t),\ \eta(t)\}$又是一个过程。

以上三个例子都说明需要在事物的变化过程中研究它的状态。

我们用"随机过程"一词来表示依赖于一个变动参量的一族随机变量。

虽然随机过程不能用一个确定性的函数来描述，但是随机过程也是有规律的。我们的任务就是研究如何描述一个随机过程，即研究随机过程的性质和规律。

先从三个例子开始，说明如何描述一个随机过程。

（1）伯努利过程

以掷硬币为例。设想每隔单位时间掷一次硬币，观察它出现的结果。如果出现正面，记其结果为1；如出现反面，记其结果为0。一直抛掷下去，便可得到一无穷序列$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$，则

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}=\{x_n;\ n=1,\ 2,\ \cdots;\ \ x_n=1\text{或}0\}$$

因为每次抛掷的结果x_n是一个随机变量（1或0），所以无穷次抛掷的结果是一随机变量的无穷序列。称随机变量的序列为随机序列，也可称为随机过程。每次抛掷的结果与先后

各次抛掷的结果是相互统计独立的，并且x_n出现0或1的概率与抛掷的时间n无关。设

$P\{x_n=1\}$=第n次抛掷出现正面的概率$=p$

$P\{x_n=0\}$=第n次抛掷出现反面的概率$=q=1-p$

其中$P\{x_n=1\}=p$与n无关，且x_i、x_k（$i\neq k$时）是相互统计独立的随机变量。称具有这种特性的随机过程为伯努利型随机过程。

有许多实际问题是可以用伯努利概率模型来描述的。如在数字通信中所传送的信号是脉冲信号，在某一时刻t可能出现脉冲、也可能不出现脉冲，出现脉冲称为1，不出现脉冲称为0，则在t时刻信号的值x_t是一个随机变量，即x_t有二个状态，0或1。如果在t_1，t_2，t_3，…时观察信号，则所得结果是$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}=\{x_n; n=1, 2, 3, \cdots; x_n=1$或$0\}$。如果在$t_k$时刻出现1或0的概率和观察的时刻$t_k$无关，在$t_i$出现$x_i$与其他任何时刻$t_k$出现$x_k$是相互统计独立的，并设$P\{x_k=1\}=p$，$P\{x_k=0\}=q=1-p$，则p与k无关，且$x_i$、$x_k$（$i\neq k$时）是相互统计独立的随机变量，这样形成的随机序列属于伯努利概型。

在伯努利概型的随机过程中，如果固定观测时刻t_1，则它的试验结果是属于二个样本点（0，1）所组成的样本空间S_{x1}；如果在二个不同时刻t_1、t_2观测试验结果，则x_1、x_2可能出现的值为（0，0），（0，1），(1，0)，(1，1)，其样本空间为$S_{x_1}\times S_{x_2}$，样本点为$2^2=4$个。$\{x_1, x_2\}$是一个二维随机变量，或二维随机矢量。

同理，如果在t_1，t_2，…，t_n观察其所取的值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，便可得到一个n维随机矢量，其样本空间为$S_{x_1}\times S_{x_2}\times\cdots\times S_{x_n}$，在该样本空间中包括从(0，0，…，

0）到（1， 1，…， 1)的 2^n 个样本点。

于是，如果在 t_1，t_2，…观察其所取的值 $x_1, x_2, \cdots$，则可得到一个无穷维的随机矢量，其样本空间为

$$S_{x_1} \times S_{x_2} \times \cdots \times S_{x_n} \times \cdots$$

（2）正弦波过程

在振荡源的大批生产中抽出其中一台振荡器，它的输出波形为

$$x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$$

其中 v 为振幅，ω为振荡角频率，$\omega = 2\pi f$，f为振荡频率，φ为振荡的起始相角。由于生产中的不一致性，各振荡器的振幅和频率与额定的指标均有一定的允许偏差，各台的偏差是不一致的，也就是说，v、ω 是随机变量，每一台的 v、ω 是样本空间(V、Ω)中的一个样本点，而且每次把振荡器接上电源，振荡的起始相角 φ 也是随机的，φ 也有一个样本空间 Φ。因此每次对一台振荡器作试验，其输出电压的v、ω、φ 是样本空间(V、Ω、Φ)中的一个点。当然，输出电压还是一个时间函数。不同的振荡器在各次试验中其输出电压的时间函数虽然均是正弦波，但因 v、ω、φ 为随机变量，不同台不同次的输出可能均不相同。如果固定一个观测时刻，观察各台振荡器在这一时刻的电压，由于 v、ω、φ 是随机变量，且

$$x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$$

故 x(t) 也是随机变量。在 t 时 x(t)的分布决定于 t 以及 v、ω、φ 的分布。

称 $x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$为正弦波随机过程，在这个过程中，t 是一个参量，它可以取[0，∞)内的任意值。

（3）如对晶体管的噪声电平进行测量，每隔单位时间（假定为 1 微秒）取一个样本，则可在时刻 t = 1,2,3, …,

n，…测得一族无穷可列维随机矢量 $\{\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n\cdots\}$ 一次测量的结果为样本空间的一个点，每次测试的结果可能各不相同。我们把每次测试的结果称为一个现实，或称为一个样本函数。另一方面，如果固定一个观测时刻，对噪声进行无穷次测量，则可得到该时刻噪声的分布。如果固定二个时刻，则测得该二个时刻噪声（二维随机变量）的二维分布。如果固定n个时刻，则可测得n个时刻噪声（n维随机矢量）的n维分布。

从上述三个例子中看到有二种描述随机过程的方法：

（1）固定时刻t，随机过程$\xi(t)$在该时刻所取的值是一随机变量。对应每一个随机变量，有一概率空间$(\Omega、\mathscr{F}、P)$，即$\xi_t(\omega)=\xi(\omega,\ t)$是样本空间$\omega\in\Omega$内的一个随机变量，可用分布函数$F_t(x)=F(x;\ t)=P\{\xi_t(\omega)<x\}=P\{\xi(\omega,\ t)<x\}$来描述$\xi(\omega,\ t)$。这是一维分布。这种描述只能说明在某一时刻$\xi(\omega,\ t)$的分布，而不能描述不同时刻$\xi(\omega,\ t)$的相互关系。为了描述随机过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$在不同时刻的相互关系，就要求用n维联合分布函数来描述n个不同时刻$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$相对应的n个随机变量$\xi(t_1),\ \xi(t_2),\ \cdots,\ \xi(t_n)$。

$$
\begin{aligned}
&F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\
&=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)\\
&=P\{\xi(t_1)<x_1,\ \xi(t_2)<x_2,\ \cdots,\ \xi(t_n)<x_n\}
\end{aligned}
$$

其中n是任意选定的，$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$是T中的n个元素。

由于上式中n及$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$都是任意选定的，因此要求给出的是一族有限维分布函数。可以看出，这一族有限维分布函数不仅刻划出了对应于每一个时刻t的随机变量

$\xi(t)$ 的统计规律性，而且也刻划出了不同时刻 t_1、t_k 的 $\xi(t_1)$、$\xi(t_k)$间的关系。因此，随机过程$\xi(t)$的统计规律性可由它的有限维分布函数族完整地描述出来。称这一有限维分布函数族为随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$的有限维分布函数族。

这里需要说明如下两点：

① 为了简便起见，往往把$\xi(\omega, t)$简写为$\xi(t)$。

② 有时把随机过程$\xi(t)$在$t=t_k$所取的值$x(t_k)$称为随机过程$\xi(t)$在$t=t_k$时的状态。

（2）对于特定的$\omega_k\in\Omega$，即对于一个特定的试验结果，$\xi^{(k)}(t)$是一个确定的样本函数，它可以理解为随机过程的一次实现。有时为了避免混淆，第k个实现可用$x_k(t)$表示之。由于$x_k(t)$是一次实现，它可以通过测量而得到。例如在正弦波过程的一次试验中，v、ω、φ均为一个确定的值，因此一次试验得到的现实为一正弦函数。

这两种描述方法是互为补充的。由于随机过程可以用一族有限维分布函数描述，因此可以利用研究随机矢量的方法研究随机过程。

概括上面述二种描述方法，可以对随机过程作一个概括的说明。

定义：设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，T是直线上的参数集（可列或不可列的），若对每一个$t\in T$，$\xi(\omega,t)=\xi_t(\omega)$是随机变量，则称$\{\xi(\omega, t), t\in T\}$为该概率空间上的随机过程。

随机过程是一个统称，有时这一名词专指T是连续的场合。若$\{t\in T\}$取离散值时称为随机序列（或时间序列）。把一次试验结果$x_k(t)$，$t\in T$，称为随机过程的一个实现或一个样本。

参数集 T 在许多实际问题中往往指的是时间参数，如上述的三个例子。但是也可以采用其他物理量如长度作为参数集。例如，考虑长度为 l 的棉条的横截面，若用 $A(x)$ 表示在 x 处的棉条横截面积，则对于固定的 x，$A(x)$ 是一随机变量。在 n 个不同距离 x_1，x_2，…，x_n 处对应的横截面积 $A(x_1)$，$A(x_2)$，…，$A(x_n)$ 组成一 n 维随机矢量，即 $A(x)$ 是一个随机过程。

§2 随机过程的分类和举例

根据参数集 T 的性质，随机过程可分为两大类：

（1）参数集 T 是一个可列集，如

$$T_1 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

$$T_2 = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

§1 中的伯努利过程就是属于这一类的随机过程。称这类过程为离散参数随机过程或随机序列。

（2）参数集 T 是一个不可列集，如

$$T_3 = \{t / t \geqslant 0\}, \quad T_4 = \{t / -\infty < t < \infty\}$$

这类过程称为连续参数随机过程。

另一方面也可以据 $\xi(t_k)$ 所取值（即状态）的特征，把随机过程分为两大类。（1）离散状态，即 $\xi(t_k)$ 所取的值是离散的；（2）连续状态，即 $\xi(t_k)$ 所取的值在一个范围内是连续的。

所以随机过程可分为四大类：

（1）离散参数离散型随机过程

这类过程的特点是参数集为离散的，同时固定 t_k、$\xi(t_k)$ 所取的值（状态）也是离散的。伯努利过程属于这一类。

例一、一维随机游动的研究。设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点 0，在 $t=1, 2, 3, \cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向移动一个单位距离的概率为 p，作反向移动一个单位距离的概率为 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问处于 k 的概率如何？

解 设质点每次移动的距离为 ξ_i，ξ_i 可取 $+1$，也可取 -1，即 $P\{\xi_i=+1\}=p$

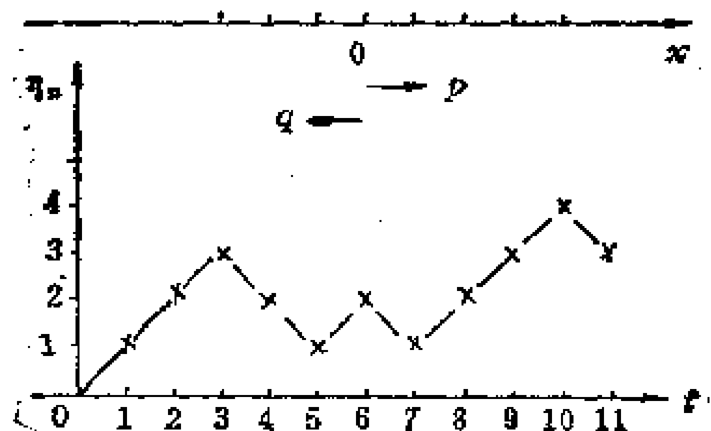


图 1-1

$$P\{\xi_i=-1\}=q=1-p$$

设质点在 $t=n$ 时，偏离原点的距离为 η_n，η_n 也是一随机变量，于是

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad \text{而 } \eta_0=0$$

又设质点每次游动 ξ_i 与该质点所处的位置无关，当 $i\neq k$ 时 ξ_i 和 ξ_k 是相互统计独立的随机变量。图 1-1画出了 η_n 的样本函数。

当 $n=1$ 时，质点可取的位置为 $\eta_1=1$ 或 $\eta_1=-1$，而

$$P\{\eta_1=1\}=P\{\xi_1=1\}=p$$
$$P\{\eta_1=-1\}=P\{\xi_1=-1\}=q=1-p$$

当 $n=2$ 时，质点可能取的位置为 2，0，-2，而

$$P\{\eta_2=2\}=P\{\xi_1=1,\ \xi_2=1\}$$
$$=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=1\}=p^2$$
$$P\{\eta_2=0\}=P\{\xi_1=1,\ \xi_2=-1\}$$
$$+P\{\xi_1=-1,\ \xi_2=1\}$$
$$=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=-1\}$$
$$+P\{\xi_1=-1\}P\{\xi_2=1\}=2pq$$
$$P\{\eta_2=-2\}=P\{\xi_1=-1,\ \xi_2=-1\}$$
$$=P\{\xi_1=-1\}P\{\xi_2=-1\}=q^2$$

依次类推，当 $t=n$ 时，质点可能取的位置为 n，$n-2$，$n-4$，…，$-(n-4)$，$-(n-2)$，$-n$。

如果在 n 次游动中有 m 次质点正向移动，即有 m 次 $\xi_i=+1$，则有 $n-m$ 次质点作反向移动，即有 $n-m$ 次 $\xi_i=-1$。此时

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m(+1)+(n-m)(-1)$$

$$=2m-n=k \quad 或 \quad m=\frac{n+k}{2}$$

故 $$P\{\eta_n=k\}=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}$$

$$=\binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

$$=\frac{n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

上式中 m 是一正整数，则如 n 为奇数，k 也是奇数，$k<n$。如 n 为偶数，k 也是偶数，$k<n$

（2）连续参数离散型随机过程

这类过程的特点是参数集T是连续的，而在某一时刻 t_k，$\xi(t_k)$所能取的值（即状态）是离散型的。

例二 设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度$\xi(t)$是一个随机变量，它可取四个值（+2，+1，-1，-2），且取这四个值的概率是相等的，即

$$P\{\xi(t)=+2\}=P\{\xi(t)=+1\}=P\{\xi(t)=-1\}$$

$$=P\{\xi(t)=-2\}=\frac{1}{4}$$

不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点($t=0$)的时间差 u 为均匀分布在$(0, T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻 t_1，t_2 该随机过程$\xi(t)$所取值$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$的二维联合概率密度。

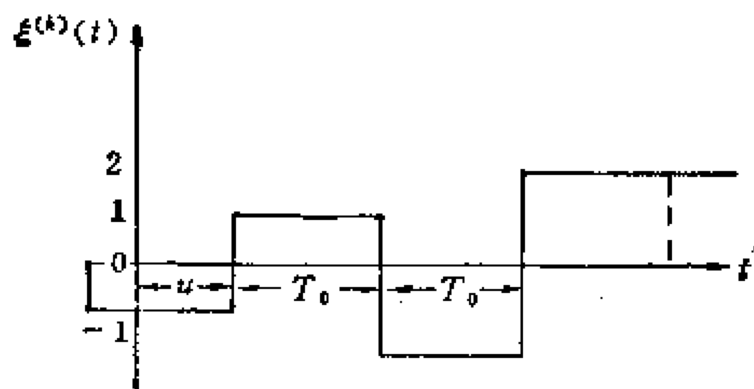


图 1-2

解 图 1-2 给出了该脉冲数字信号的典型样本函数图。

在时间轴上固定两个时刻 t_1、t_2。首先要研究的问题是 t_1、t_2 是否处在同一脉冲内。设事件 c 表示 t_1、t_2 间有不同周期的脉冲沿存在，即事件 c 表示 t_1、t_2 处在不同的脉冲周期内。它的逆事件 c^c 表示在 t_1、t_2 间没有不同周期的脉冲沿，即 t_1、t_2 处在同一脉冲周期内。

当 $|t_1-t_2|>T_0$ 时，事件 c 为必然事件，因此

当 $$|t_1-t_2|>T_0\text{ 时，}P(c)=1 \qquad (1)$$

反之，当 $|t_1-t_2|>T_0$ 时，事件 c^c 为不可能事件，即当

$$|t_1-t_2|>T_0\text{ 时，}P(c^c)=1-P(c)=0 \qquad (2)$$

当 $|t_1-t_2|\leqslant T_0$ 时，t_1，t_2 有可能处在同一脉冲内，也有可能处于两个不同脉冲内。设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻。由于脉冲的起始时间相对于原点($t=0$)的时间差 u 均匀分布于$(0,\ T_0)$内，而且该信号为等脉宽的脉冲信号，脉宽均为 T_0，则 θ 也是均匀分布的随机变量，θ 可视为均匀分布

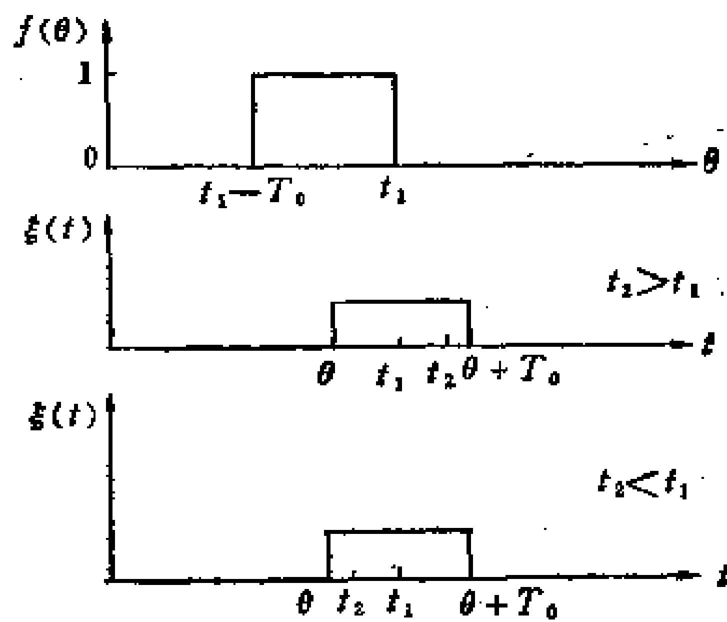


图 1-3

于(t_1-T_0, t_1)内的随机变量。图 1-3 画出了 θ 的概率密度和 t_1、t_2、θ 的关系图。如 $t_1<t_2$，则

$$P(c^c)=P\{t_2<\theta+T_0\}=P\{\theta>t_2-T_0\}$$

$$=1-P\{\theta<t_2-T_0\}=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-T_0}d\theta$$

$$=1-\frac{t_2-t_1}{T_0}$$

如 $t_2<t_1$，则

$$P(c^c)=P\{t_2>\theta\}=\frac{1}{10}\int_{t_1-T_0}^{t_2}d\theta$$

$$=1-\frac{t_1-t_2}{T_0}$$

因此

$$P(c^c)=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0} \qquad (3)$$

$$P(c)=\frac{|t_1-t_2|}{T_0} \qquad (4)$$

根据全概率分式知

$$f_{\xi_{t1}\xi_{t2}}(x_1, x_2)=f_{\xi_{t1}\xi_{t2}/c}(x_1, x_2/c)\cdot P(c)+f_{\xi_{t1}\xi_{t2}/c^c}(x_1, x_2/c^c)P(c^c) \qquad (5)$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的随机变量，于是

$$f_{\xi_{t1}\xi_{t2}/c}(x_1, x_2/c)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right] \qquad (6)$$

如果 t_1、t_2 处在同一周期内，则 $\xi(t_1)=\xi(t_2)$，这时

$$f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}/C^c}(x_1, x_2/c^c) = \sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i) \quad (7)$$

把(1)、(2)、(3)、(4)及(6)、(7)代入(5)式得$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$的二维联合概率密度，即，当$|t_1 - t_2| \leqslant T_0$时

$$f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\right]$$

$$\times \left[\sum_{k=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\right]\frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$

$$+ \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i)\right]\left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right)$$

当$|t_1 - t_2| \geqslant T_0$时

$$f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\right]$$

$$\times \left[\sum_{k=-2,-1,1,2} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\right]$$

（3）连续参数连续型随机过程

这类过程的特点是参数集T是连续的，且在t时刻过程$\xi(t)$所取值是连续型随机变量§1中讨论的正弦波过程和晶体管噪声均属于这类随机过程。

例三 有正弦波随机过程$\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$

$$\xi(t) = V\cos\omega t$$

其中ω为常数，V为在(0,1)内均匀分布的随机变量，即

$$f_V(v) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant v \leqslant 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

（1）画出$\xi(t)$的样本函数；

（2）求 $t=0$，$\frac{\pi}{4\omega}$，$\frac{3\pi}{4\omega}$，$\frac{\pi}{\omega}$ 时随机变量 $\xi(t_k)$ 的概率密度；

（3）求 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时 ξ_t 的概率密度。

解　（1）如果 $V=\frac{2}{3}$，则 $x(t)=\frac{2}{3}\cos\omega t$ 是一个确定性函数（见图 1-4a）；如果 $V=0$，则 $x(t)=0$（见图 1-4b）；如果 $V=1$，则 $x(t)=\cos\omega t$ 是一个确定性函数（见图1-4c）。

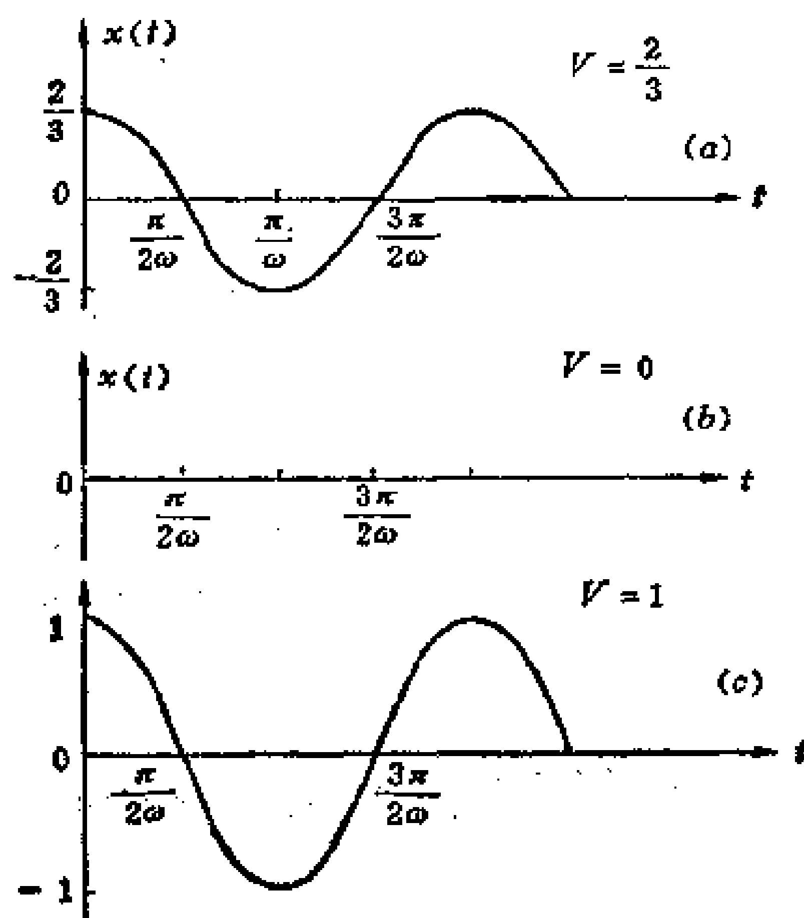


图　1-4

（2）当 $t=0$ 时，$\xi(0)=V$，故 $\xi(0)$ 的概率密度就是 V 的概率密度函数（见图 1-5），即

$$
f_{\xi_0}(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值})\end{cases}
$$

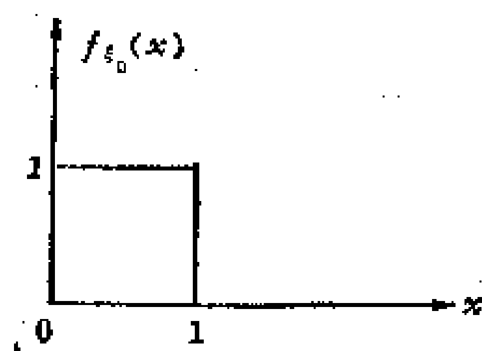


图 1-5

当 $t_1=\dfrac{\pi}{4\omega}$时，$\xi_{t_1}=x_1=V\cos\omega\dfrac{\pi}{4\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}V$，故

$$
f_{\xi_{t_1}}(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ 0 & (\text{其它} x \text{值})\end{cases}\quad(\text{见图 1-6})
$$

当 $t_3=\dfrac{3\pi}{4\omega}$时，$\xi_{t_3}=x_3=V\cos\omega\dfrac{3\pi}{4\omega}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}V$，故

$$
f_{\xi_{t_3}}(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0\right)\\ 0 & (\text{其它 } x \text{ 值})\end{cases}\quad(\text{见图 1-7})
$$

当 $t_4=\dfrac{\pi}{\omega}$时，$\xi_{t_4}=x_4=V\cos\omega\dfrac{\pi}{\omega}=-V$，故

$$
f_{\xi_{t_4}}=\begin{cases}1 & (-1\leqslant x\leqslant 0)\\ 0 & (\text{其它 } x \text{ 值})\end{cases}\quad(\text{见图 1-8})
$$

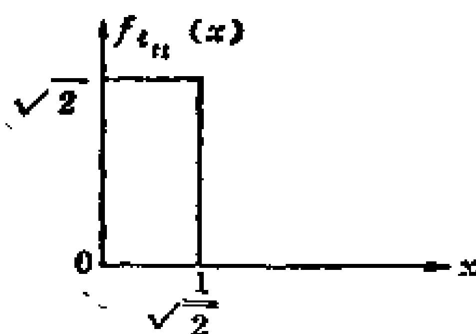


图 1-6

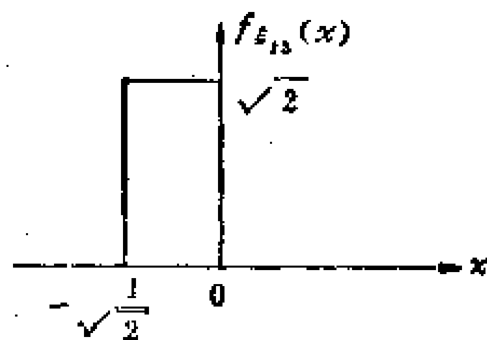


图 1-7

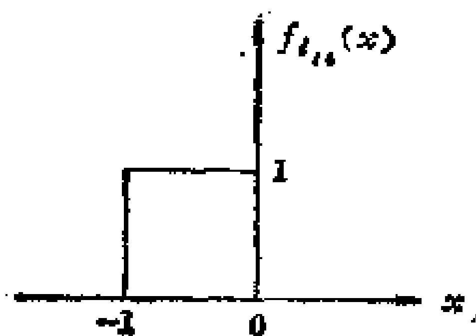


图 1-8

（3）当 $t_2=\dfrac{\pi}{2\omega}$时，$\xi_{t_2}=x_2=V\cos\omega\dfrac{\pi}{2\omega}=0$，不论 V 取何值，均有 $\xi_{t_2}=0$，因此 $P\{\xi_{t_2}=0\}=1$，或 ξ_{t_2} 的分布函数 $F_{\xi t_2}(x)=u(t)$，即 $F_{\xi t_2}(x)$ 是在 $x=0$ 的单位阶跃函数 $f_{\xi t_2}(x)=\delta(x)$。

例四 如果正弦波随机过程 $\xi(t)$ 取如下形式

$$\xi(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中振幅 A 取常数，角频率 ω 取常数，而相位 θ 是一个随机变量，它均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 间，即

$$f(\phi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)\\ 0 & (\varphi\text{ 取其它值时})\end{cases}$$

求在 t 时刻 $\xi(t)$ 的概率密度 $f_{\xi_t}(x)$。

解 当 t 为固定的某一时刻，$\xi(t)$ 和 ϕ 的关系式为

$$\xi(t)=\xi_t=A\cos(\omega t+\phi)\quad(-\pi\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

或

$$\phi=\cos^{-1}\frac{\xi_t}{A}-\omega t\quad(-A\leqslant\xi_t\leqslant A)$$

图 1-9 画出了 ξ_t 和 ϕ 的关系曲线，所以

$$\frac{d\phi}{d\xi_t}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi_t}{A}\right)^2}}\frac{1}{A}$$

$$=-(A^2-\xi_t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

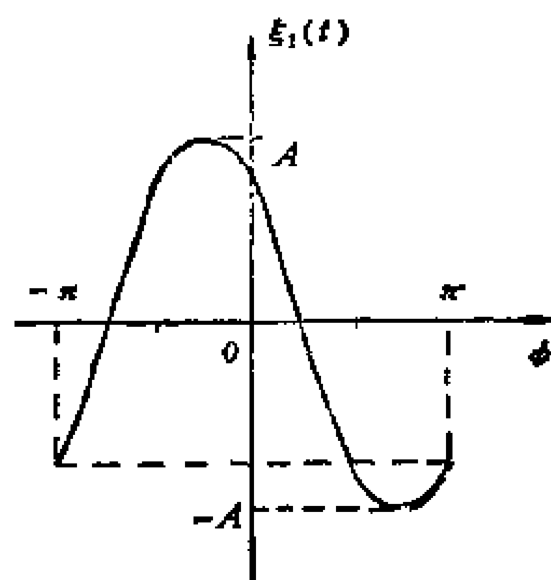


图 1-9

根据随机变量的变换关系式可得

$$f_{\xi_t}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(A^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} & (-A\leqslant x\leqslant A)\\ 0 & (\text{其它 } x \text{ 值})\end{cases}$$

该结果表明，不论 t 取何值 ξ_t 的概率密度是相同的。具有这一特性的随机过程称为一级平稳随机过程。

（4）离散参数连续型随机过程

这类过程具有离散参数集，对于固定的 t_k，过程所取值 $\xi(t_k)$ 是一连续分布的随机变量，即状态是连续的。它又称为连续随机序列。

如果每隔单位时间对晶体管噪声进行抽样，所得到的

是在$t=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$时的随机序列，而这个序列的状态是连续的。它属于离散参数连续型随机过程。

不论随机过程属于那一类，我们均需要找出它的统计特性，才能讨论它的性质。所谓研究统计特性，其中的一种方法就是求该过程的有限维分布函数族。下面再举一例来说明如何求随机过程的概率密度。

例五 设有某通信系统，它的信号为脉冲信号，脉宽为T_0，脉冲信号的周期也假定为T_0。如果脉冲幅度是随机的，幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，不同周期内的幅度ξ_i、$\xi_k(i\neq k)$是相互统计独立的，脉冲沿的位置也是随机的，脉冲起始时间与$t=0$的时间差u是均匀分布在$(0, T_0)$内的随机变量。u和脉冲幅度间也是相互统计独立的（这种信号是脉冲幅度调制信号）。求在两个时刻t_1、t_2该随机过程$\xi(t)$所取值$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$的二维联合概率密度。

解 图 1-10 给出了该脉冲信号的典型样本函数图。同例二，在时间轴上固定两个时刻t_1、t_2。

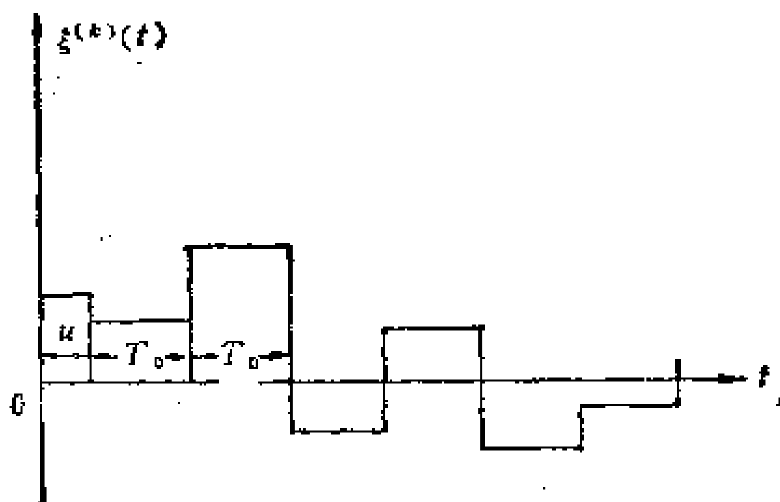


图 1-10

（a）当 $|t_1-t_2|>T_0$ 时，t_1、t_2 位于两个不同的周期内，ξ_{t1}、ξ_{t2} 是相互统计独立的，故

$$f_{\xi_{t1}\xi_{t2}}(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

（b）当 $|t_1-t_2|<T_0$ 时，t_1、t_2 位于两个不同脉冲周期内的概率为

$$P(c)=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

t_1、t_2 位于相同脉冲周期内的概率为

$$P(c^c)=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式可知

$$f_{\xi_{t1}\xi_{t2}}(x_1,\ x_2)=f_{\xi_{t1}\xi_{t2}/c}(x_1,\ x_2/c)P(c)$$

$$+f_{\xi_{t1}\xi_{t2}/c^c}(x_1,\ x_2/c^c)P(c^c)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\}\delta(x_1-x_2)$$

$$\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right]$$

因为当 t_1、t_2 处在同一脉冲周期时，$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$ 取相同值，故上式的第二项出现 $\delta(x_1-x_2)$ 函数。该式表明 $\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$ 的二维联合概率密度不是二维正态分布，虽然 $\xi(t_1)$ 是正态分布，$\xi(t_2)$ 也是正态分布。

上面所讨论的分类方法是从参数集特征和状态的特征来区分不同的随机过程。但是还有其他的分类方法。可以从随机过程的不同性质进行分类，即有所谓马尔可夫过程，二阶

矩过程，独立增量过程等等。关于这些将在以后各章中讨论。

§3 随机过程的数字特征

用随机过程的分布函数族可以完善地描述随机过程的统计特性。但是在实际应用中要确定随机过程的概率密度或分布函数族并加以分析往往比较困难，有时甚至不可能。因而像在研究随机变量的特性时引入随机变量的数字特征那样，在研究随机过程时也引入随机过程的基本数字特征。利用这些基本数字特征既能描述随机过程的重要特征，又便于进行运算和实际测量。

设$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$是一随机过程，对于某一时刻$t_1$，$\xi(t_1)$为一个一维随机变量，它的分布函数为$F_{\xi_{t_1}}(x)$，概率密度为$f_{\xi_{t_1}}(x)$，于是可得它的均值或数学期望为

$$\begin{aligned}\mu_\xi(t_1)&=E\{\xi(t_1)\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\xi_{t_1}}(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x,\ t_1)dx\end{aligned}$$

$f_{\xi_{t_1}}(x)$一般说是与t_1有关的函数，为了明显起见，把$f_{\xi_{t_1}}(x)$写成$f_\xi(x,\ t_1)$，说明它是t_1的函数，因此它的数学期望值一般为t_1的函数。

注意，$E\{\xi(t)\}$是随机过程$\xi(t)$的所有样本函数在参数t时函数值的平均，通常称这种平均为集平均，以区别于今后提出的时间平均的概念。

均值$\mu_\xi(t)$表示了随机过程$\xi(t)$在各个时刻的摆动中心。见图1-11。

找出随机变量$\xi(t_1)=\xi_{t_1}$的二阶中心矩，并把它记为

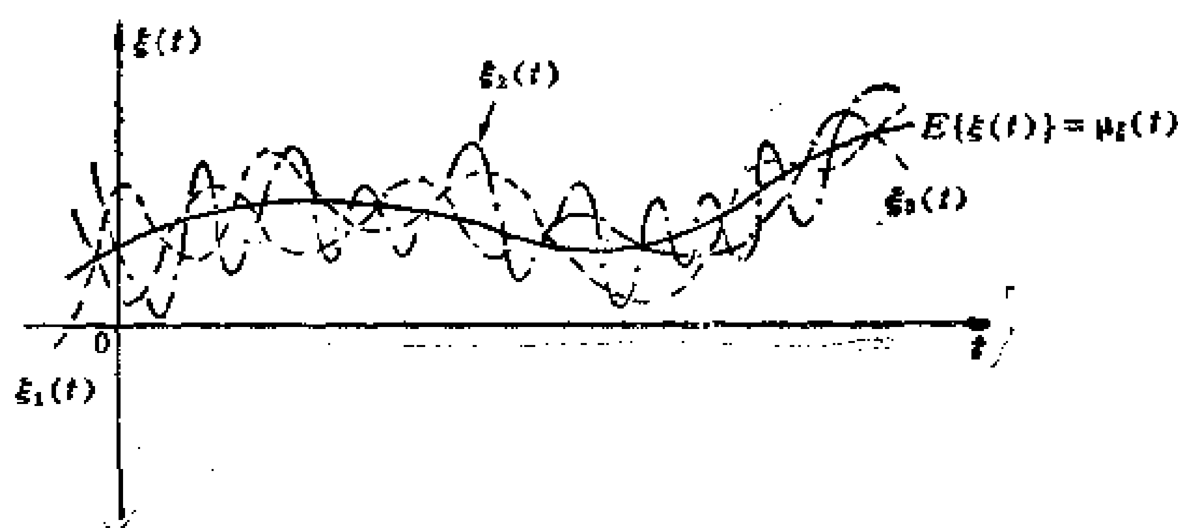


图 1-11

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi^2(t_1) &= D\{\xi(t_1)\} = E\{[\xi(t_1) - \mu_\xi(t_1)]^2\} \\
&= E\{[\xi(t_1)]^2\} - [E\{\xi(t_1)\}]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_\xi(t_1)]^2 f_{\xi t_1}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_\xi(t_1)]^2 f_{\xi t_1}(x, t_1) dx
\end{aligned}
$$

$\sigma_\xi^2(t_1)$称为随机过程的方差。一般说它是 t_1 的函数。方差的平方根 $\sigma_\xi(t_1)$称为随机过程 $\xi(t_1)$的均方根差或标准差，它表示随机过程 $\xi(t_1)$在时刻 t_1 对于均值 $\mu(t_1)$的偏离程度。

均值和方差是反映固定 t 时的统计特性，是重要的数字特征。

为了描绘在两个不同参数 t_1、t_2 时该随机过程状态之间的联系，要利用二元概率密度。设 $\xi(t_1)$和 $\xi(t_2)$是随机过程 $\xi(t)$在参数为 t_1、t_2 时的状态，$f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$是相应的二维概率密度，于是可得它们的二阶混合原点矩

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_1dx_2$$

在随机过程中称二阶混合原点矩为自相关函数或简称为相关函数。一般说它是参数 t_1、t_2的函数，用 $R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)$ 表示之。在不致引起混淆的情况下简记为 $R_\xi(t_1,\ t_2)$。

类似地还可以写出 $\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$ 的二阶混合中心矩，并称为随机过程 $\xi(t)$的自协方差函数，简称为协方差函数，用 $C_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)$表示，或记为 $C_\xi(t_1,\ t_2)$。

$$C_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=E\{[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)][\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-\mu_\xi(t_1)][x_2-\mu_\xi(t_2)]$$

$$\times f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$$=R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)-\mu_\xi(t_1)\mu_\xi(t_2)$$

$$=\mathrm{Cov}(\xi(t_1),\ \xi(t_2))$$

当 $t_1=t_2$ 时，

$$\sigma_\xi^2(t_1)=C_{\xi\xi}(t_1,\ t_1)=R_{\xi\xi}(t_1,\ t_1)-[\mu_\xi(t_1)]^2$$

由此可知，方差可从协方差函数中导出。因此，上述诸数字特征中最主要的是数学期望值（或均值）和自相关函数（或自协方差函数）。从理论上说，仅仅研究随机过程的均值和自相关函数是不能代替对整个随机过程的研究的，但是它们确实描述了随机过程的主要统计特性，比有穷维分布函数族易于观测和参与运算，因而对于解决应用课题而言，它们往往能起到重要作用。因此，在随机过程理论中形成了以研究均值和相关函数为主要内容的一个分支，即相关理论。

研究随机过程有两条常见的途径。一条途径侧重于研究概率结构，比方说研究某时刻过程所取状态与以前另一些时

刻的状态的联合分布函数或联合概率密度，又如研究某时刻状态的概率分布与前一些时刻状态的概率分布之间的关系。另一条途径则侧重于统计平均性质的研究，如研究随机过程的相关函数等。今后可以看到，前者用于对马尔科夫过程的研究，后者用于二阶距过程、平稳过程等的研究。

例一 设有正弦波过程

$$\xi(t)=A\cos(\omega t+\theta)$$

其中振幅A取常数，角频率ω取常数，相位θ是一个均匀分布于$(-\pi,\ \pi)$间的随机变量，求$\xi(t)$的均值和相关函数。

解 （1）$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi(t)$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}A\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{A}{2\pi}\sin(\theta+\omega t)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{A}{2\pi}[\sin(\pi+\omega t)-\sin(-\pi+\omega t)]$$

$$=0$$

即它的均值为常数（与参数t无关）。

（2）$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(\omega t_1+\omega t_2+2\theta)$$

$$+\cos(\omega t_1-\omega t_2)]d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_2)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$$

式中$\tau=t_1-t_2$，它代表t_1和t_2的时间差。可以看出，该相

关函数仅与时间差有关。

满足均值与 t 无关和相关函数仅仅是 $\tau=t_1-t_2$ 的函数的随机过程称为宽平稳随机过程。

例二 设有随机电报信号，它的定义如下：

（1）在任何时刻 t，$\xi(t)$ 取值为 0 或 1，只有两种可能状态。设取值为 0 的概率为 $\frac{1}{2}$，取值为 1 的概率为 $\frac{1}{2}$，即

$$P\{\xi(t)=0\}=\frac{1}{2}\quad P\{\xi(t)=1\}=\frac{1}{2}$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，若在T时间内波形变化的次数 μ 服从泊松分布，即

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,\ T>0)$$

其中 λ 代表单位时间内波形的平均变化次数。

（3）$\xi(t)$ 取何值（即所处的状态）与随机变量 μ 是相互统计独立的。

求随机电报信号 $\xi(t)$ 的均值和自相关函数。

解 图 1-12 给出了随机电报信号 $\xi(t)$ 的样本函数图。

（1）均值

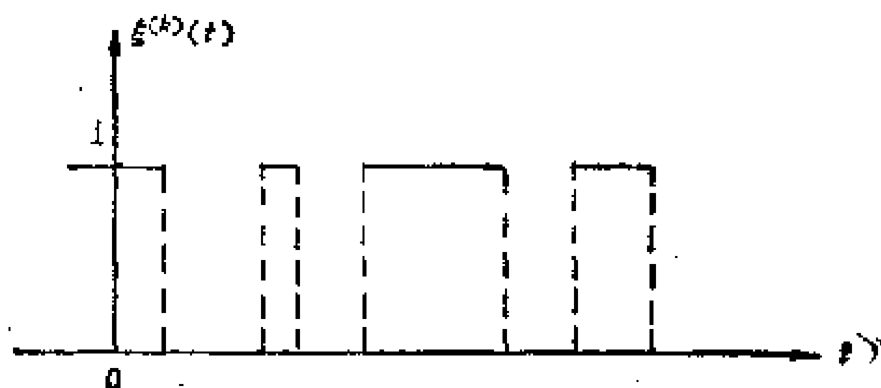


图 1-12

$$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi(t)=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

即对于所有的 t，均值为常数。

（2）相关函数　如果 $t_2>t_1$

$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}&=1\times1P\{\xi(t_1)=1,\\ &\quad\xi(t_2)=1\}+1\times0P\{\xi(t_1)=1,\xi(t_2)=0\}\\ &\quad+0\times1P\{\xi(t_1)=0,\xi(t_2)=1\}\\ &\quad+0\times0P\{\xi(t_1)=0,\xi(t_2)=0\}\\ &=P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}\end{aligned}$$

下面求概率 $P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}$

事件 $\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}$ 等效于事件 $\{\xi(t_1)=1$，在 t_2-t_1 时间内波形发生偶次变化$\}$，即等效于事件$\{\xi(t_1)=1$，$\mu=$偶次$\}$，

故
$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)&=P\{\xi(t_1)=1,\ \mu=\text{偶次}\}\\ &=P\{\xi(t_1)=1\}P\{\mu=\text{偶次}\}\\ &=\frac{1}{2}P\{\mu=\text{偶次}\}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=\text{偶数}}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\Big]\\ &=\frac{1}{4}e^{-\lambda(t_2-t_1)}[e^{\lambda(t_2-t_1)}+e^{-\lambda(t_2-t_1)}]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}]$$

同理，如果 $t_1>t_2$，则也有

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda(t_1-t_2)}]$$

故

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|t_1-t_2|}]$$

$$C_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=\mathrm{Cov}(\xi(t_1),\ \xi(t_2))$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$$

图 1-13 画出了 $\xi(t)$ 的相关函数图。

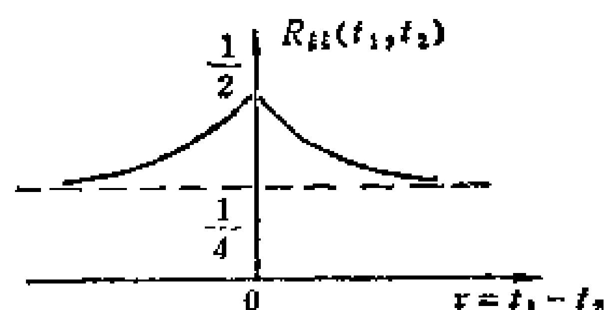


图 1-13

设时间差 $\tau=t_1-t_2$，则

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$\mathrm{cov}(\xi(t_1),\ \xi(t_2))=C_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号 $\xi(t)$ 的均值为常数，相关函数仅为时间差的函数，故随机电报信号是宽平稳随机过程。

§4 两个或两个以上随机过程的联合分布和数字特征

在实际问题中常遇到必须同时考虑两个或两个以上随机过程的情况，如线性系统的输入有信号和噪声，而两者均可能是随机的。又如有时要分析线性系统的输入随机过程和输出随机过程间的关系（见图1-14），在这种情况下，不仅要研究各个随机过程的概率分布、概率密度或统性特性，而且还必须研究几个随机过程的联合分布、联合概率密度或几个随机过程的联合统计特性。

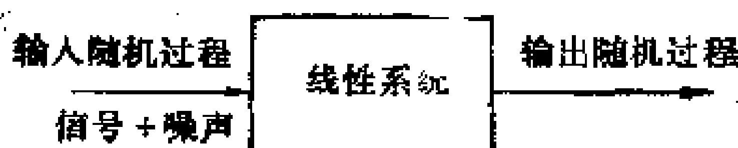


图 1-14

设有两个随机过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$和$\{\eta(t),\ t\in T\}$，它们具有同一个参数集T．$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots,t_n$和$t_1',t_2',\cdots,t_m'$是参数集T内的任意两组实数，则称$n+m$维随机变量$\{\xi(t_1),\ \xi(t_2),\ \xi(t_3),\ \cdots,\ \xi(t_n);\ \eta(t_1'),\ \eta(t_2'),\cdots,\eta(t_m')\}$的联合分布函数

$F_{n,m}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n;\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m;\ t_1',\ t_2',\ \cdots,\ t_m')=P\{\xi(t_1)<x_1,\ \xi(t_2)<x_2,\ \cdots,\xi(t_n)<x_n;\ \eta(t_1')<y_1,\ \eta(t_2')<y_2,\ \cdots,\ \eta(t_m')<y_m\}$为随机过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$和$\{\eta(t),\ t\in T\}$的$n+m$维联合分布函数。相应的$n+m$维联合概率密度记为

$$f_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots,$$
$$t_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$

如果对于任意正整数 n 和 m 以及任意数组 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 和 $t_1', t_2', \cdots, t_m'$ 联合分布函数或联合概率密度满足下列关系

$$F_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n;$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$
$$= F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$F_m(y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$

或
$$f_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n;$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$
$$= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$\times f_m(y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$

则称随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$和$\{\eta(t), t\in T\}$是相互统计独立的。

关于数字特征，除了$\xi(t)$和$\eta(t)$各自的数字特征外，在实际问题中感兴趣的是由随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$和$\{\eta(t), t\in T\}$组成的二维联合分布函数（或概率密度）所确定的二阶混合原点矩或二阶混合中心矩。

如果对于所有的 t 都满足 $E\{\xi_t^2\} < +\infty$ 和 $E\{\eta_t^2\} < +\infty$，且设t_1、t_2是参数集 T 中的任意两个数，则$\xi(t_1)$和$\eta(t_2)$的二阶混合原点矩为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty} xy f_{\xi\eta}(x, y; t_1, t_2)dxdy$$

称 $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$为随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$和$\{\eta(t), t\in T\}$的互相关函数。

$\xi(t_1)$和$\eta(t_2)$的二阶混合中心矩为

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \mathrm{Cov}(\xi(t_1), \eta(t_2)) \\
&= E\{[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)][\eta(t_2)-\mu_\eta(t_2)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_\xi(t_1))(y-\mu_\eta(t_2)) \\
&\quad \times f_{\xi\eta}(x, y; t_1, t_2)dxdy \\
&= E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}-\mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2) \\
&= R_{\xi\eta}(t_1, t_2)-\mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2)
\end{aligned}
$$

称$\xi(t_1)$和$\eta(t_2)$的二阶混合中心矩为随机过程$\xi(t)$和$\eta(t)$的互协方差函数。

如果被研究的两个随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$和$\{\eta(t), t\in T\}$对于任意的两个参量t_1和t_2都具有

$$C_{\xi\eta}(t_1, t_2)=0$$

或
$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=\mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2) \\
&= E\{\xi(t_1)\}E\{\eta(t_2)\}
\end{aligned}
$$

则称随机过程$\xi(t)$和$\eta(t)$是统计不相关或不相关的。

由此可以看到，如果两个随机过程是相互统计独立的，而且它们的二阶矩都存在，则它们必然是不相关的。然而我们不能由两个过程不相关来推断它们是统计独立的。但是对于正态过程，不相关性和相互统计独立性是完全一致的。

当同时考虑两个以上随机过程时，可以类似地引入它们的联合分布函数或联合概率密度以及两两之间的互相关函数或互协方差函数。

下面用例子来说明引入互相关函数的必要性。

设有一相加器，它的输入为$\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$三个随机过程，它的输出随机过程为$W(t)$，于是

$$W(t)=\xi(t)+\eta(t)+\zeta(t)$$

现在来研究输出过程的均值和相关函数。

（1）输出过程 $W(t)$ 的均值

$$\mu_w(t)=E\{W(t)\}=E\{\xi(t)+\eta(t)+\zeta(t)\}$$
$$=\mu_\xi(t)+\mu_\eta(t)+\mu_\zeta(t)$$

此式表示输出过程的均值为各输入过程均值之和。

（2）输出过程 $W(t)$ 的相关函数

$$\begin{aligned}
R_{WW}(t_1,\ t_2)=&E\{[\xi(t_1)+\eta(t_1)+\zeta(t_1)]\\
&\times[\xi(t_2)+\eta(t_2)+\zeta(t_2)]\}\\
=&E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}+E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}\\
&+E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}+E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}\\
&+E\{\xi(t_1)\zeta(t_2)\}+E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\}\\
&+E\{\eta(t_1)\zeta(t_2)\}+E\{\zeta(t_1)\xi(t_2)\}\\
&+E\{\zeta(t_1)\eta(t_2)\}\\
=&R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)+R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)\\
&+R_{\zeta\zeta}(t_1,\ t_2)+R_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)\\
&+R_{\xi\zeta}(t_1,\ t_2)+R_{\eta\xi}(t_1,\ t_2)\\
&+R_{\eta\zeta}(t_1,\ t_2)+R_{\zeta\xi}(t_1,\ t_2)\\
&+R_{\zeta\eta}(t_1,\ t_2)
\end{aligned}$$

此式说明，当研究随机过程和的自相关函数时，必然会遇到各个随机过程间的互相关函数，因此必须给以定义。此式还说明，几个随机过程和的自相关函数可以表示为各个随机过程的自相关函数及各对随机过程的互相关函数之和。

如果上述三个随机过程是互不相关的，且各自的均值都为零，则输出过程的均值 $\mu_W(t)=0$，且

$$R_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=\mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2)=0$$

$$R_{\eta\xi}(t_1,\ t_2)=0$$

$R_{\xi\zeta}(t_1,\ t_2)=0 \qquad R_{\zeta\xi}(t_1,\ t_2)=0$

$R_{\eta\zeta}(t_1,\ t_2)=0 \qquad R_{\zeta\eta}(t_1,\ t_2)=0$

$R_{WW}(t_1,t_2)=R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)+R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)+R_{\zeta\zeta}(t_1,\ t_2)$

在这种情况下，如果 $t_1=t_2$，则可得输出过程的方差

$$\sigma_W^2(t_1)=R_{WW}(t_1,\ t_1)=R_{\xi\xi}(t_1,\ t_1)+R_{\eta\eta}(t_1,\ t_1)+R_{\zeta\zeta}(t_1,\ t_1)$$
$$=\sigma_\xi^2(t_1)+\sigma_\eta^2(t_1)+\sigma_\zeta^2(t_1)$$

由于在后面的讨论中常要遇到复随机过程，这里先引入复数值的随机变量。

定义 设 η、ζ 为同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的两个取实数值的随机变量，并设 $\xi=\eta+j\zeta$，则称 ξ 为该概率空间上的一个复随机变量。

如果 η、ζ 的一阶矩和二阶矩存在，则

$$E\xi=E\eta+jE\zeta$$

$$D\xi=E|\xi-E\xi|^2=E\{(\xi-E\xi)\overline{(\xi-E\xi)}\}$$
$$=E\{(\eta-E\eta)^2\}+E\{(\zeta-E\zeta)^2\}$$

其中 $E\xi$ 定义为复随机变量 ξ 的均值，$D\xi$ 定义为复随机变量 ξ 的方差。方差值为一实数。实质上，ξ 是 η、ζ 所组成的二元随机变量。

由此可定义复随机过程如下：

定义 设 $\{\eta(t)\}$ 和 $\{\zeta(t)\}$ 是一对随机过程，并具有相同的参数，$\eta(t)$、$\zeta(t)$ 具有相同的概率空间，则 $\xi(t)=\eta(t)+j\zeta(t)$ 称为复随机过程。

若 $\{\eta(t)\}$ 和 $\{\zeta(t)\}$ 的数学期望和二阶矩都存在，则定义

$$E\{\xi(t)\}=E\{\eta(t)\}+jE\{\zeta(t)\}$$

为 $\xi(t)$ 的均值函数，定义

$$E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=E\{[\eta(t_1)+j\zeta(t_1)]\overline{[\eta(t_2)+j\zeta(t_2)]}\}$$

$$=R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)$$

为复随机过程的相关函数。

例 设有复随机过程$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k(1\leqslant k\leqslant N)$是相互统计独立的正态分布的随机变量 $N(0,\ \sigma_k^2)$，即η_k 的均值$(1\leqslant k\leqslant N)$为零，$\eta_k$ 的方差$(1\leqslant k\leqslant N)$为$\sigma_k^2$，$\omega_k$为常数。求$\xi(t)$的均值和相关函数。

解 因$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos\omega_k t$

$$+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin\omega_k t$$

故 $$E\{\xi(t)\}=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos\omega_k t+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin\omega_k t\right\}=0$$

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}$$

$$=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{l=1}^{N}\eta_l e^{j\omega_l t_2}\right)}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\eta_k\eta_l e^{j\omega_k t_1-j\omega_l t_2}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}$$

由于$\xi(t)$的均值为零，相关函数是时间差$\tau=t_1-t_2$的函数，故$\xi(t)$是一宽平稳随机过程。

习　　题

1. 某公共汽车站停放着两辆公共汽车A和B，从$t=1$秒开始，每隔1秒有一乘客到达车站。如果每一乘客以概率$\frac{1}{2}$登上A车，以概率$\frac{1}{2}$登上B车，各乘客登哪一辆车是相互统计独立的，并用ξ_i代表$t=i$时乘客登上A车的状态，即乘客登上A车则$\xi_i=1$，乘客根上B车则$\xi_i=0$，则

$P\{\xi_i=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{\xi_i=0\}=\frac{1}{2}$，当$t=n$时在A车上的乘客

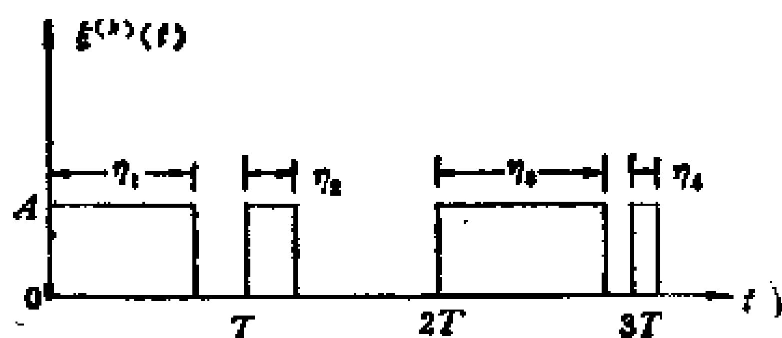
数为$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$\eta_n$是一个二项式分布的计算过程。

（1）求η_n的概率，即$P\{\eta_n=k\}=?$　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$；

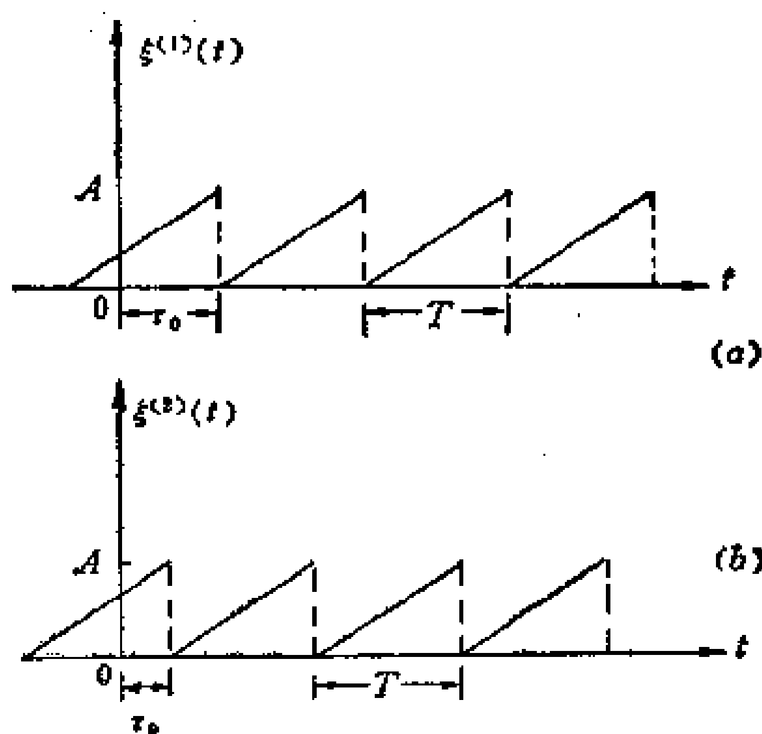
（2）当公共汽车A上到达10个乘客时，A即开车（例如$t=21$时$\eta_{21}=9$，且$t=22$时又有一个乘客乘A车，则$t=22$时A车出发），求A车的出发时间n的概率分布。

2. 设有一采用脉宽调制以传递信息的简单通信系统。脉冲的重覆周期为T，每一个周期传递一个值；脉冲宽度受到随机信息的调制，使每个脉冲的宽度均匀分布于$(0,\ T)$内，而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量；脉冲的幅度为常数A。也就是说，这个通信系统传送的信号为随机脉宽等幅度的周期信号，它是一随机过程$\xi(t)$。图题1-1画出了它的样本函数。试求$\xi(t)$的一维概率密度$f_{\xi_t}(x)$。

3. 设有一随机过程$\xi(t)$，它的样本函数为周期性的锯齿波。图题1-3(a)、(b)画出了二个样本函数图。各样本函



图题 1-2



图题 1-3

数具有同一形式的波形，其区别仅在于锯齿波的起点位置不同。设在 $t=0$ 后的第一个零值点位于 τ_0，τ_0 是一个随机变量，它在 $(0, T)$ 内均匀分布，即

$$f_{t_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (0\leqslant t\leqslant T)\\ 0 & (\text{其它值})\end{cases}$$

若锯齿波的幅度为A，求随机过程$\xi(t)$的一维概率密度。

4. 设有随机过程

$$\zeta(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t \quad (-\infty<t<\infty)$$

其中ω为常数，且$\omega>0$，ξ和η是随机变量，且相互统计独立，它们的概率密度为

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad (-\infty<x<\infty)$$

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \quad (-\infty<y<\infty)$$

即ξ和η是正态分布N(0，1)随机变量。若把$\zeta(t)$写成$\zeta(t)=V\sin(\omega t+\phi)$的形式，

（1）求$f_V(v)$、$f_\phi(\varphi)$及$f_{V\phi}(v,\varphi)$，问V和ϕ是否统计独立。

（2）画出$\zeta(t)$的典型样本函数；

（3）求$\zeta(t)$的一维概率密度$f_{\zeta_t}(z)$；

（4）设有事件A，$A\triangleq\left\{\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\zeta^2(t)dt>c\right\}$，其中c为常数，求出现A事件的概率P(A)。

5. 求第4题所给出的随机过程$\zeta(t)$的均值和自相关函数。

6. 设有随机过程$\xi(t)$，并设x是一实数，定义另一个随机过程$\eta(t)$

$$\begin{cases}\eta(t)=1 & (\xi(t)<x)\\ \eta(t)=0 & (\xi(t)\geqslant x)\end{cases}$$

试证 $\eta(t)$的均值和自相关函数分别为随机过程 $\xi(t)$ 的一维和二维分布函数。

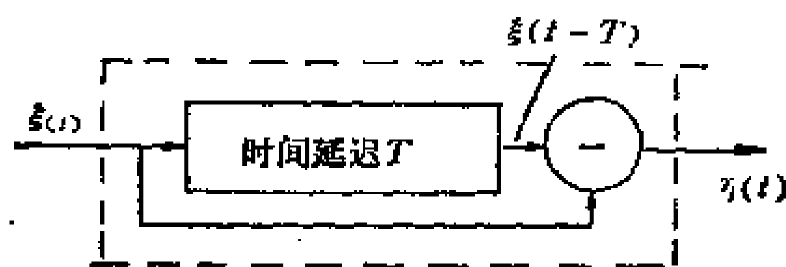
7. 设有随机过程$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$，$\xi(t)=\eta\cos t$，其中 η 为均匀分布于（0，1）间的随机变量，即

$$f_\eta(y)=\begin{cases}1 & (0\leqslant y<1)\\ 0 & (\text{其它}y\text{值})\end{cases}$$

试证：(a) $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)=\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$

(b) $C_{\xi\xi}(t_1, t_2)=\frac{1}{12}\cos t_1\cos t_2$

8. 设有一随机过程 $\xi(t)$ 作为图题1-8所示的线性系统的输入，系统的输出为$\eta(t)$，若$\xi(t)$的相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，试求输出随机过程$\eta(t)$的自相关函数（用输入过程的相关函数表示）。



图题 1-8

9. 设$\xi(\omega, t)$是§3例二所定义的随机电报信号（即任何时刻$\xi(\omega,t)$以概率1/2取值0或1，单位内时间波形平均变化次数为λ_ξ），$\eta(\omega, t)$也是0、1随机电报信号，它在单位时间内波形平均变化次数为λ_η，且$\xi(\omega, t)$和$\eta(\omega, t)$是相互统计独立的；又设随机过程$\zeta(\omega, t)$是$\xi(\omega, t)$、$\eta(\omega, t)$两随机信号之和，即$\zeta(\omega, t)=\xi(\omega, t)+\eta(\omega, t)$，

（1）试画出$\zeta(\omega, t)$的典型样本函数；

（2）试求$\zeta(\omega, t)$的一维概率密度；

（3）设有两时刻t_1和t_2，求$\zeta(t_1)$和$\zeta(t_2)$的二维联合概率密度。

10. 质点在直线上作随机游动，即在$t=1,2,3,\cdots$时质点可以在x轴上往右或往左作一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为p，往左移动一个单位距离的概率为q，即$P\{\xi_i=+1\}=p$，$P\{\xi_i=-1\}=q$，$p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过n次游动，质点所处的位置为$\eta_n=\eta(n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$。

（1）求$\eta(n)$的均值；

（2）求$\eta(n)$的相关函数和自协方差函数$R_{\eta\eta}(n_1, n_2)$和$C_{\eta\eta}(n_1, n_2)$。

11. 设有§2例二所定义的四电平随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

12. 设有§2例五所定义的、幅度服从正态分布的随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

第二章　马尔可夫过程（Ⅰ）——马尔可夫链

§1　马尔可夫过程的定义

（一）定义　设有一随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$，$t_1<t_2<t_3<\cdots<t_m<t_{m+1}\in T$，若在$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_m, t_{m+1}$对$\xi(t)$观测得到相应的观测值$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m, x_{m+1}$满足条件

$$f_{t_{m+1}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1}/x_1,x_2,\cdots,x_m)=f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)$$

则称这类过程为具有马尔可夫性质的随机过程或马尔可夫过程。其中$f_{t_{m+1}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1}/x_1, x_2, \cdots, x_m)$代表在$\xi(t_1)=x_1$，$\xi(t_2)=x_2, \cdots, \xi(t_m)=x_m$的条件下，在$t_{m+1}$时$\xi(t_{m+1})$取$x_{m+1}$值的条件概率密度。

上述定义中的条件是用概率密度形式表示的，该条件也可用概率形式表示，即

$$P\{\xi(t_{m+1})\in A/\xi(t_1)=x_1, \xi(t_2)=x_2,\cdots,\xi(t_m)=x_m\}$$
$$=P\{\xi(t_{m+1})\in A/\xi(t_m)=x_m\}$$

或　$$P\{\xi(t_{m+1})<x_{m+1}/\xi(t_1)=x_1, \xi(t_2)=x_2, \cdots,\xi(t_m)=x_m\}=P\{\xi(t_{m+1})<x_{m+1}/\xi(t_m)=x_m\}$$

或　$$F_{\xi_{t_{m+1}}/\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_m}}(x_{m+1}/x_1x_2,\cdots,x_m)$$
$$=F_{\xi_{t_{m+1}}/\xi_{t_m}}(x_{m+1}/x_m)$$

如果把t_m看作“现在”，则因$t_{m+1}>t_m$，t_{m+1}就成为

“将来”；而 $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_m$，故 t_1，t_2，…，t_{m-1} 就成为“过去”。因而上述定义中的条件可表述为：在 t_m 时 $\xi(t_m)$ 取值为 x_m 的条件下，$\xi(t)$“将来”的状态与“过去”的状态是无关的。也可以这样说：$\xi(t)$的“将来”只是通过“现在”与“过去”发生联系，一旦“现在”已经确定，“将来”与“过去”无关。也可以说：在已知 t_m 时过程所处状态 $\xi(t_m)=x_m$ 的条件下，时刻 t_m 以后过程将到达状态的情况与时刻 t_m 以前过程所处的状态无关。这个条件称为过程的无后效性或过程的马尔可夫性。

马尔可夫过程 $\xi(t)$ 的有穷维概率密度可以表示为

$$
\begin{aligned}
& f_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m) \\
&= f_{t_m/t_1,t_2,\cdots,t_{m-1}}(x_m/x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) \\
&\quad \cdot f_{t_1,t_2,\cdots,t_{m-1}}(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) \\
&= f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1}) f_{t_1,t_2,\cdots,t_{m-1}} \\
&\quad \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) = \cdots \\
&= f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1}) f_{t_{m-1}/t_{m-2}}(x_{m-1}/x_{m-2}) \cdots \\
&\quad \cdot f_{t_2/t_1}(x_2/x_1) f_{t_1}(x_1)
\end{aligned}
$$

该式表明 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度等于一些条件概率密度与 t_1 时初始概率密度的乘积。这些条件概率密度称为转移概率密度。

马尔可夫过程$\{\xi(t), t\in T\}$可能取的值的全体组成过程的状态空间，$\xi(t)$可能取的值称为状态。$\xi(t)=x$ 代表在 t 时刻过程（或系统）外在状态 x。马尔可夫过程的状态空间可以是连续的，也可以是离散的。马尔可夫过程的参数 t 可以是连续的，也可以是离散的。

（二）马尔可夫链的定义：

$\{\xi(n), n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是离散状态（状态空间为 I）、

参数为非负整数的随机过程，且$\xi(n)$满足条件

$$P\{\xi(n+1)=j/\xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\ \cdots,\ \xi(n-1)=i_{n-1},\ \xi(n)=i\}$$
$$=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i\}$$

即在参数$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，状态取$\xi(0)=i_0$，$\xi(1)=i_1$，$\cdots$，$\xi(n-1)=i_{n-1}$，$\xi(n)=i$的条件下，$\xi(n+1)=j$的条件概率与$\xi(0)$，$\xi(1)$，$\xi(2)$，$\cdots$，$\xi(n-1)$无关而仅与$\xi(n)$所取的值有关，把这类随机过程称为马尔可夫链。

由定义可知

$$P\{\xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\ \xi(2)=i_2,\ \cdots,\ \xi(n)=i_n\}$$
$$=P\{\xi(n)=i_n/\xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\ \cdots,\ \xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{\xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\ \cdots,\ \xi(n-1)=i_{n-1}\}$$
$$=P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\ P\{\xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\ \cdots,\ \xi(n-1)=i_{n-1}\}$$
$$=\cdots$$
$$=P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{\xi(n-1)=i_{n-1}/\xi(n-2)=i_{n-2}\}\cdots\cdot P\{\xi(1)=i_1/\xi(0)=i_0\}P\{\xi(0)=i_0\}$$

可见，为了描述马尔可夫链的$(n+1)$维概率分布，最重要的是条件概率$P\{\xi(k+1)=j/\xi(k)=i\}$，称这条件概率为在时刻k时的一步转移概率

$$p_{ij}(k)=P\{\xi(k+1)=j/\xi(k)=i\}$$

它表示在时刻k时$\xi(k)$取i值的条件下，在下一时刻$k+1$时$\xi(k+1)$取j值的概率。显然$p_{ij}(k)$应具有以下两个性质：

（1）$p_{ij}(k)\geqslant 0\quad (i,\ j\in I)$

（2）$\sum_{j\in I} p_{ij}(k)=1 \quad (i\in I)$

（三）齐次马尔可夫链

定义 如果在马尔可夫链中

$$P\{\xi(k+1)=j/\xi(k)=i\}=p_{ij}$$

即从 i 状态转移到 j 状态的概率与 k 无关，则称这类马尔可夫链为齐次马尔可夫链。

设 **P** 代表一步转移概率 p_{ij} 所组成的矩阵，且状态空间 I 由状态 0，1，2，…所组成，则

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

显然 **P** 矩阵的每个元素为非负的，并且每行之和均为 1。**P** 被称为一步转移概率矩阵。如果状态空间的状态是有限的，则称为有限状态的马尔可夫链；如果状态空间 I 是{0，±1，±2，…}，则称为可列状态的马尔可夫链。

§2 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式

上节中定义了马尔可夫链和它的一步转移概率。同样地还可以定义 m 步转移概率 $p_{ij}^{(m)}(n)$

$$p_{ij}^{(m)}(n)\triangleq P\{\xi(n+m)=j/\xi(n)=i\}$$

它代表在时刻 n 时 $\xi(n)$ 的状态为 i 的条件下，经过 m 步转

移到达状态 j 的概率。显然

$$p_{ij}^{(m)}(n) \geqslant 0 \quad (i, j \in I)$$

$$\sum_{j \in I} P_{ij}^{(m)}(n) = 1 \quad (i \in I)$$

当 m = 1 时，它是一步转移概率

$$p_{ij}^{(1)}(n) = p_{ij}(n)$$

通常还规定

$$p_{ij}^{(0)}(n) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases}$$

对于 m 步转移概率有如下的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i, j \in I)$$

上述公式可以用全概率公式证明：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = P\{\xi(n+m+r) = j / \xi(n) = i\}$$

$$= \sum_{k \in I} P\{\xi(n+m+r) = j, \ \xi(n+m) = k / \xi(n) = i\}$$

$$= \sum_{k \in I} P\{\xi(n+m+r) = j / \xi(n+m) = k, \ \xi(n) = i\} \cdot P\{\xi(n+m) = k / \xi(n) = i\}$$

$$= \sum_{k \in I} P\{\xi(n+m+r) = j / \xi(n+m) = k\} \cdot P\{\xi(n+m) = k / \xi(n) = i\}$$

$$= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i, j \in I)$$

对于齐次马尔可夫过程，则切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

式可以写成如下形式：

$$p_{ij}^{(m+r)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(r)}\quad(i,\ j\in I)$$

设 $\mathbf{P}^{(m)}$ 代表 m 步转移概率矩阵，它的元素为 $p_{ij}^{(m)}$，则根据上述公式可得

$$\mathbf{P}^{(m+r)}=\mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(r)}$$

因而 $\quad\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)}=\mathbf{PP}=(\mathbf{P})^2$

同理 $\quad\mathbf{P}^{(m)}=\mathbf{P}^{(m-1)}\mathbf{P}^{(1)}=\cdots=(\mathbf{P})^m$

即 $\quad p_{ij}^{(2)}=\sum_{k\in I}p_{ik}p_{kj}$

其中 $\mathbf{P}^{(1)}$ 即是一步转移概率矩阵 $\mathbf{P}$。

由此可知，m步转移概率矩阵可以从一步转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 自乘 m 次得到，也可通过切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式

$$p_{ij}^{(m)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(m-1)}p_{kj}$$

求得。这样，对于齐次马尔可夫链，如果知道了它的初始概率分布，即 $n=0$ 时 $\xi(0)$ 取各个状态的概率，并且知道了它的一步转移概率，就可以求得 $\xi(n)$ 的所有有限维概率分布。如 $\xi(n)$ 的状态空间为 I，$0<n_1<n_2<\cdots<n_k$，则 $\xi(n)$ 的 k 维概率分布为

$$\begin{aligned}&P\{\xi(n_1)=i_1,\ \xi(n_2)=i_2,\ \cdots,\ \xi(n_k)=i_k\}\\
&=\sum_{j\in I}P\{\xi(0)=j,\ \xi(n_1)=i_1,\ \xi(n_2)=i_2,\\
&\qquad\cdots,\ \xi(n_k)=i_k\}\\
&=\sum_{j\in I}P\{\xi(n_k)=i_k/\xi(n_{k-1})=i_{k-1}\}\\
&\quad\cdot P\{\xi(0)=j,\ \xi(n_1)=i_1,\ \cdots,\ \xi(n_{k-1})=i_{k-1}\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j \in I} p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})} P\{\xi(0) = j,\ \xi(n_1) = i_1, \\
&\qquad \cdots,\ \xi(n_{k-1}) = i_{k-1}\} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{j \in I} p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})} p_{i_{k-2} i_{k-1}}^{(n_{k-1} - n_{k-2})} \cdots p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \\
&\qquad \cdot P\{\xi(n_1) = i_1,\ \xi(0) = j\} \\
&= \sum_{j \in I} p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})} p_{i_{k-2} i_{k-1}}^{(n_{k-1} - n_{k-2})} \cdots p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} p_{j i_1}^{(n_1)} \\
&\qquad \cdot P\{\xi(0) = j\}
\end{aligned}
$$

上式中各m步转移概率 $p_{j i_1}^{(n_1)}$, $p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)}$, …, $p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$ 均可利用切普曼-柯尔莫哥洛夫公式求得。所以，利用初始分布和一步转移概率就可以完全确定马尔可夫链的统计规律。

§3 马尔可夫链的一些简单例子

马尔可夫链在研究质点的随机运动、自动控制、通信技术、生物学中的群体增长、基因遗传等诸方面均有广泛的运用。

现举一些属于马尔可夫链的例子。

例一 天气预报问题

如果明天是否有雨仅与今日的天气（是否有雨）有关，而与过去的天气无关，并设今日下雨，明日有雨的概率为 α，今日无雨而明日有雨的概率为 β；又假定把有雨称为0

状态天气，把无雨称为 1 状态天气，则本例是一个两状态的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

设$\alpha=0.7$，$\beta=0.4$，则一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

于是两步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)}=(\mathbf{P})^2=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

四步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(4)}=(\mathbf{P}^{(2)})^2=\mathbf{P}^{(2)}\cdot\mathbf{P}^{(2)}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

由此可知，今日有雨且第四日仍有雨的概率为

$$p_{00}^{(4)}=0.5749$$

例二 在某数字通信系统中传递0、1两种信号，且传递要经过许多级。每级中由于噪声的存在会引起误差。如果每级送入 0 、 1 信号后，它的输出不产生误差的概率为p(即各级正确传递信息的概率)，则各级输入状态和输出状态间的转移概率矩阵（即一步转移概率矩阵）为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

例三 无限制的随机游动

质点在直线上作随机游动。如某一时刻质点位于 i，则下一步质点以概率 p 向右移动一格到达 $i+1$。或以概率 $1-p=q$ 向左移一格到达 $i-1$。若以 $\xi(n)$ 表示时刻 n 时质点的位置，则 $\{\xi(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程。而且当 $\xi(n)=i$ 时，$\xi(n+1),\xi(n+2),\cdots,\xi(n+k),\cdots$ 等 n 时刻后质点所处的状态只与 $\xi(n)=i$ 有关，而与质点在 n 以前是如何到达 i 的完全无关。所以它是一个齐次马尔可夫链，其状态空间为 I：$\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，而其一步转移概率为

$$\begin{cases} p_{i,i+1}=p & (i\in I,\ 0\leqslant p\leqslant 1) \\ p_{i,i-1}=q=1-p & \\ p_{ij}=0 & (j\neq i+1,\ i-1,\ j\in I) \end{cases}$$

下面求它的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$。已知每次转移只有两种可能，向左的概率为 q，向右的概率为 p，而 n 次转移的结果是从 i 到 j。如果 n 次转移中向右 m_1 次，向左 m_2 次，则

$$m_1+m_2=n$$

$$m_1\times 1+m_2\times(-1)=j-i$$

$$m_1=\frac{n+j-i}{2} \qquad m_2=\frac{n-j+i}{2}$$

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & (n+j-i\text{是偶数}) \\ 0 & (n+j-i\text{是奇数}) \end{cases}$$

$$p_{ii}^{(n)}=\begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & (n\text{为偶数}) \\ 0 & (n\text{为奇数}) \end{cases}$$

利用斯特灵(Stirling)公式

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

于是 $$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

$$\approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} p^n q^n$$

$$= \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

例四 带有一个吸收壁的随机游动

质点在直线上作随机游动，其规律如例三。这里仅作一点改变，即当质点一旦到达 $\xi(n)=0$ 时，$\xi(n+1)$ 就停留在这个零状态了。这样的状态称为吸收态。这种过程是一个齐次马尔可夫链 $\{\xi(n), n=0, 1, 2, \cdots\}$，其状态空间为 I：$\{0, 1, 2, \cdots\}$，即非负的整数集合。它的一步转移概率为

$$\begin{cases} p_{i\,i+1} = p & \\ p_{i\,i-1} = q = 1-p & (i \geqslant 1,\ i \in I) \\ p_{ij} = 0 \quad (j \neq i+1,\ i-1,\ j \in I,\ i \geqslant 1,\ i \in I) \\ p_{00} = 1 \end{cases}$$

由于状态 0 为状态空间的一个端点，所以把这种过程称为带有一个吸收壁的随机游动。

不难看出，i 状态为马尔可夫链的吸收状态的充要条件是 $p_{ii}=1$。

例五 带有两个吸收壁的随机游动

若随机游动的状态空间为 I：$\{0, 1, 2, \cdots, a\}$，则 0、a 两状态为吸收态。该过程仍是齐次马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$
P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

它是$(a+1)\times(a+1)$矩阵。故

$$
\begin{aligned}
&p_{i,i+1}=p && (1\leqslant i\leqslant a-1)\\
&p_{i,i-1}=q=1-p && (1\leqslant i\leqslant a-1)\\
&p_{ij}=0 && (j\neq i+1,\ i-1;\ 1\leqslant i\leqslant a-1)\\
&p_{00}=1 &&\\
&p_{aa}=1 &&\\
&p_{0j}=0 && (j\neq 0)\\
&p_{aj}=0 && (j\neq a)
\end{aligned}
$$

例六 赌徒输光问题

两个赌徒甲、乙进行一系列赌博。在每一局中甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 q，$p+q=1$，每一局后，负者要付一元给胜者。如果起始时甲有资本 a 元，乙有资本 b 元，$a+b=c$ 元，两人赌博直到甲输光或乙输光为止，求甲输光的概率。

这个问题实质上是带有两个吸收壁的随机游动。这时的状态空间为$\{0, 1, 2, \cdots, c\}$，$c=a+b$，$a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$。现在的问题是求质点从 a 点出发到达 0 状态先于到达 c 状态的概率。

解 设 $0\leqslant j\leqslant c$，设 u_j 为质点从 j 出发到达 0 状态先于到达 c 状态的概率。根据全概率公式有

$$u_j=u_{j+1}p+u_{j-1}q$$

考虑质点从 i 出发移动一步后的情况。在以概率 p 移到 i+1 的假设下，到达 0 状态先于到达 c 状态的概率为 u_{i+1}。同理，在以概率 q 移到 i-1 的前提下，到达 0 先于到达 c 的概率为 u_{i-1}。利用全概率定理就可以得到上述方程。这一方程实质上是一差分方程，它的边界条件是

$$u_0 = 1$$

$$u_c = 0$$

于是 $$(p+q)u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}$$

或 $$u_i - u_{i+1} = \left(\frac{q}{p}\right)(u_{i-1} - u_i)$$

设 $$r = \frac{q}{p} \quad d_i = u_i - u_{i+1}$$

则可得到两个相邻差分间的递推关系

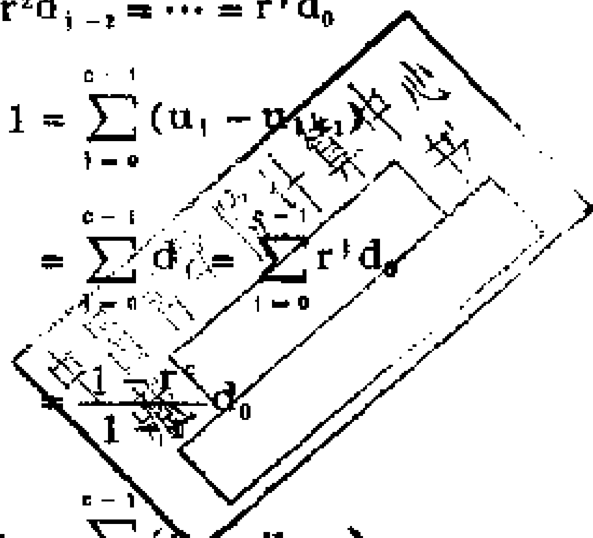
$$d_i = rd_{i-1}$$

于是 $$d_i = rd_{i-1} = r^2 d_{i-2} = \cdots = r^i d_0$$

当 $r \neq 1$ 时 $$u_0 - u_c = 1 = \sum_{i=0}^{c-1}(u_i - u_{i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{c-1} d_i = \sum_{i=0}^{c-1} r^i d_0$$

$$= \frac{1-r^c}{1-r} d_0$$



而 $$u_i = u_i - u_c = \sum_{i=i}^{c-1}(u_i - u_{i+1})$$

$$= \sum_{i=i}^{c-1} d_i = \sum_{i=i}^{c-1} r^i d_0$$

$$= r^i(1 + r + \cdots + r^{c-i-1})d_0$$

$$= \frac{r^j - r^c}{1-r} d_0$$

因此 $$u_j = \frac{r^j - r^c}{1-r^c}$$

故 $$u_a = \frac{r^a - r^c}{1-r^c} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$$

当 $r=1$ 时 $$u_0 - u_c = 1 = c d_0$$

而 $$u_j = (c-j) d_0$$

因此 $$u_j = \frac{c-j}{c}$$

故 $$u_a = \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c}$$

由以上计算结果可知，当 $r \neq 1$ 即 $p \neq q$ 时，甲先输光的概率为

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c};$$

当 $r=1$ 即 $p=q$ 时　甲先输光的概率为 $\frac{b}{c}$。

用同样的方法可以求得乙先输光的概率。当 $p \neq q$ 时，乙先输光的概率为 $\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$；当 $p=q$ 时，乙先输光的概率为 $\frac{a}{c}$。

例七　带有一个反射壁的随机游动

该随机游动所取的状态空间为 I：{0，1，2，…}，但本例和例四不同。例四中 0 状态为吸收态，本例中 0 状态不是吸收态。一旦质点进入 0 状态，下一步它以概率 p 向右移一格，以概率 q 停留于 0 状态。这种情况也可以作如下的解释：设想在“$-\frac{1}{2}$”处有一反射壁，每次质点由 0 向左移动时即被反射壁反射回 0 状态。正是基于这种解释，把这类随机游动称为带有反射壁的随机游动。它仍然是一个齐次马尔可夫链，其一步转移概率为

$$
\begin{aligned}
&p_{i,i+1}=p &&(i\geqslant 1)\\
&p_{i,i-1}=q=1-p &&(i\geqslant 1)\\
&p_{ij}=0 &&(j\neq i+1,i-1,i\geqslant 1)\\
&p_{01}=p\\
&p_{00}=q=1-p\\
&p_{0j}=0 &&(j\neq 0,1)
\end{aligned}
$$

例八 带有两个反射壁的随机游动

本例的状态空间为 I，{0，1，2，…，a}，它的一步转移概率矩阵为

$$
P=\begin{pmatrix}
q & p & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0\\
q & 0 & p & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & q & 0 & p & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & q & 0 & p\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & & p
\end{pmatrix}
$$

即 $p_{00}=q$；$p_{01}=p$；$p_{0j}=0$ $(j\neq 0,1)$

$p_{aa}=p$；$p_{a,a-1}=q$；$p_{aj}=0$ $(j\neq a,a-1)$

仿例七，可以设想在“$-\frac{1}{2}$”和“$a+\frac{1}{2}$”处分别设置一个反射壁，质点自0向左移时即被反射壁反射回状态0，质点自a向右移动时即被反射壁反射回状态a，故称这类随机游动为带有两个反射壁的随机游动。

在随机游动中，质点在下一步取什么状态，以及以什么概率取那一个状态，可以根据过程的物理特性给以不同的规定。例如，可以规定质点以概率p向右走一格，以概率r停留于原来的位置上，以概率q向左走一格，$p+q+r=1$，这样得到了另一种形式的马尔可夫链。自然界的许多物理过程可以用不同形式随机游动的概率模型表示，例一和例二就是两个状态的随机游动模型。

例九 艾伦菲斯特(Ehrenfest)模型

它可以用坛子模型来说明。设一个坛子中装有c个球，它们或是红色的，或是黑色的。从坛中随机地摸出一个球，并换入一个另一种颜色的球，经过n次摸换，研究坛中的黑球数。

若坛子中原有的黑球数为i，并把i视为过程的状态，则经过一次摸换，坛子中的黑球数可能为$i-1$个，也可能为$i+1$个，即过程的状态可能取$i-1$，也可能取$i+1$。取$i-1$状态的概率为$p_{i,i-1}=\frac{i}{c}$（即摸到黑球，换以红球，状态从i状态转入$i-1$状态）；取$i+1$状态的概率为$p_{i,i+1}=\frac{c-i}{c}$（即摸到红球，换以黑球，状态从i状态转入$i+1$状态）。

这个模型的状态空间为I：{0，1，2，…，c}，它是一个齐次马尔可夫链。

如果对上面的模型作一些置换（即设 $c=2a$，取坛子中的黑球数减去 a 作为过程的状态，此时过程的状态空间为 I：$\{-a, -a+1, \cdots, 0, 1, 2, \cdots, a\}$，0 状态代表坛子中红、黑球数相等的状态。则

$$p_{i,i-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{a}\right)$$

$$p_{i,i+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{a}\right)$$

可以用这个模型研究气体分子的运动。设有 容器，其中有 2a 个作随机运动的粒子。设想有一个并不存在的界面将容器分为相等的左右两部分，则在均衡时每一部分包含 a 个粒子。现以 $\xi(t)$ 表示 t 时刻在右边部分所含的粒子数与 a 之差，显然，由于粒子的随机运动，$\xi(t)$ 是随机变量，它可以取 $-a, -a+1, -a+2, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, a$。如有一个粒子从左部跑到右部，则 $\xi(t)$ 增加 1；反之，如有一个粒子从右部进入左部，则 $\xi(t)$ 减少 1。作为一次近似，假定同时有两个粒子从左部到右部或从右部到左部，以及在同一时刻一个从右部到左部，另一个从左部进入右部等都不可能发生，也即 $\xi(t)$ 每次只可能发生增加一或减少一的变化；还假定每隔单位时间进行一次游动。设经过 n 次游动 $\xi(n)$ 取 i 状态，即 $\xi(n)=i$，则 $i>0$ 表示右部粒子数比左部粒子数多，在这种情况下，一个粒子从右部进入左部的概率要比从左部进入右部的概率大，而且其相差的程度与两部分粒子数之差 $(i+a)-[2a-(i+a)]=2i$ 成正比，即

$$\begin{cases} p_{i,i-1}-p_{i,i+1}=\dfrac{2i}{2a}=\dfrac{i}{a} \\ p_{i,i-1}+p_{i,i+1}=1 \end{cases}$$

也即
$$p_{i,i-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{a}\right)$$

$$p_{i,i+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{a}\right)$$

当 $i<0$ 时，可作同样处理。因此气体分子的运动可用艾伦菲斯特概型来说明。

例十　卜里耶(Polya)模型。

设坛子中有 b 只黑球，r 只红球。随机地从中取出一只球，然后再把该球放回，并加入与抽出球同色的球 c 只；如此取放，不断地进行下去。

设坛中黑球数为该系统的状态，"$\xi(n)=i$"表示在第 n 次取放后在坛中有 i 只黑球。显然每取放一次后坛中的黑球数或者不变或者增加 c 只。因此

$$P\{\xi(n+1)\}=j/\xi(n)=i,A\}=\begin{cases}\dfrac{i}{b+r+nc} & (j=i+c)\\[2ex] 1-\dfrac{i}{b+r+nc} & (j=i)\\[2ex] 0 & (j\text{ 为其它值})\end{cases}$$

其中A 表示由前 $n-1$ 次摸球结果所规定的任一事件。由于上述概率与 i、j、n 有关，而与A 取何事件无关，所以它是一个马尔可夫链，其一步转移概率为

$$p_{ij}(n)=\begin{cases}\dfrac{i}{b+r+nc} & (j=i+c)\\[2ex] 1-\dfrac{i}{b+r+nc} & (j=i)\\[2ex] 0 & (j\text{ 为其它值})\end{cases}$$

由于 $p_{ij}(n)$是 n 的函数，因此该马尔可夫链为非齐次

的马尔可夫链。

例十一 离散分枝过程

考虑某一群体，用$\xi(n)$表示第n代中个体的数目。若某一代的每一个个体可以产生η个下一代个体，η是一个取非负整值的离散随机变量，且

$$P\{\eta=k\}=p_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

还假设某一代中各个个体产生下一代的个数是相互统计独立的，因此

$$\xi(n+1)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{\xi(n)}$$

其中$\{\eta_i\}$是相互统计独立的，并与η是同分布的随机变量。故$\xi(n+1)$是随机个随机变量之和。如果知道$\xi(n)$，则$\xi(n+1)$的分布就完全确定了，而与以前各代的个体数$\xi(n-1)$、$\xi(n-2)$、…无关。因此它是一个马尔可夫链。把这类马尔可夫链称为离散的分枝过程。

采用母函数法研究$\xi(n)$的分布函数。设$F(s)$为随机变量η的母函数，即$F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$；又设第0代有一个个体，即$P\{\xi(0)=1\}=1$，则与$\xi(0)$分布相应的母函数为$G_0(s)=s$；而$\xi(1)=\eta$，则与$\xi(1)$分布相应的母函数为$G_1(s)=F(s)$。

设$\xi(n)$的母函数为$G_n(s)$，则$G_2(s)=G_1(F(s))=F(F(s))$，所以$G_n(s)=G_{n-1}(F(s))=G_{n-2}(F(F(s)))=\cdots$

$$=\underbrace{F(F(\cdots F(s)))}_{n\text{次}}=F^{(n)}(s)$$

由此可知，$F(s)$完全决定了$\xi(n)$的分布。

有时会遇到一些问题虽不是马尔可夫链，但经过某些处理，仍可把它看作马尔可夫链。如在天气预报问题中，认为今日是否下雨依赖于前两天的天气状况，并规定：昨日、今

日都下雨，明日有雨的概率为0.7；今日有雨、昨日无雨，明日有雨的概率为0.5；昨日有雨、今日无雨，明日有雨的概率为0.4；昨日、今日均无雨，明日有雨的概率为0.2。该问题不是马尔可夫链。但是，经过如下处理却可以把它看作马尔可夫链。

设昨日、今日连续两天有雨称为状态0（RR），昨日无雨、今日有雨称为状态1(NR)，昨日有雨、今日无雨称为状态2（RN），昨日、今日均无雨称为状态3（NN），于是形成了四个状态的马尔可夫链，其中

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= P(R_{今}R_{明}/R_{昨}R_{今}) = P(\text{连续三天有雨}) \\
&= P(R_{明}/R_{昨}R_{今}) \\
&= 0.7
\end{aligned}
$$

$$p_{01} = P(N_{今}R_{明}/R_{昨}R_{今}) = 0 \quad (\text{不可能事件})$$

$$
\begin{aligned}
p_{02} &= P(R_{今}N_{明}/R_{昨}R_{今}) = P(N_{明}/R_{昨}R_{今}) \\
&= 1 - 0.7 = 0.3
\end{aligned}
$$

$$p_{03} = P(N_{今}N_{明}/R_{昨}R_{今}) = 0 \quad (\text{不可能事件})$$

其中R代表有雨，N代表无雨。于是它的一步转移概率矩阵为

$$
P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}
$$

有了一步转移概率矩阵就可以对今后的天气进行预报。

例如，若星期一、星期二均下雨，求星期四下雨的概率。

从一步转移概率矩阵可以计算出两步转移概率矩阵

$$P^{(2)}=PP=\begin{pmatrix}0.7&0&0.3&0\\0.5&0&0.5&0\\0&0.4&0&0.6\\0&0.2&0&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7&0&0.3&0\\0.5&0&0.5&0\\0&0.4&0&0.6\\0&0.2&0&0.8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.49&0.12&0.21&0.18\\0.35&0.20&0.15&0.30\\0.20&0.12&0.20&0.48\\0.10&0.16&0.10&0.64\end{pmatrix}$$

星期四下雨意味着过程所处的状态为 0 或为 1，因此星期一、星期二连续下雨，星期四下雨的概率为

$$p=p_{00}^{(2)}+p_{01}^{(2)}=0.49+0.12=0.61$$

§4 独立增量过程

定义 如果在参数集T上任选 $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n$ n 个点，随机过程 $\xi(t)$ 的增量 $\xi(t_2)-\xi(t_1)$，$\xi(t_3)-\xi(t_2)$，…，$\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 是相互统计独立的随机变量，则称这类过程为独立增量过程。

独立增量过程是与马尔可夫过程密切有关的随机过程。和马尔可夫过程相似，独立增量过程的有限维分布可由它的初始分布 $P\{\xi(t_0)<x\}$ 和它的一切增量的分布所唯一确定。t_0 为过程的初始时刻。

对于独立增量过程 $\{\xi(t),\ t\in T\}$，若参数集T为 $[a,b)$，$a>-\infty$，且一般规定其初始分布为 $P\{\xi(a)=0\}=1$，这时对于任意的 $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n<t$，$\xi(t)-\xi(t_n)$，$\xi(t_1)$

$-\xi(a)=\xi(t_1)$，$\xi(t_2)-\xi(t_1)$，…，$\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 是相互统计独立的；所以当 $\xi(t_n)$ 为已知时，$\xi(t)=\xi(t)-\xi(t_n)+\xi(t_n)$ 与 $\xi(t_1)$，$\xi(t_2)=\xi(t_2)-\xi(t_1)+\xi(t_1)$，…，$\xi(t_{n-1})$ 也是相互统计独立的。因此独立增量过程 $\{\xi(t), t\in T\}$ 一定是一个马尔可夫过程。

除了独立增量过程外，还有一种叫做正交增量的随机过程，它的定义如下：

定义 设随机过程 $\xi(t)$ 的二阶矩存在，且当 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4\in T$ 时，有

$$E\{[\xi(t_2)-\xi(t_1)]\overline{[\xi(t_4)-\xi(t_3)]}\}=0$$

则称该过程为正交增量过程。

对于独立增量过程 $\{\xi(t), t\in T\}$，若它还满足 $E\{\xi(t)\}=0$，$E\{|\xi(t)|^2\}<\infty$，则该过程也是正交增量过程。事实上，当 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$ 时，有

$$\begin{aligned}&E\{[\xi(t_2)-\xi(t_1)]\overline{[\xi(t_4)-\xi(t_3)]}\}\\&=E\{\xi(t_2)-\xi(t_1)\}E\{\overline{\xi(t_4)-\xi(t_3)}\}=0\end{aligned}$$

即均值函数为零、又存在二阶矩的独立增量过程必然也是正交增量过程。

如果独立增量过程的增量 $\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})$ 的分布仅与时间差 (t_k-t_{k-1}) 有关，而与 t_k、t_{k-1} 本身无关，则称它为齐次的独立增量过程。

后面要多次讨论的泊松过程和维纳过程是两个最重要的独立增量过程。

§5 马尔可夫链中状态的分类

(一) 到达和相通

定义 如果对状态 i 和 j 存在某个 $n(n\geqslant 1)$，使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，即由状态 i 出发，经 n 次转移以正的概率到达状态 j，则称自状态 i 可到达状态 j，并记为 $i\rightarrow j$。

反之，如状态 i 不能到达 j，记为 $i\nrightarrow j$，此时对于一切 $n(n\geqslant 1)$，$p_{ij}^{(n)}=0$。

$$P\{到达状态\ j/\xi_0=i\}=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\xi_n=j/\xi_0=i\right\}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\{\xi_n=j/\xi_0=i\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=0$$

例如在无限制随机游动中，每个状态都能到达任何其它状态。但在带有吸收壁的随机游动中，吸收壁状态却不能到达任何其它状态。

定义 有两个状态 i 和 j，如果由 i 状态可到达 j 状态，即 $i\rightarrow j$，且由 j 状态也可到达 i 状态，即 $j\rightarrow i$，则称状态 i 和状态 j 相通，并记为 $i\longleftrightarrow j$。

定理 如果由 i 状态可到达 k 状态，由 k 状态可到达 j 状态，则由 i 状态可到达 j 状态。即"到达"是具有传递性的。

证 如果 $i\rightarrow k$，$k\rightarrow j$，则根据定义存在 r 和 $n(r\geqslant 1, n\geqslant 1)$，使 $p_{ik}^{(r)}\geqslant 0$，$p_{kj}^{(n)}\geqslant 0$。

根据切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式

$$p_{ij}^{(r+n)}=\sum_{m\in I}p_{im}^{(r)}p_{mj}^{(n)}\geqslant p_{ik}^{(r)}p_{kj}^{(n)}>0\quad(k\in I)$$

因此 $i\rightarrow j$。

定理 相通具有传递性，即如果 $i \longleftrightarrow k$，$k \longleftrightarrow j$，则 $i \longleftrightarrow j$。

其证明方法如前。

因此，对于无限制随机游动，所有状态都是相通的；对于带有吸收壁的随机游动，除了吸收壁外，其余状态都是相通的，而吸收壁与其他任何状态都不相通。

（二）状态空间的分解

如果两个状态相通，则称这两个状态处于同一类中。可以根据相通的概念把状态空间分成一些隔离的类。

如果状态空间有一个子集 c，对于任何状态 $i \in c$，$j \notin C$，则有 $p_{ij}=0$

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= \sum_{k \in I} p_{ik}p_{kj} = \sum_{k \in c} p_{ik}p_{kj} + \sum_{k \notin c} p_{ik}p_{kj} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

用归纳法可以证明 $p_{ij}^{(n)}=0$ $(i \in c,\ j \notin c)$，即对于 $i \in c$，$j \notin c$，自 i 状态不能到达 j 状态。

定义 设 c 为状态空间的一个子集，如果从 c 内任何一个状态 i 不能到达 c 外的任何状态，则称 c 是闭集。

显然，对一切 $n \geqslant 1$，$i \in c$，有 $\sum_{j \in c} p_{ij}^{(n)} = 1$。

如果单个状态 i 构成一个闭集，则称这个闭集为吸收态。

显然整个状态空间构成一个闭集，这是较大的闭集。另一方面，吸收状态也构成一个闭集，它是较小的闭集。

把除了整个状态空间外没有别的闭集的马尔可夫链称为不可约的，这时所有状态之间都是相通的。

闭集的充要条件是当 i 在 c 中、j 在 c 外时，恒有 $p_{ij}^{(n)}=0$ $(n \geqslant 1)$。

定理 在$P^{(n)}$中如果仅保留同类中各状态间的转移概率，而把其它所有行和列的元素都删去，则所剩下的一个随机矩阵仍满足

$$\sum_{\substack{\text{所有}\\ k\in c}} p_{ik}=1 \quad (i\in c)$$

和

$$p_{ij}^{(n+m)}=\sum_{r\in c} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(m)}$$

例一 设有三个状态(0，1，2)的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

研究其各状态间的关系。

解 由状态0可到达状态2，$⓪\xrightarrow{1/2}①\xrightarrow{1/4}②$，即以概率$\frac{1}{2}$到达1，再以概率$\frac{1}{4}$从状态1到达状态2，$0\to 2$；从状态2出发经1状态也可到达0状态，$②\xrightarrow{1/3}①\xrightarrow{1/2}⓪$。圈中的数字代表状态，箭头上的数字代表概率，于是可得状态的传递图（见图2-1）。

由于三个状态均相通，故该马尔可夫链为不可约的。

例二 设有四个状态(0，1，2，3)的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

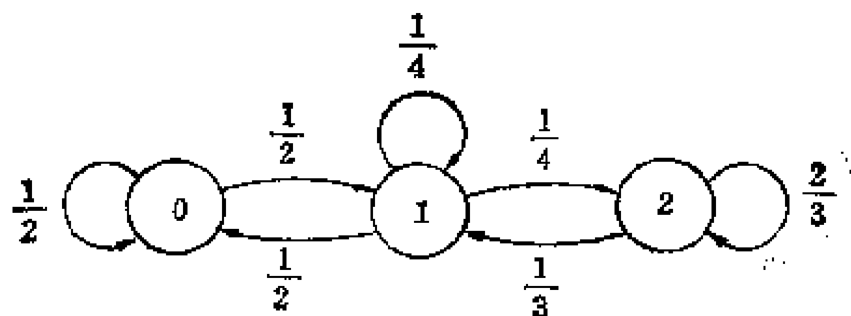


图 2-1

$$
\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

试对其状态进行分类。

解 在这个马尔可夫链中 $p_{33}=1$，而 p_{30}、p_{31}，p_{32} 均为 0，因此由状态 3 不能到达任何其它状态。状态 3 构成一个闭集，它是吸收态。

虽然从 2 状态出发可以到达 0 、1 、3 三个状态，但是从0、1、3 三个状态出发都不能到达 2 状态，所以 0、1两个状态和 2 状态是不相通的，0、1 两个状态也构成一个闭集。

所以该马尔可夫链有 {0，1} 和 { 3 } 两个闭集，且$\begin{pmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 构成一个随机矩阵。

该过程的状态传递图见图 2-2。

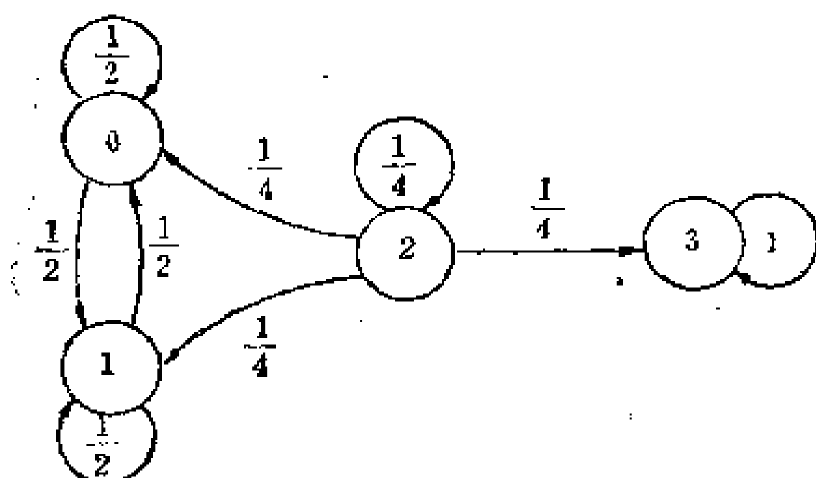


图 2-2

例三 设有 9 个状态 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵有如下形式：

$$
\mathbf{P}=\begin{pmatrix}
\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & \bullet & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

矩阵中 • 表示具有正概率的元素。试对其状态进行分类。

解 在该矩阵中 $p_{00}=1$，故状态 0 为吸收态，它本身构成一个闭集。

{1, 2}二个状态组成一个闭集；{3, 4, 5} 三个状态也组成一个闭集。

（三）常返态和滑过态（或非常返态）

对于任意两个状态 i、j，设 T_{ij} 代表从状态 i 出发首次进入状态 j 的时刻，即

$$T_{ij}(\omega)\triangleq\min\{n:\xi(0)=i,\ \xi_n(\omega)=j;\ n\geqslant 1\}$$

该式右方可读为"从状态 i 出发，使 $\xi_n(\omega)=j$ 的最小正值 n"。对于某个样本点，$\xi_n(\omega)$ 可能永远不会为 j，那么上式就不存在 n，并且对于该样本点 T_{ij} 没有真正的定义。在这一情况下，规定 $T_{ij}(\omega)=\infty$，用通常的话讲，"永不出现"也可以说是"终身等待"。按照这一规定，T_{ij} 是一个可以取值为∞的随机变量。我们把集合 $\{1,2,\cdots,\infty\}$ 记为 $\{N_\infty\}$，于是 T_{ij} 取值于 $\{N_\infty\}$。

定义 $f_{ij}^{(n)}\triangleq P\{T_{ij}=n/\xi(0)=i\}\geqslant 0$

$f_{ij}^{(n)}$ 为系统自状态 i 出发经 n 步首次到达状态 j 的概率，显然

$$f_{ij}^{(n)}=P\{\xi(n)=j;\ \xi(m)\neq j,\ m=1,2,\cdots,n-1/\xi(0)=i\}$$

于是

$$f_{ij}^{(1)}=p_{ij}=P\{\xi(1)=j/\xi(0)=i\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)}=P\{\xi(m)\neq j,\ 对一切\ m\geqslant 1/\xi(0)=i\}$$

定义 $$f_{ij}=\sum_{1\leqslant n<\infty}f_{ij}^{(n)}=\sum_{1\leqslant n<\infty}P\{T_{ij}=n/\xi(0)=i\}=P\{T_{ij}<\infty\}$$

f_{ij} 为系统自状态 i 出发迟早到达状态 j 的概率。应注意在该式中求和的上标不包括∞。从而得

$$P\{T_{ij}=\infty\}=f_{ij}^{(\infty)}=1-f_{ij}$$

显然有 $$0\leqslant f_{ij}^{(n)}\leqslant f_{ij}\leqslant 1$$

定理一 对任意的 i，$j\in I$ 及 $1\leqslant n<\infty$，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

证　由于$\{\xi(0)=i,\ \xi(n)=j\} \subset \{T_{ij} \leqslant n,\ \xi(n)=j\}$，因此事件$\{\xi(0)=i,\ \xi(n)=j\}$可按照首次进入j的时刻不同分解为互不相容事件之和。

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P\{\xi(n)=j/\xi(0)=i\} \\
&= P\{T_{ij} \leqslant n,\ \xi(n)=j/\xi(0)=i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{T_{ij}=v,\ \xi(n)=j/\xi(0)=i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{\xi(n)=j/\xi(0)=i,\ T_{ij}=v\} \\
&\quad \cdot P\{T_{ij}=v/\xi(0)=i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{\xi(n)=j/\xi(0)=i, \\
&\quad \xi(1)\neq j,\ \xi(2)\neq j,\ \cdots,\ \xi(v-1)\neq j, \\
&\quad \xi(v)=j\} P\{T_{ij}=v/\xi(0)=i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{\xi(n)=j/\xi(v)=j\} P\{T_{ij}=v/\xi(0)=i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}
\end{aligned}$$

该定理给出了$f_{ij}^{(n)}$和$p_{ij}^{(n)}$联系的关键公式。$f_{ij}^{(n)}$代表从状态i出发经n步首次进入j状态的概率，而$p_{ij}^{(n)}$代表从状态i出发经n步转移处于j状态的概率。

定理二　$f_{ij}>0$的充要条件是$i \to j$。

证明　（1）充分性　若$i \to j$，并根据可到达性的定义，则必存在一个$n(n \geqslant 1)$，使$p_{ij}^{(n)}>0$。由定理一

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} > 0$$

从而可知 $f_{ij}^{(1)}$，$f_{ij}^{(2)}$，$f_{ij}^{(3)}$，…，$f_{ij}^{(n)}$ 中至少有一个是大于零的，因此

$$f_{ij} = \sum_{1\leq r<\infty} f_{ij}^{(r)} > 0$$

（2）必要性　若 $f_{ij}>0$，并根据 $f_{ij} = \sum_{1\leq r<\infty} f_{ij}^{(r)}$，则至少有一个 $n\geq1$，使 $f_{ij}^{(n)}>0$。而

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} \geq f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(0)} = f_{ij}^{(n)} > 0$$

故　　　　　　　　$i \to j$

系　i、j相通的充要条件是 $f_{ij}>0$ 和 $f_{ji}>0$。

在上面的分析中，若 $j=i$，则 T_{ii} 代表从 i 状态出发首次返回 i 状态所需的时间，f_{ii} 代表从状态 i 出发经过有限步迟早要返回状态 i 的概率。故 f_{ii} 是在 0 和 1 之间的一个数。根据 f_{ii} 的取值情况，把状态 i 分成如下两类：

（1）如果 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返态；

（2）如果 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返态，有时也称滑过态。

利用上述定义可得如下定理：

定理三　状态 i 是常返（即 $f_{ii}=1$）的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

如果状态 i 为非常返时（即 $f_{ii}<1$），则

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$$

证明 引入与序列$\{p_{ij}^{(n)}, n\geq 0\}$相应的母函数

$$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n$$

同时又引入与序列$\{f_{ij}^{(n)}, n\geq 1\}$相应的母函数

$$F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}s^n$$

上面两个级数当$|s|<1$时，都是绝对收敛的。

利用公式 $$p_{ij}^{(n)}=\sum_{v=1}^{n}f_{ij}^{(v)}p_{jj}^{(n-v)}$$

于是 $$\begin{aligned}P_{ij}(s)&=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{n}f_{ij}^{(v)}p_{jj}^{(n-v)}\right)s^n\\&=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n}(f_{ij}^{(v)}s^v)(p_{jj}^{(n-v)}s^{n-v})\\&=\delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty}f_{ij}^{(v)}s^v\sum_{n=v}^{\infty}(p_{jj}^{(n-v)}s^{n-v})\\&=\delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty}f_{ij}^{(v)}s^v\sum_{m=0}^{\infty}(p_{jj}^{(m)}s^m)\\&=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{jj}(s)\end{aligned}$$

由于两个级数在$|s|<1$时是绝对收敛的，故在上面的推导中交换求和的顺序是许可的。

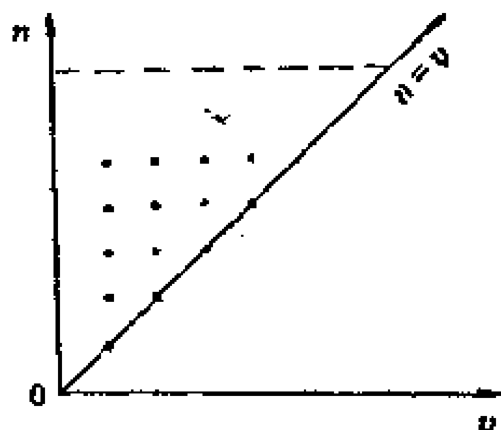


图 2-3

令 $j=i$，则

$$P_{ii}(s)=1+F_{ii}(s)P_{ii}(s)$$

或 $$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_{ii}(s)}$$

如果在上式中令$s=1$，并注意

$$P_{ii}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$$

$$F_{ii}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=f_{ii}$$

则可以推得定理中的两个结论。严格地说，只能令 $s\to1$，并应用微积分学中的阿贝尔定理来说明其正确性，即如果 $c_n\geqslant0$，且幂级数 $C(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ns^n$ 对 $|s|<1$ 收敛，则

$\lim\limits_{s\to1}C(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 为有限或无穷。

上述定理也可以用下述方法来说明：

如果i状态为常返态，则从i状态出发，经过有限步的转移迟早要返回状态i，即 $f_{ii}=1$。这样，过程从i状态出发、返回，再出发、再返回，周而覆始。如果过程无限地进行下去，则访问i状态的次数也无限地增加。

如果过程是非常返的，则过程从i状态出发，经过有限步转移返回i状态的概率 $f_{ii}<1$，而永不进入状态i的概率为 $1-f_{ii}$。如果过程从状态i开始，全过程中恰有m次处于状态i的概率为 $f_{ii}^{m-1}(1-f_{ii})$，$m\geqslant1$，它是一个几何分布，故处于i状态的平均次数为

$$\sum_{m=1}^{\infty}mf_{ii}^{m-1}(1-f_{ii})=\frac{1}{1-f_{ii}}$$

从上面两段讨论中可知，如果状态i是常返的，当且仅当从i状态出发，则该过程处于状态i的平均次数为无穷次。

再设有随机变量 A_n，$n=0, 1, 2, \cdots$，当 $\xi_n=i$ 时 $A_n=1$，当 $\xi_n\neq i$ 时 $A_n=0$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ 代表过程处于状态i

的次数，而

$$E\left\{\sum_{n=0}^{\infty}A_n/\xi_0=i\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}E\{A_n/\xi_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot P\{A_n=1/\xi_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\xi_n=i/\xi_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$$

由此可得结论：

（1）若$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，则状态 i 是常返的；

（2）若$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$，则状态 i 是非常返的。

上述结论很重要，它说明了：①对于一个非常返态，在过程中访问它的次数是有限的；②对于一个状态个数有限的马尔可夫链，不是所有的状态都为非常返态。第②点可以反证如下：如果有一个有限状态的马尔可夫链(0，1，2，…，M)，而且它的所有状态为非常返的，则经过一有限时间T_0后过程就不再访问0状态，经过一有限时间T_1后过程就不再访问1状态，依次类推，经过一个有限时间$T=\max(T_0, T_1, \cdots, T_m)$后过程就不再访问0，1，2，…，M 诸状态了，这就产生了矛盾，因为当时间大于T后，过程还必然处于某种状态。这说明，在有限状态的马尔可夫链中至少有一个状态为常返态。

由此还可以推导出另一结论。

定理四 设i、j状态是马尔可夫链的两个相通的状态，若状态i是常返的，则状态j也是常返的。

证 由于状态i、j是相通的，即 $i \longleftrightarrow j$，则必存在正整数k、m，使 $p_{ij}^{(k)}>0$，$p_{ji}^{(m)}>0$，因此对于任何正整数r有

$$p_{jj}^{(k+r+m)} \geqslant p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)}$$

该式左边代表从j状态出发经过 $(k+r+m)$ 步转移返回j状态的概率。

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)} \geqslant \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)}$$

$$= p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)}$$

因 $p_{ji}^{(m)}>0$，$p_{ij}^{(k)}>0$。且i为常返态，即

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty$$

故

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)} = \infty$$

状态j也是常返的。

由于马尔可夫链中同一类的各态均为相通的，所以只要其中有一个态是常返的，则同类的各态均为常返态。反之，如果同类中有一个态是非常返的，则同类各态均为非常返态。

可见常返和非常返均与一个类有关，故可以把常返、非常返称为类的特性。

定理五 如果j是非常返的，则对每一个i，$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} > \infty$；对每一个i，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

证明 当 $i=j$ 时，就是定理三。当 $i\neq j$ 时，

因
$$P_{ij}(s)=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{jj}(s)$$
$$P_{ij}(1)=F_{ij}(1)P_{jj}(1)\leqslant P_{jj}(1)<\infty$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}$ 收敛，对每一个 i，要求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$

例四 设有四个状态{0，1，2，3}的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试对其状态进行分类。

解 （1）它是一个有限状态的马尔可夫链；（2）所有状态都是相通的，其状态传递图见图 2-4。

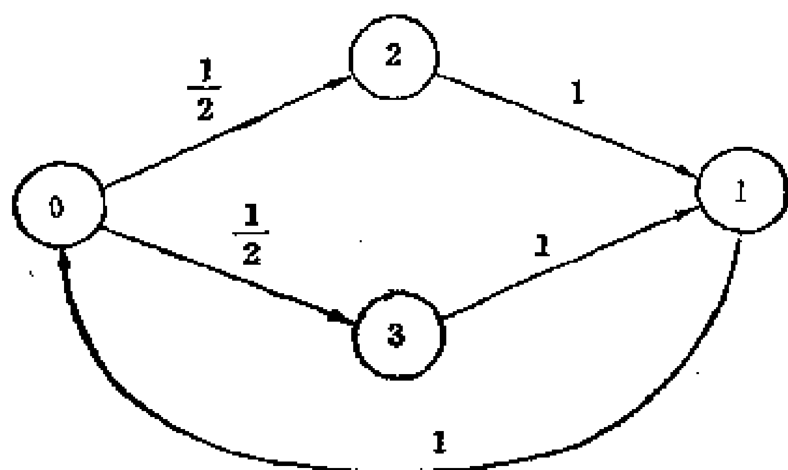


图 2-4

因此，所有状态必然均为常返态，整个状态空间{0，1，2，3}形成一个闭集。

例五 设有五个状态{0，1，2，3，4}的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$
P=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

试对其状态进行分类。

解 （1）从一步转移矩阵可知状态2和3不可能和其它状态相通，{2，3}组成一个闭集。如果过程初始就处于2状态或3状态，则过程永远处于2、3状态，故{2，3}是常返态。

（2）状态{4}可以转移到{0，1}状态，但是0、1两状态不能到达4状态，{0，1}组成一个闭集。一旦过程进入0、1状态，就永远处于0、1状态。{0，1}闭集是有限态，故0、1均为常返的。{4}状态为非常返态。

例六 试研究无限制随机游动各状态{0，±1，±2，…}的性质。

解 它的一步转移概率为

$$p_{i,i+1}=p \qquad (i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$
$$p_{i,i-1}=q=1-p$$

由于无限制随机游动中的各状态均相通，则所有状态或全部是常返的或全部是非常返的。现在研究状态 0 的性质，研究的方法是计算 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$， 如 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 是有限值则状态 0 为非常返的，如 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 取无限大值则状态 0 为常返的。

从零状态出发，经过奇数次的转移，它所取的状态不可能是偶数状态，故 $p_{00}^{(2n+1)}=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

从零状态出发，经过偶数次的转移，它所取的状态只能是偶数状态，因此经过偶数次的转移可以到达状态 0 。§3 的例三中已给出

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^nq^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

利用斯特灵公式 $n!\approx n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$

可知 $$p_{00}^{(2n)}\approx\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}=\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

式中 $4p(1-p)\leqslant1$，只有当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $4p(1-p)=1$。

（1）当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\right)=\infty$ 该级数是发散级数，故当 $p=\frac{1}{2}$ 时状态 0 为常返

态，则无限制随机游动的所有状态是常返的。

（2）当 $p\neq\frac{1}{2}$时，$4p(1-p)<1$，$\sum_{n=1}^{n}p_{00}^{(n)}$是收敛级数，即$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}<\infty$，状态0为非常返态，则无限制随机游动的所有状态是非常返的。

对于一个常返态，可以计算出它的平均返回时间μ_i

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$$

根据平均返回时间，又可把常返态分为两类。一类的平均返回时间是有限的，即$\mu_i<\infty$，称这一类为正常返，另一类是$\mu_i\to\infty$，或$\frac{1}{\mu_i}\to 0$，称之为零常返。

（四）周期的状态和非周期的状态

定义 如果有正整数d，$d>1$，只有当$n=d$，$2d$，$3d$，…时$p_{ii}^{(n)}>0$，或者说当n不能被d整除时$p_{ii}^{(n)}=0$，则称i状态是具有周期性的状态。

例如，过程从i状态出发，只有当$n=2$，4，6，…时，过程有可能返回状态i，取2，4，6，…的最大公约数$d=2$，则$d=2$是它的周期。该过程即为周期性的，状态i则是周期性的状态。如果除了$d=1$外使$p_{ii}^{(n)}>0$的各n值没有其它公约数，则称该状态i为非周期的。

因此无限制随机游动是属于周期性的，它的全体整数的状态空间可以分成偶数和奇数两个子类，质点每一步必须由一个子类走到另一个子类，两个子类的交替是转移中的一个确定性部分。因此它的周期为2。

例七 设有四个状态{0，1，2，3}的马尔可夫链，它的

一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试画出其状态传递图；该过程是否具有周期性。

解

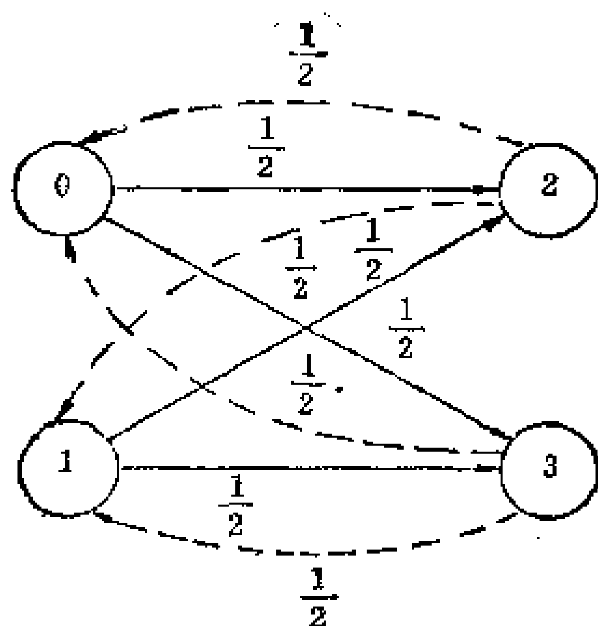


图 2-5

图 2-5 画出了它的状态传递图。

四个状态可以分成{0，1}和{2，3}两个子类。该过程有确定性的周期转移

$$\{0,\ 1\}\rightarrow\{2,\ 3\}\rightarrow\{0,\ 1\}\rightarrow\{2,\ 3\}\cdots$$

它的周期为 2 。

例八 设有八个状态{0，1，2，3，4，5，6，7}的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$
P=\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

试画出其状态传递图，该过程是否具有周期性。

解 图 2-6 画出了它的状态传递图。

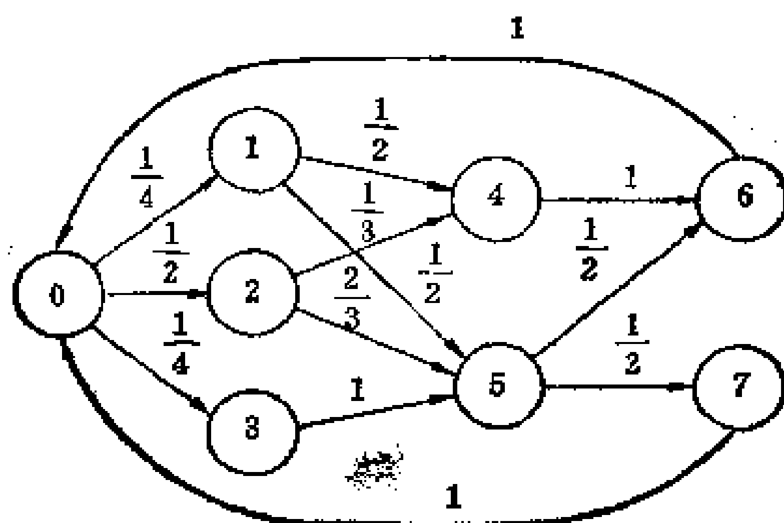


图 2-6

八个状态可以分成四个子集，c_1：{0}，c_2：{1，2，3}，c_3：{4，5}，c_4：{6，7}。c_1，c_2，c_3，c_4 是互不相交的子集，它们的并是马尔可夫链的整个状态空间。该过程有确定性的周期转移

$$c_1 \to c_2 \to c_3 \to c_4 \to c_1$$

故该马尔可夫链的周期为 $d=4$。

（五）遍历态

定义 非周期的正常返状态称为遍历态。

一个不可约的、非周期的、有限状态的马尔可夫链一定是遍历的。

§6 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质和平稳分布

定理 设有一有限状态的马尔可夫链，若存在一个正整数m，使得对状态空间的任何状态i、j有 $p_{ij}^{(m)}>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\pi$。

π 是一随机矩阵，且它的各行均相同。

证明 （1）先证明 $m=1$ 时，上述定理的正确性。

若 $m=1$，则定理中的条件是 $p_{ij}\geqslant\varepsilon>0$，$i$，$j\in I$。

设 $m_j(n)=\min\limits_i p_{ij}^{(n)}$，$m_j(n)$ 代表在n次转移后在j列中最小的一个元素。

设 $M_j(n)=\max\limits_i p_{ij}^{(n)}$，$M_j(n)$ 代表在n次转移后在j列中最大的一个元素。

根据切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式可知

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}\,p_{kj}^{(n-1)}\geqslant\sum_{k\in I}p_{ik}m_j(n-1)$$

$$=m_j(n-1) \tag{1}$$

由于（1）式对所有i都是正确的，包括 j 列中 $p_{ij}^{(n)}$ 为最小的 i 在内，因此

$$m_j(n)\geqslant m_j(n-1) \qquad (2)$$

（2）式说明每列的最小值随着n的增加而增加。同理，可以证明每列的最大值随着n的增加而减小。

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)}\leqslant \sum_{k\in I}p_{ik}M_j(n-1) \\ &= M_j(n-1) \end{aligned}$$

$$M_j(n)\leqslant M_j(n-1) \qquad (3)$$

由于 $M_j(n)$ 和 $m_j(n)$ 都是有界序列，故当 $n\to\infty$ 时 $M_j(n)$ 和 $m_j(n)$ 都趋向于它的极限。为了证明本定理，需要证明这两个序列趋于同一极限。

设当 $i=i_0$ 时，经 n 步转移到达最小值 $m_j(n)$，又设当 $i=i_1$ 时，经 $n-1$ 步转移到达最大值 $M_j(n-1)$，则

$$\begin{aligned} m_j(n) &= p_{i_0 j}^{(n)} = \sum_{k\in I}p_{i_0k}p_{kj}^{(n-1)} \\ &= \varepsilon p_{i_1j}^{(n-1)}+(p_{i_0i_1}-\varepsilon)p_{i_1j}^{(n-1)}+\sum_{\substack{k\neq i_1\\ k\in I}}p_{i_0k}p_{kj}^{(n-1)} \\ &\geqslant \varepsilon M_j(n-1)+\left[p_{i_0i_1}-\varepsilon+\sum_{\substack{k\neq i_1\\ k\in I}}p_{i_0k}\right]m_j(n-1) \end{aligned}$$

即 $\qquad m_j(n)\geqslant \varepsilon M_j(n-1)+(1-\varepsilon)m_j(n-1) \qquad (4)$

同理，设当 $i=i_0'$ 时，经 n 步转移到达最大值 $M_j(n)$，当 $i=i_2$ 时，经 $n-1$ 步转移到达最小值 $m_j(n-1)$，于是

$$\begin{aligned} M_j(n) &= p_{i_0'j}^{(n)} = \sum_{k\in I}p_{i_0'k}p_{kj}^{(n-1)} \\ &= \varepsilon p_{i_2j}^{(n-1)}+(p_{i_0'i_2}-\varepsilon)p_{i_2j}^{(n-1)} \\ &\quad + \sum_{\substack{k\neq i_2\\ k\in I}} p_{i_0'k}p_{kj}^{(n-1)}\leqslant \varepsilon m_j(n-1) \end{aligned}$$

$$+\left[p_{i_0' i_2}-\varepsilon+\sum_{\substack{k \neq i_2 \\ k \in I}} p_{i_0' k}\right] M_j(n-1)$$

$$=\varepsilon m_j(n-1)+[1-\varepsilon] M_j(n-1)$$

$$M_j(n) \leqslant \varepsilon m_j(n-1)+(1-\varepsilon) M_j(n-1) \tag{5}$$

(5)式－(4)式得

$$M_j(n)-m_j(n) \leqslant(1-2\varepsilon)\left[M_j(n-1)-m_j(n-1)\right] \tag{6}$$

式(6)是一递推公式，故

$$M_j(n)-m_j(n) \leqslant(1-2\varepsilon)^{n-1}$$

因此当 $n \to \infty$ 时，$M_j(n)$ 和 $m_j(n)$ 趋于同一极限。这就证明了 $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(n)}=\pi$。$\pi$ 是各行均相同的随机矩阵。

（2）设 $m>1$，在这种情况下

$$\lim_{n \to \infty}\left(\mathbf{P}^{(m)}\right)^n=\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(mn)}=\pi$$

又设 $k=1,2,3,\cdots,m-1$，则

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(mn+k)}=\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{P}^{(mn)}=\mathbf{P}^{(k)} \pi$$

在 $\mathbf{P}^{(k)}$ 中各行之和为 1，π 中的任何一列上的元素均相等，因此 $\mathbf{P}^{(k)} \pi=\pi$，即

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(mn+k)}=\pi$$

定理得证。

系（一） P 的极限矩阵 π 满足下列关系：

（1）　$\sum\limits_{i \in I} \pi_i p_{ij}=\pi_j$，$\pi_j>0$，即 $\pi \mathbf{P}=\pi$

（2）　$\sum\limits_{i \in I} \pi_i=1 \qquad (i \in I)$

而且该极限矩阵是唯一能满足上述两关系的矩阵。

证　（1）因 $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(n)}=\pi$

$$=\pi \lim_{n\to\infty} P^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}P = \pi P$$

即
$$\pi = \pi P$$

$$\sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

（2）因为 π 矩阵是转移概率矩阵，所以 $\sum_{i\in I} \pi_i = 1$

（3）证明其唯一性：如果另有一矩阵v也能满足 $v = vP$ 和 $\sum_{i\in I} v_i = 1$，则

$$v = vP = vP \cdot P = vP^{(2)} = \cdots = vP^{(n)}$$

当 $n\to\infty$ 时，$v = v\pi$。因 $\sum_{i\in I} v_i = 1$，且 π 矩阵中 j 列的元素均相等，

故
$$v = v\pi = \pi$$

唯一性得证。

系（二） $\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，即 $\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\}$ 所取的值与起始状态的分布无关。

证
$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i\in I} P\{\xi_n = j/\xi_0 = i\} P\{\xi_0 = i\}$$

$$= \sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} P\{\xi_0 = i\}$$

故
$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} P\{\xi_0 = i\}$$

$$= \sum_{i\in I} \pi_j P\{\xi_0 = i\} = \pi_j \sum_{i\in I} P\{\xi_0 = i\}$$

$$= \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

即经过无穷次转移后处于 j 状态的概率与起始状态无关，与

起始状态的分布无关。

例如，§3 的例一中一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

该矩阵中所有元素 $p_{ij}>0$，满足定理的条件。它的两步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}\,\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.61 & 0.39\\ 0.52 & 0.48\end{pmatrix}$$

四步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(4)}=\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5749 & 0.4251\\ 0.5668 & 0.4332\end{pmatrix}$$

八步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(8)}=\begin{pmatrix}0.5715 & 0.4285\\ 0.5714 & 0.4286\end{pmatrix}$$

从上述的计算结果可以看出 $\mathbf{P}^{(8)}$ 和 $\mathbf{P}^{(4)}$ 十分相近。如果进一步求 $\mathbf{P}^{(16)}=\mathbf{P}^{(8)}\mathbf{P}^{(8)}$，则 $\mathbf{P}^{(16)}$ 和 $\mathbf{P}^{(8)}$ 几乎相同。其次，$\mathbf{P}^{(8)}$ 中每列内的元素也几乎相同。这就说明当 n 增加时，$p_{ij}^{(n)}$ 趋于某一极限值，而且对所有的 i，$i\in I$，$p_{ij}^{(n)}$ 趋于相同的值。

因此，一个有限状态的马尔可夫链，当满足条件 $p_{ij}^{(m)}>0$ (i,j 为任何状态)时，经过一段试验时间后，过程将到达平稳状态，即此后过程取那一个状态的概率不再随时间而变化。

可以想象有大量的质点彼此独立地按同一统计规律运动（如气体分子的运动），若它们都服从马尔可夫链的那些规律，则在长时间运动后，每一状态的所有质点的百分数比率是稳定的，它近似地给出了质点取该状态的概率。这就是概率论中研究的大数定律，即用稳定的相对频率来说明概率。

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 给出了极限概率，它与起始分布无关。

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j=\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n=j\}$$

因此，过程经过长时间的转移以后，各状态的概率趋于稳定。称 π_1，π_2，…，π_j，…为该链的平稳分布。

如果起始状态的分布就是该链的平稳分布，则各次转移后（包括 $n=1$，2，3，…）各状态的分布均为该链的平稳分布。

$n\to\infty$时，不仅马尔可夫链的一维分布趋于平稳分布，而且马尔可夫链的任意的 k 维分布也趋于一极限分布。

设
$$0<n_1<n_2<\cdots<n_k$$

则
$$\begin{aligned}
&P\{\xi(n_1)=j_1,\ \xi(n_2)=j_2,\ \cdots,\ \xi(n_k)=j_k\}\\
&=P\{\xi(n_k)=j_k/\xi(n_{k-1})=j_{k-1}\}\\
&\quad\cdots P\{\xi(n_2)=j_2/\xi(n_1)=j_1\}P\{\xi(n_1)=j_1\}\\
&=p^{(m_{k-1})}(j_k/j_{k-1})p^{(m_{k-2})}(j_{k-1}/j_{k-2})\\
&\quad\cdots p^{(m_1)}(j_2/j_1)P\{\xi(n_1)=j_1\}
\end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned}
m_{k-1}&=n_k-n_{k-1}\\
m_{k-2}&=n_{k-1}-n_{k-2}\\
&\cdots\\
m_1&=n_2-n_1
\end{aligned}$$

当 $n_1\to\infty$，且保持 m_1，m_2，…，m_{k-1} 为常数时

$$\lim_{n_1\to\infty} P\{\xi(n_1)=j_1\}=\pi_{j_1}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_1\to\infty} P\{\xi(n_1)=j_1,\ \xi(n_2)=j_2,\ \cdots,\ \xi(n_k)=j_k\}\\
&=p^{(m_{k-1})}(j_k/j_{k-1})p^{(m_{k-2})}(j_{k-1}/j_{k-2})\\
&\quad\cdots p^{(m_1)}(j_2/j_1)\pi_{j_1}
\end{aligned}\tag{7}$$

上式表明当 $n_1\to\infty$时在时间轴上平移，该链的 k 维分布是不变的。这说明该过程是严平稳过程。

总之，若一个齐次马尔可夫链存在极限分布

$$\pi=(\pi_1\ \ \pi_2\ \ \cdots\ \ \pi_j\ \ \cdots)$$

则当 $n_i\to\infty$时，它的 k 维分布趋于（7）式，可以用 π 和转移概率表示之，即该过程经过长时间转移后趋于一严平稳过程。

对于一个状态空间为可列的马尔可夫链，本节所述的定理和系（一）必须作如下的改变：

（1）或者是所有的 $\pi_i>0$，这时系（一）仍然成立；

（2）或者是所有的 $\pi_i=0$

一个马尔可夫链经过长时间转移进入平稳分布后，j 状态的平均返回时间 $\mu_j=\dfrac{1}{\pi_j}$，故属于情况（1），该链为正常返；属于情况（2）时，该链为零常返。因此可以用 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}$ 的值来判断状态 j 是正常返还是零常返。

状态 j 的特性判别准则可归纳如下：

（1）j 为非常返态 $f_{jj}<1$ 或 $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty}p_{jj}^{(\gamma)}<\infty$　$\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=0$

（2）j 为常返态 $f_{jj}=1$ 或 $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty}p_{jj}^{(\gamma)}=\infty$

其中，正常返态　　$\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}>0$

零常返态　　$\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=0$

与§5 定理四相似，如果$i\leftrightarrow j$，则i，j同为正常返或同为零常返。

由于 i、j 两状态相通，所以存在 $r\geqslant1$，$n\geqslant1$，使$p_{ij}^{(r)}=\alpha>0$、$p_{ji}^{(n)}=\beta>0$。而

$$p_{ii}^{(r+m+n)}\geqslant p_{ij}^{(r)}p_{jj}^{(m)}p_{ji}^{(n)}=\alpha\beta p_{jj}^{(m)}$$

及 $$p_{jj}^{(r+m+n)} \geqslant p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(m)} p_{ij}^{(r)} = \alpha\beta p_{ii}^{(m)}$$

由此可知 $p_{ii}^{(m)}$ 和 $p_{jj}^{(m)}$ 的渐近性质是一致的，即如果 $\lim\limits_{m\to\infty} p_{ii}^{(m)} = 0$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} p_{jj}^{(m)} = 0$，即两者必需同为零常返或同为正常返。

从上面的讨论可知，一个非周期、不可约、有限状态的马尔可夫链是正常返的，它存在一个平稳分布，而平稳分布就是它的极限分布。

只有具有无穷状态的马尔可夫链才有可能是零常返态，此时 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$。

例一 设有一个三状态 {0，1，2} 的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

试求其相应的极限分布。

解 设其极限分布为 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)$

根据 $$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

得 $$0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 = \pi_0 \qquad (1)$$

$$0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 = \pi_1 \qquad (2)$$

$$0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_2 \qquad (3)$$

且 $$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \qquad (4)$$

利用（1）、（2）、（4）求解，得 $\pi_0 = \frac{21}{62}$，$\pi_1 = \frac{23}{62}$，$\pi_2 = \frac{18}{62}$，即不论其起始分布如何，在经过一段时间以后，有 $\frac{21}{62}$ 的时间过程处于 0 状态，有 $\frac{23}{62}$ 的时间过程处于 1 状态，有 $\frac{18}{62}$ 的

时间过程处于 2 状态。

例二 设有一无穷状态 I：{0，1，2，3，…}的齐次马尔可夫链，它的状态传递图见图 2-7。

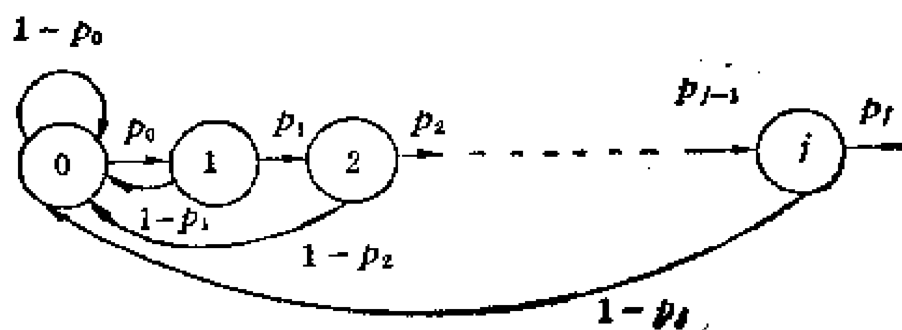


图 2-7

$$p_{01}=p_0 \qquad p_{00}=1-p_0 \qquad p_{0i}=0 \quad (i\neq 0,1)$$

$$p_{12}=p_1 \qquad p_{10}=1-p_1 \qquad p_{1i}=0 \quad (i\neq 0,2)$$

$$p_{23}=p_2 \qquad p_{20}=1-p_2 \qquad p_{2i}=0 \quad (i\neq 0,3)$$

$$\cdots$$

$$p_{j,j+1}=p_j \quad p_{j0}=1-p_j \qquad p_{ji}=0 \quad (i\neq 0,j+1)$$

$$\cdots$$

$$0<p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_j,\ \cdots\leqslant 1$$

试研究状态 0 的特性。

解 先求 $f_{00}^{(n)}$

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0$$

$$f_{00}^{(2)}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1$$

$$\cdots$$

$$f_{00}^{(n)}=p_0p_1\cdots p_{n-2}(1-p_{n-1}) \qquad (n=2,\ 3,\cdots)$$

$$=p_0p_1\cdots p_{n-2}-p_0p_1\cdots p_{n-1}$$

故得
$$\sum_{k=1}^{n}f_{00}^{(k)}=1-p_0p_1\cdots p_{n-1}$$

迟早返回 0 状态的概率 f_{00} 为

$$f_{00}=\sum_{k=0}^{\infty}f_{00}^{(k)}=1-\lim_{n\to\infty}(p_0p_1\cdots p_{n-1})$$

因为 $f_{00}=1$ 是该状态为常返态的条件，所以只有当 $\lim_{n\to\infty}(p_0p_1\cdots p_{n-1})=0$ 时该状态才可能为常返态。

上述条件相当于要求下列非负级数为发散级数，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1}{p_n}=\infty$$

反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1}{p_n}$ 收敛，则该链均为非常返态。

如果 $$p_n=e^{-\frac{1}{n+1}}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1}{p_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$$

该链为常返的。

如果 $$p_n=e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1}{p_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<\infty$$

此时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1}{p_n}$ 收敛，因此当 $p_n=e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}$ 时 0 状态为非常返态。

当 $p_n=e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}$ 时迟早返回状态 0 的概率 f_{00} 为

$$f_{00}=1-\exp\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2}\right\}$$

$$=1-\exp\left\{-\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right]\right\}$$

$$\approx 1-e^{-\frac{\pi^2}{6}}=0.8070$$

例三 无限制随机游动中各状态特性的进一步分析。

§5 例六中已对状态 0 的特性作了初步分析。$p=\frac{1}{2}$，0 状态是常返的；$p\neq\frac{1}{2}$，0 状态是非常返的。

因为 $$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n q^n$$

$$P_{00}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}p^n q^n s^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(pqs^2)^n$$

由于二项的系数有下列恒等关系：

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

$$P_{00}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4pqs^2)^n=(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$$

从而得

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{(n)}=P_{00}(1)=\lim_{s\to 1}P_{00}(s)$$

$$=\lim_{s\to 1}(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$$

因为 $0\leqslant p\leqslant 1$，即 $4pq=4p(1-p)\leqslant 1$，当且仅当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$4pq=1$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 发散，0 状态为常返的。当

$p \neq \frac{1}{2}$时 $4pq<1$，级数 $\sum_{n=0} p_{00}^{(n)}$ 收敛，0 状态是非常返的。

现在要进一步研究如果 $p=\frac{1}{2}$时状态 0 属于正常返还是属于零常返。

当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $P_{00}(s)=(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$

而

$$P_{00}(s)=1+F_{00}(s)P_{00}(s)$$

$$F_{00}(s)=1-\frac{1}{P_{00}(s)}=1-(1-s^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-s^2)^n$$

$$=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2^2\cdot 2!}s^4+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}s^6+\cdots$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}s^{2n}$$

因此 $f_{00}^{(2n-1)}=0$

$$f_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(4)}=\frac{1}{2^2\cdot 2!}=\frac{1}{8}$$

$$f_{00}^{(6)}=\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}=\frac{1}{16}$$

$$f_{00}^{(8)}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}=\frac{5}{128}$$

…

$$f_{00}^{(2n)}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n-1)}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)}\qquad(n\geqslant 2)$$

因为 $F'_{00}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\lim_{s\to 1}\frac{s}{(1-s^2)^{1/2}}=\infty$

虽然返回 0 状态几乎是一定的，但是在返回之前的期望时间却是无穷的，即$\mu_0=\frac{1}{\pi_0}=\infty$，故状态 0 是零常返的，也即当 $p=\frac{1}{2}$时无限制随机游动为零常返的。

例四 设有一具有一个弹性壁的随机游动，它的状态空间为{0，1，2，3，…}，0 为其弹性壁。试对其各状态的特性进行分析讨论。

解 它的状态传递图见图 2-8。其各态均相通。

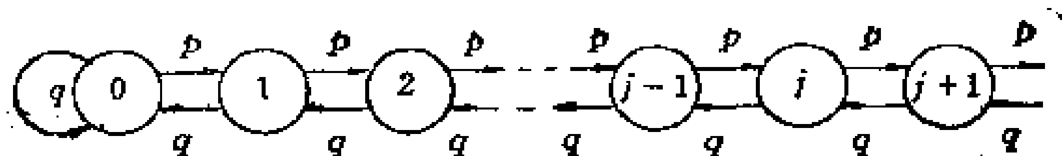


图 2-8

$$\begin{aligned}
&p_{j,j+1}=p && (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\\
&p_{j,j-1}=q && (j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\\
&p_{00}=q && \\
&p_{jk}=0 && (k\neq j+1,\ j-1,\ j\neq 0)\\
&p_{0k}=0 && (k\neq 0,\ 1)
\end{aligned}$$

设该链存在极限分布 $\pi(0)$, $\pi(1)$, $\cdots$, $\pi(j)$, $\cdots$

则 $$q\pi(0)+q\pi(1)=\pi(0)$$

$$p\pi(j-1)+q\pi(j+1)=\pi(j) \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

于是得 $$\pi(1)=\frac{p}{q}\pi(0)$$

$$q\pi(j+1)-p\pi(j)=q\pi(j)-p\pi(j-1) \quad (j=1,2,3,\cdots)$$

即 $$q\pi(2)-p\pi(1)=q\pi(1)-p\pi(0)=0$$

$$\pi(2)=\frac{p}{q}\pi(1)=\left(\frac{p}{q}\right)^2\pi(0)$$

$$q\pi(3)-p\pi(2)=q\pi(2)-p\pi(1)=0$$

$$\pi(3)=\frac{p}{q}\pi(2)=\left(\frac{p}{q}\right)^3\pi(0)$$

$$\cdots$$

$$\pi(j)=\left(\frac{p}{q}\right)\pi(j-1)=\left(\frac{p}{q}\right)^j\pi(0)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=\pi(0)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j=1$$

如果$\left(\frac{p}{q}\right)<1$，则$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j<\infty$，即级数$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j$收敛。因此

$$\pi(0)=\left(1-\frac{p}{q}\right)$$

故当 $p<\frac{1}{2}$ 时该随机游动为正常返的，

$$\pi(j)=\left(\frac{p}{q}\right)^j\left(1-\frac{p}{q}\right) \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

j 状态的平均返回时间为

$$\mu_j = \frac{1}{\pi(j)} = \left(\frac{q}{p}\right)^j \frac{q}{q-p}$$

增大 j，即状态 j 越远离 0 状态，则平均返回时间越大。

当 $p=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{q}=1$ 时，级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j$ 发散。此时随机游动属于零常返，$\pi(j)=0$，$\mu_j=\infty$。

当 $p>q$ 时，无极限分布，各状态均为非常返态。

当 p 从 0 开始逐渐递增，该链在 $p<\frac{1}{2}$ 时属于正常返，$p=\frac{1}{2}$ 时该链为零常返，$p>\frac{1}{2}$ 时该链为非常返。

例五 若马氏链属于艾伦菲斯特模型，试分析其各状态的特性（见 §3 例九）。

解 艾伦菲斯特模型的状态空间 {0，1，2，…，c} 是一有限集合，它的状态传递图见图 2-9。

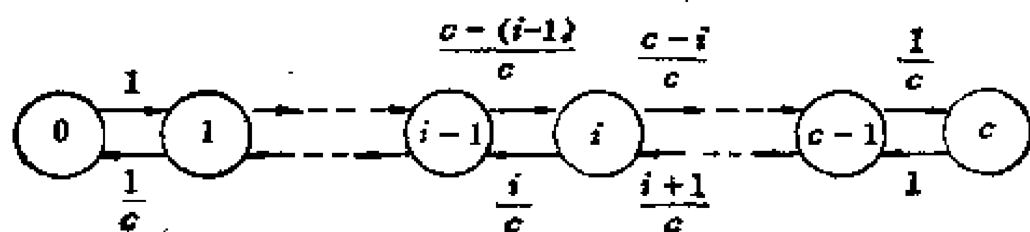


图 2-9

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{c} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ c-1)$$

$$p_{i,i+1} = \frac{c-i}{c} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ c-1)$$

$$p_{01}=1 \qquad\qquad p_{c,c-1}=1$$

它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & 0\\
\frac{1}{c} & 0 & \frac{c-1}{c} & & & & & & & \\
 & \frac{2}{c} & 0 & \frac{c-2}{c} & & & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & & & \frac{i-1}{c} & 0 & \frac{c-(i-1)}{c} & & & & \\
 & & & & \frac{i}{c} & 0 & \frac{c-i}{c} & & & \\
 & & & & & \frac{i+1}{c} & 0 & \frac{c-(i+1)}{c} & & \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & & & & \frac{c-2}{c} & 0 & \frac{2}{c}\\
 & & & & & & & \frac{c-1}{c} & 0 & \frac{1}{c}\\
0 & & & & & & & & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

它的各状态均相通。它是一不可约、有限态的马氏链。若其极限分布为 $\pi=(\pi(0)\ \ \pi(1)\ \ \cdots\ \ \pi(i)\ \ \cdots\ \ \pi(c))$,

根据　　$\pi = \pi \tilde{P}$

得
$$\begin{cases} \frac{1}{c}\pi(1) = \pi(0) \\ \pi(0) \cdot 1 + \frac{2}{c}\pi(2) = \pi(1) \\ \cdots \\ \pi(i-1)\frac{c-(i-1)}{c} + \frac{i+1}{c}\pi(i+1) = \pi(i) \\ \quad = \left(\frac{i}{c} + \frac{c-i}{c}\right)\pi(i) \\ \cdots \\ \frac{1}{c}\pi(c-1) = \pi(c) \\ \sum_{i=0}^{c}\pi(i) = 1 \end{cases}$$

故
$$0 = \frac{1}{c}\pi(1) - \pi(0) = \frac{2}{c}\pi(2) - \frac{c-1}{c}\pi(1) = \cdots$$

$$= \frac{i}{c}\pi(i) - \frac{c-(i-1)}{c}\pi(i-1) = \frac{i+1}{c}\pi(i+1)$$

$$- \frac{c-i}{c}\pi(i) = \cdots = \pi(c) - \frac{1}{c}\pi(c-1)$$

$$\pi(1) = \frac{c}{1}\pi(0)$$

$$\pi(2) = \frac{c-1}{2}\pi(1) = \frac{(c-1)c}{2 \cdot 1}\pi(0) = \binom{c}{2}\pi(0)$$

…

$$\pi(i)=\frac{c-(i-1)}{i}\pi(i-1)$$

$$=\frac{c(c-1)\cdots[c-(i-1)]}{1\cdot 2\cdots i}\pi(0)$$

$$=\binom{c}{i}\pi(0) \qquad (0\leqslant i\leqslant c)$$

所以 $1=\sum_{i=0}^{c}\pi(i)=\pi(0)\left[1+\binom{c}{1}+\binom{c}{2}+\cdots\right.$

$$\left.+\binom{c}{i}+\cdots+\binom{c}{c}\right]=\pi(0)\cdot 2^c$$

$$\pi(0)=\frac{1}{2^c}$$

$$\pi(i)=\frac{1}{2^c}\binom{c}{i} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ c)$$

艾伦菲斯特模型的极限分布(即平稳分布)为二项分布，状态i的平均返回时间为$\mu_i=\frac{1}{\pi(i)}=\frac{2^c}{\binom{c}{i}}$，$0\leqslant i\leqslant c$。对于两个极端状态 $i=0$ 和 $i=c$，$\mu_0=\mu_c=2^c$，当c很大时，这是一个很大的数。由此可见，从状态0出发要回到状态0，其数学期望时间确实很长。但是艾伦菲斯特模型是常返的。

如c为偶数，研究其中间的状态$\frac{c}{2}$。此时

$$\pi\left(\frac{c}{2}\right)=\binom{c}{\frac{c}{2}}\frac{1}{2^c}=\frac{c!}{\left(\frac{c}{2}\right)!\left(\frac{c}{2}\right)!}\frac{1}{2^c}$$

$$\approx\frac{\sqrt{2\pi}\,c^{c+\frac{1}{2}}e^{-c}}{\left[\sqrt{2\pi}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{c}{2}+\frac{1}{2}}e^{-\frac{c}{2}}\right]^2}\frac{1}{2^c}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi c}}$$

状态$\left(\frac{c}{2}\right)$的平均返回时间为$\mu_{\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{c}\approx\sqrt{c}$。显然在艾伦菲斯特模型中，过程主要停留在中间状态$\frac{c}{2}$的附近。由此可以说明，在两个连通的相同容器内，气体分子数大致相同。

例六 在天体物理的研究中，设有一固定体积的空间，在时刻n该体积内有$\xi(n)=i$个质点，经过一单位时间间隔，该体积内的每个质点均有可能离开该体积。一质点离开的概率为α，$0<\alpha<1$，而且每个质点是否离开与其它质点的状况是相互统计独立的。因此单位时间间隔内离开该体积的质点数$\zeta(n)$服从二项分布，其参数为i和α。同时，在$t=n$到$t=n+1$时间内又有新的质点进入该体积，进入该体积的质点数$\eta(n)$服从泊松分布，其参数为λ，$\lambda>0$。而且$\eta(n)$和$\xi(n)$是相互统计独立的。因此在$t=n+1$时刻，体积内的质点数为

$$\xi(n+1)=\xi(n)-\zeta(n)+\eta(n)$$

该式中$\xi(n)$和$\eta(n)$是相互统计独立的，$\zeta(n)$只决定于$\xi(n)$的状态i以及α。因此$\xi(n)$是一齐次马尔可夫链，它的状态

空间为{0, 1, 2, …}。试求其一步转移概率 p_{ij}，并问是否存在极限分布。

解 先求其一步转移概率 p_{ij}。当 $\xi(n)=i$，经过一个单位时间间隔仍留于该体积内的质点数目为 $[\xi(n)-\zeta(n)]=k$ 的概率是

$$P\{\xi(n)-\zeta(n)=k/\xi(n)=i\}=\binom{i}{k}(1-\alpha)^k\alpha^{i-k}$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, i$

若在 $t=n+1$ 时该体积内的质点数为j，则表明在 t 从 n 到 n+1的时间间隔内进入该体积的质点数为 $j-k$。由于进入该体积的质点数服从泊松分布，且 $\eta(n)$ 和 $\xi(n)$ 相互统计独立，故

$$P\{\eta(n)=j-k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}\quad (j=k,\ k+1,\ \cdots)$$

$$P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i\}=p_{ij}$$

$$=\sum_{k=0}^{\min(i,j)}P\{\eta(n)=j-k\}P\{[\xi(n)-\zeta(n)]=k/\xi(n)=i\}$$

上式的求和范围是从 $k=0$ 到 $\min(i, j)$，这是因为 $k\leqslant i$，$j-k\geqslant 0$。

$$p_{ij}=\sum_{k=0}^{\min(i,j)}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}\binom{i}{k}(1-\alpha)^k\alpha^{i-k}$$

$$=e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}\binom{i}{k}(1-\alpha)^k\alpha^{i-k}\right]$$

$(i,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

由上式可知，对于一切 $i,\ j\geqslant 0$，$p_{ij}>0$。

若该链存在极限分布 $\pi(i)$，$i=0, 1, 2, \cdots$，则

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\pi(i)=\pi(j)$$

且
$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi(i)=1$$

可以证明该极限分布（即平稳分布）也服从泊松分布

$$\pi(j)=e^{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}\frac{(\lambda/\alpha)^{j}}{j!}\qquad (j=0,1,2,\cdots)$$

上式可以用代入法验证：

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\pi(i)=\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}\binom{i}{k}\right.$$

$$\left.\cdot(1-\alpha)^{k}\alpha^{i-k}\right]e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{(\lambda/\alpha)^{i}}{i!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\min(i,j)} e^{-\lambda}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{i}}{i!}\ \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$\cdot\frac{i!}{k!(i-k)!}(1-\alpha)^{k}\alpha^{i-k}$$

改变双重求和的先后次序（见图2-10），则

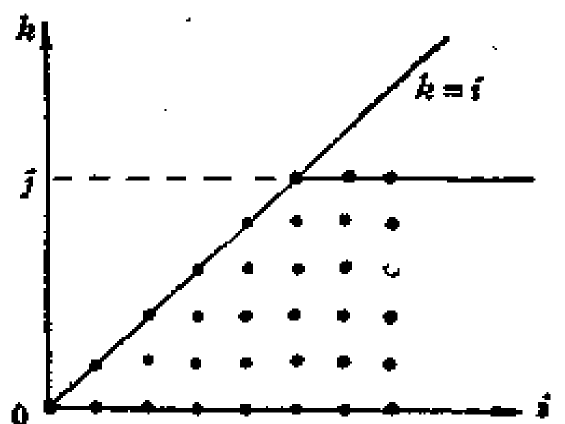


图 2-10

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\pi(i) = \sum_{k=0}^{j}\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i}{i!} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$\cdot \frac{i!}{k!(i-k)!}(1-\alpha)^k\alpha^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} e^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \frac{\lambda^j}{(j-k)!} \frac{1}{k!}(1-\alpha)^k\alpha^{-k}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} e^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k \frac{\lambda^j}{(j-k)!k!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{(j-k)!k!}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k\frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{\lambda^j}{j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{\lambda^j}{j!}\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^j$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!} = \pi(j)$$

因此该链存在极限分布（即平稳分布），

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi(j) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^j}{j!} \quad (j=0,1,2,\cdots)$$

即平稳分布服从泊松分布的规律。

换句话说，不论体积内的始起质点数如何，单位时间内进入该体积的质点数服从泊松分布，体积内的质点数的平稳分布也服从泊松分布，其平均质点数为$\frac{\lambda}{\alpha}$。

注 在上面的讨论中是利用 $\pi P=\pi$ 来获得平稳分布

$\pi=(\pi(0)\ \pi(1)\cdots\pi(j)\cdots)$的。也可以用动态平衡的观点求$\pi$。

如把整个状态空间分为两个状态子集，(1) $I_1\subset I$，(2) $I_2=I-I_1$，即 $I_1\cup I_2=I$，$I_1\cap I_2=\varnothing$，
于是从I_1状态子集内的任一状态进入I_2状态子集内任一状态的概率为

$$P\{I_1\to I_2\}=\sum_{j\in I_2}\sum_{i\in I_1}\pi(i)p_{ij}$$

称$P\{I_1\to I_2\}$为I_1到I_2的概率流。

同理从I_2状态子集进入I_1状态子集的概率为

$$P\{I_2\to I_1\}=\sum_{j\in I_1}\sum_{i\in I_2}\pi(i)p_{ij}$$

不论I_1、I_2是如何分的，根据动态平衡的概念一定有

$$P\{I_1\to I_2\}=P\{I_2\to I_1\}$$

现在来证明这一等式。

因为 $\sum_{i\in I}\pi(i)p_{ij}=\pi(j)\quad(j\in I)$

即 $$\sum_{i\in I_1}\pi(i)p_{ij}+\sum_{i\in I_2}\pi(i)p_{ij}=\pi(j)\quad(j\in I)$$

所以 $$\sum_{j\in I_2}\sum_{i\in I_1}\pi(i)p_{ij}+\sum_{j\in I_2}\sum_{i\in I_2}\pi(i)p_{ij}$$

$$=\sum_{j\in I_2}\pi(j)\quad\sum_{j\in I_1}\sum_{i\in I_1}\pi(i)p_{ij}+\sum_{j\in I_1}\sum_{i\in I_2}\pi(i)p_{ij}$$

$$=\sum_{j\in I_1}\pi(j)$$

上面两式相减得

$$P\{I_1\to I_2\}+\sum_{j\in I_2}\sum_{i\in I_2}\pi(i)p_{ij}-\sum_{j\in I_1}\sum_{i\in I_1}\pi(i)p_{ij}$$

$$-P\{I_2 \to I_1\} = \sum_{j \in I_2} \pi(j) - \sum_{j \in I_1} \pi(j)$$

因为 $\sum_{j \in I_1} p_{ij} + \sum_{j \in I_2} p_{ij} = 1$

故

$$\sum_{j \in I_2} \sum_{i \in I_2} \pi(i) p_{ij} - \sum_{j \in I_1} \sum_{i \in I_1} \pi(i) p_{ij}$$

$$= \sum_{i \in I_2} \sum_{j \in I_2} \pi(i) p_{ij} - \sum_{j \in I_1} \sum_{i \in I_1} \pi(i) p_{ij}$$

$$= \sum_{i \in I_2} \pi(i) \left[1 - \sum_{j \in I_1} p_{ij}\right] - \sum_{j \in I_1} \sum_{i \in I_1} \pi(i) p_{ij}$$

$$= \sum_{i \in I_2} \pi(i) - \sum_{j \in I_1} \sum_{i \in I_2} \pi(i) p_{ij} - \sum_{j \in I_1} \sum_{i \in I_1} \pi(i) p_{ij}$$

$$= \sum_{i \in I_2} \pi(i) - \sum_{j \in I_1} \pi(j) = \sum_{j \in I_2} \pi(j) - \sum_{j \in I_1} \pi(j)$$

于是得 $P\{I_1 \to I_2\} = P\{I_2 \to I_1\}$

所以，可以利用动态平衡的概念求平衡分布π。上述动态平衡的概念，相当于在电路分析中的基尔霍夫定理。

例七 用动态平衡的概念求艾伦菲斯特模型的平稳分布。

解 把$0,1,2,\cdots,i-1$诸状态归为I_1状态子集，而把$i,i+1,\cdots,c$诸状态归为I_2状态子集（见图2-11）。

因为

$$P\{I_1 \to I_2\} = \frac{c-(i-1)}{c} \pi(i-1)$$

$$P\{I_2 \to I_1\} = \frac{i}{c} \pi(i)$$

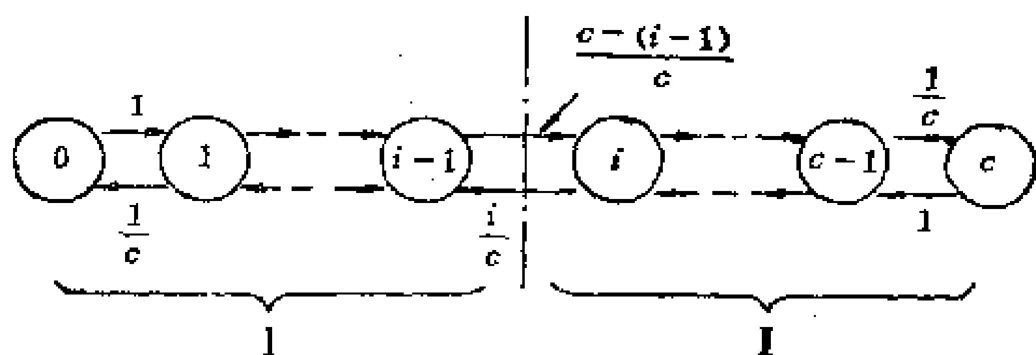


图 2-11

故
$$\frac{c-(i-1)}{c}\pi(i-1)=\frac{i}{c}\pi(i)$$

于是得到递推公式 $\pi(i)=\frac{c-(i-1)}{i}\pi(i-1)\quad(0\leqslant i\leqslant c)$

这就得到了例五给出的结果。由此可见，利用动态平衡的概念求平稳分布是比较简便的方法。

§7 非常返态（滑过态）的分析

从任一个状态进入特定的常返态类的概率以及进入该常返态类所需的时间间隔是我们最感兴趣的问题。

设$\xi(n),n=0,1,2,\cdots$ 是一齐次马尔可夫链，它的状态空间为I。状态空间可按各状态的性质分成几个互不相交的常返态类$\{A_k,k=1,2,\cdots\}$以及所有非常返态所组成的子集I_{tr}，于是

$$I=I_{tr}\cup A_1\cup A_2\cdots \tag{1}$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots=I_{rec} \tag{2}$$

I_{rec}表示所有常返态类组成的子集合，

$$I = I_{tr} \cup I_{rec} \qquad (3)$$

（一）第一个问题是计算从状态 i 出发进入状态子集A_k类的概率$P\{A_k/i\}$。称此概率为A_k的吸收概率。

很明显，如果$i \in A_k$，则$P\{A_k/i\} = 1$ （4）

如果$i \in A_m$，$m \neq k$，则$P\{A_k/i\} = 0$ （5）

如果$i \in I_{tr}$，假定经过一步转移进入状态j，然后再从j状态进入A_k，则得

$$P\{A_k/i\} = \sum_{j \in I} p_{ij} P\{A_k/j\} \qquad (6)$$

(6)式中$P\{A_k/j\}$表示从 j 状态进入A_k的概率。

利用公式(4)、(5)，可将(6)式改写成

$$P\{A_k/i\} - \sum_{j \in I_{tr}} p_{ij} P\{A_k/j\}$$

$$= \sum_{j \in A_k} p_{ij} \quad (i \in I_{tr}) \qquad (7)$$

公式(7)代表了一线性方程组，其中$P\{A_k/i\}$，$i \in I_{tr}$，是未知数。利用这组线性方程组，可计算出$P\{A_k/i\}$。

例一 设有一概率模型，其规定如下：两金属边界中夹有一半导体层，载流子在半导体内漂移。设载流子在xy平面内作对称随机游动（见图2-12）；图中A_1、A_2为两金属导体层，中间层 s 为半导体层；载流子一旦进入A_1或A_2就不再离开，而只在A_1或A_2内游动，所以A_1、A_2实质上就是常返态；当载流子在半导体层内随机游动时，有可能进入A_1或A_2，所以半导体层内的各点均属于非常返态。

由于在x方向上的对称性，因此主要研究质点在y方向上的随机游动。

在y方向上把半导体层分成m个等间隔区，A_1的界面

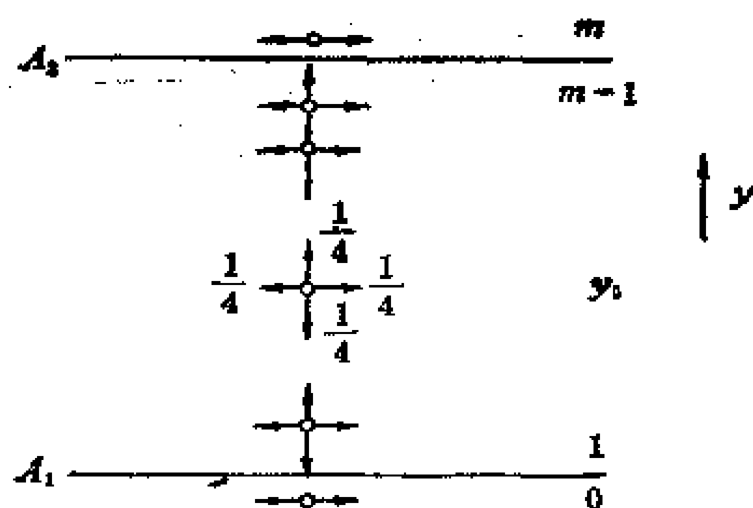


图 2-12

位于 y=0处，A_2 的界面位于 y=m 处。x 方向上同样分成许多等间隔区。质点（载流子）每次作 y 向或 x 向一个间隔的随机游动。

每一时刻载流子在 x、y 平面内的坐标 (j,k) 是质点所处的状态。因此当质点位于金属界面 A_1 时，y坐标为 0，即 A_1：$\{(j,k)\in I,\ k=0\}$；当质点位于金属界面 A_2 时，y的坐标为 m，即 A_2：$\{(j,k)\in I, k=m\}$；当质点位于半导体层内，即处于 I_{tr}：$\{(j,k)\in I,\ 0<k<m\}$ 时，质点作对称性随机游动。故当质点位于 I_{tr} 内时，

$$P\{j\pm1,\ k/j,k\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{j,k\pm1,/j,k\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{x,y/j,k\}=0\ \text{（x,y取其它值时）}$$

当质点的 y 向坐标为 0 或 m 时，

$$P\{x,y/j,0\}=0\quad (x,y\in I_{tr})$$

$$P\{x,y/j,m\}=0\quad (x,y\in I_{tr})$$

设质点的起始状态为(x, y_0)，$0<y_0<m$。求吸收概率 $P\{A_1/x, y_0\}$和$P\{A_2/x, y_0\}$。

解 由于在 x 方向上的对称性，吸收概率 $P\{A_1/x, y_0\}$ 和 $P\{A_2/x, y_0\}$仅与 y_0 有关，而与x的位置无关。

设 $P\{A_2/x, y_0\} = a_{y_0}$ $(y_0 = 1, 2, \cdots, m-1)$

根据(7)式可写出

$$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 = 0 \\ a_k - \frac{1}{4}a_k - \frac{1}{4}a_k - \frac{1}{4}a_{k-1} - \frac{1}{4}a_{k+1} = 0 \\ \qquad (1<k<m-1) \\ a_{m-1} - \frac{1}{4}a_{m-1} - \frac{1}{4}a_{m-1} - \frac{1}{4}a_{m-2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2a_1 = a_2 \\ 2a_k - a_{k-1} = a_{k+1} \quad (1<k<m-1) \\ 2a_{m-1} - a_{m-2} = 1 \end{cases}$$

经过迭代得 $a_2 = 2a_1$

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 3a_1$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 6a_1 - 2a_1 = 4a_1$$

……

$$a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$$

$$a_2 - a_1 = a_1$$

故 $a_k - a_{k-1} = a_{k-1} - a_{k-2} = \cdots = a_2 - a_1 = a_1$

$a_k - a_1 = (k-1)a_1$ 或 $a_k = ka_1$

$$a_{m-2} = (m-2)a_1$$

$$a_{m-1} = 2a_{m-2} - a_{m-3} = (m-1)a_1$$

$$2a_{m-1} - a_{m-2} = 2(m-1)a_1 - (m-2)a_1 = 1$$

所以 $$a_1 = \frac{1}{m} \qquad a_k = \frac{k}{m}$$

即 $$P\{A_2/x, y_0\} = \frac{y_0}{m}$$

同理可得 $$P\{A_1/x, y_0\} = \frac{m - y_0}{m}$$

且 $$P\{A_1/x, y_0\} + P\{A_2/x, y_0\} = 1$$

即载流子经过漂移，最终必然要进入常返态。

（二） 第二个问题是研究从非常返态进入常返态所需时间的数学期望。

若 i 为过程的起始状态，设 T 代表从 i 状态出发进入常返态类所需的时间，并把 T 称为吸收时间，则 T 是一个随机变量，T：$\{0, 1, 2, \cdots\}$。若起始状态 i 位于常返态类中，则 $T = 0$；若马尔可夫链的非常返态有无穷多个，则该过程有可能永远停留在非常返态中。

设 $P\{T = n/i\}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ 表示过程经过n步转移由 i 状态进入常返态类的概率，则

$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} P\{T = n/i\} = P\{T < \infty/i\}$ 代表从状态 i 出发迟早进入常返态类的概率。如果马氏链有无穷多个非常返态，则$P\{T < \infty/i\}$有可能小于一。

$1 - \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} P\{T = n/i\} = 1 - P\{T < \infty/i\}$代表亏值，即过程永远停留在非常返态的概率。

若 $i \in I_{r\cdots}$，即 i 属于常返态类，则

$$\begin{cases} P\{T=0/i\}=1 \\ P\{T>0/i\}=0 \end{cases} \tag{8}$$

对于 $i \in I$,

$$P\{T=n+1/i\}=\sum_{j\in I} P\{T=n/j\}\, p_{ij} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

因此，当 $i \in I_{tr}$ 时有

$$P\{T=1/i\}=\sum_{j\in I_{rec}} p_{ij} \tag{9}$$

$$P\{T=n+1/i\}=\sum_{j\in I_{tr}} P\{T=n/j\}\, p_{ij}$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{10}$$

利用递推公式(10)可以计算出吸收时间的概率分布，而公式(9)是其起始条件。

当然，吸收时间的概率可以利用$f_{ij}^{(n)}$来计算。$f_{ij}^{(n)}$代表经过 n 步转移首次进入 j 状态的概率。由此可得

$$P\{T=n/i\}=\sum_{j\in I_{rec}} f_{ij}^{(n)} \quad (i\in I_{tr}, n=1,2,\cdots) \tag{11}$$

当亏值为0时，可以求出吸收时间的数学期望值$E\{T/i\}$,

$$E\{T/i\}=\sum_{n=1}^{\infty} nP\{T=n/i\} \tag{12}$$

若亏值不是 0 ，说明该过程可能永远停留在非常返态，此时(12)式没有意义。

$E\{T/i\}$也可用下述方法求得：

因 $$P\{T=n+1/i\}=\sum_{j\in I} P\{T=n/j\}\, p_{ij}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

等式两边各乘以 n，则

$$(n+1)P\{T=n+1/i\}-P\{T=n+1/i\}$$

$$=\sum_{j\in I} nP\{T=n/j\}p_{ij}$$

上式两端对 $n=0,1,2,\cdots$ 求和，得

$$E\{T/i\}-\sum_{n=1}^{\infty}P\{T=n/i\}=\sum_{j\in I}E\{T/j\}p_{ij} \tag{13}$$

如 $j\in I_{rec}$，则 $E\{T/j\}=0$。

对于亏值为 0 的马氏链，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{T=n/i\}=1,\ i\in I_{tr},$$

于是(13)式可写成

$$E\{T/i\}-\sum_{j\in I_{tr}}E\{T/j\}p_{ij}=1 \quad (i\in I_{tr}) \tag{14}$$

(14) 式代表一线性方程组，利用它可以算出吸收时间的数学期望。

例二 考虑一个简化的控制系统，系统的状态空间为 I：$\{0,1,2,\cdots\}$，在离散时刻，$n=1,2,\cdots$对系统进行操作。如果系统处于k状态，经过操作，它有一个回到零状态的趋势；但由于某些随机性干扰，下一个状态可能为 j，j 可以为$0,1,2,\cdots,(k-1)$中的任何一个状态，且以等概率取这些状态。因此这一控制过程是一齐次马尔可夫链，其一步转移概率为

$$p_{kj}=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & (j=0,1,2,\cdots,(k-1))\\ 0 & (j\text{为其它值})\end{cases}$$

又设过程一旦到达 0 状态就永远停留在 0 状态，即 0 状态是吸收态，则 $p_{00}=1$，$p_{0j}=0$，$j\neq0$。

若过程的起始状态为k，即 $\xi(0)=k>0$，求吸收时间的数学期望。

解 为了书写简单，令 $E\{T/\xi(0)=k\}=t_k$。根据式(14)

$$E\{T/k\}-\sum_{j\in I_{tr}} E\{T/j\}p_{kj}=1 \quad (i\in I_{tr})$$

可得 $t_k-\frac{1}{k}(t_1+t_2+\cdots+t_{k-1})=1$

于是 $t_2-\frac{1}{2}t_1=1$

$$t_3-\frac{1}{3}(t_1+t_2)=1$$

$$t_4-\frac{1}{4}(t_1+t_2+t_3)=1$$

$$\cdots$$

由题意可知 $t_1=1$，将之代入以上等式求得

$$t_2=1+\frac{1}{2}$$

$$t_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$t_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\cdots$$

故 $E\{T/\xi(0)=k\}=t_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}$

$$(k=1,2,\cdots)$$

习　　题

1. 设$\xi(t)$是一马尔可夫过程，又设$t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots<t_{n+k}$，

试证明　$f_{t_n/t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n/x_{n+1},\cdots,x_{n+k})$

$$=f_{t_n/t_{n+1}}(x_n/x_{n+1})$$

即一个马尔可夫过程的反向也具有马尔可夫性。

2. 试证明对于任何一个马尔可夫过程，如“现在”的$\xi(t)$值为已知，则该过程的“过去”和“将来”是相互统计独立的，即如果有$t_1<t_2<t_3$，其中t_2代表“现在”，t_1代表“过去”，t_3代表“将来”，若$\xi(t_2)=x_2$为已知值，试证明

$$f_{t_1,t_3/t_2}(x_1,x_3/x_2)=f_{t_1/t_2}(x_1/x_2)f_{t_3/t_2}(x_3/x_2)$$

3. 若$\xi(t)$是一马尔可夫过程，$t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}<t_{m+2}$，

试证明　$f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_1,x_2,\cdots,x_m)$
$$=f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_m)$$

4. 若有随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$，且$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$为相互统计独立的随机变量，$\xi_n$的概率密度为

$f_{\xi_n}(x_n)=f_n(x_n)$，$E\{\xi_n\}=0$，$n=1,2,\cdots$。

定义另一随机变量序列$\{\eta_n\}$如下：

$$\eta_1=\xi_1$$
$$\eta_2=\xi_1+\xi_2$$
$$\eta_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\eta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$$

……

试证明：(1)序列$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$具有马尔可夫性；

$$(2)E\{\eta_n/\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1}\}$$
$$=E\{\eta_n/\eta_{n-1}=y_{n-1}\}=y_{n-1}$$

5. 设有随机过程$\xi(n)$，$n=1,2,3,\cdots$，它的状态空间I：$\{x:0<x<1\}$是连续的，它的参数T为离散的，$T=n$，$n=1,2,\cdots$。设$\xi(1)$为(0,1)间均匀分布的随机变量，即$\xi(1)$的概率密度为

$$f_1(x_1)=f_{\xi(1)}(x_1)=\begin{cases}1 & (0<x_1<1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

$\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)$ 的联合概率密度为

$$\begin{cases}f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots x_m)=f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\\ \qquad=\dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_{m-1}} \quad (0<x_m<x_{m-1}\cdots<x_1<1)\\ f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0 \quad (\text{其它}x_i\text{值})\end{cases}$$

(1) 求$\xi(2)$的边际概率密度$f_2(x_2)$；

(2) 试问该过程是否为马尔可夫过程；

(3) 求转移概率密度$f_{2/1}(x_2/x_1)$，……，$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$。

(4) 求$P\{\xi(1)<\frac{3}{4},\xi(3)<\frac{1}{3}\}$。

6. 设有一参数离散、状态连续的随机过程$\xi(n)$，$n=1,2,3,\cdots$，它的状态空间为I：$\{x;x\geqslant0\}$，又$\xi(1)$的概率密度为

$$f_{\xi_1}(x_1)=f_1(x_1)=\begin{cases}e^{-x_1} & (x_1\geqslant0)\\ 0 & (\text{其它}x_1\text{值})\end{cases}$$

$\xi(1)$，$\xi(2)$，$\cdots$，$\xi(m)$的m维联合概率密度为

$$\begin{cases} f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=x_1x_2\cdots x_{m-1} \\ \quad \cdot\exp\{-(x_mx_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\} \\ \qquad (x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_m\geqslant 0) \\ f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0 \quad (\text{其它}x_i\text{值}) \end{cases}$$

（1）求$\xi(2)$的概率密度；

（2）求边际概率密度$f_{1,2,\cdots,m-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$；

（3）说明该过程是马尔可夫过程，并求其转移概率密度$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$。

7．有三个黑球和三个白球。把这六个球任意等分给甲、乙两个袋中，并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0，1，2，3。现每次从甲、乙两袋中各取一球，然后相互交换，即把从甲袋取出的球放入乙袋，把从乙袋取出的球放入甲袋，经过n次交换，过程的状态为$\xi(n)$，$n=1, 2, 3, 4, \cdots$。

（1）试问该过程是否为马尔可夫链；

（2）计算它的一步转移概率矩阵。

8．设$\{\xi(n)\}$是一马尔可夫链，它的状态空间为I：{0，1，2}，它的初始状态的概率分布为$P\{\xi(0)=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{\xi(0)=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{\xi(0)=2\}=\frac{1}{4}$；它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率 $P\{\xi(0)=0,\ \xi(1)=1,\ \xi(2)=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}$。

9． 设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：$\{0,1,2,\}$，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）试求 $P^{(2)}$，并证明 $P^{(2)}=P^{(4)}$；

（2）求 $P^{(n)}$，$n\geqslant 1$。

10． 设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：$\{0,\ 1\}$，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}\quad (0<p<1)$$

试用数学归纳法证明

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

11． 设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：$\{0,\ 1\}$，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}(0<a<1,\ 0<b<1)$$

试求 $P^{(n)}$（利用矩阵的特征值、特征矢量方法计算）

12． 天气预报问题。其模型是：今日是否下雨依 赖 于

前三天是否有雨（即一连三天有雨；前面两天有雨，第三天是晴天；…），问能否把这个问题归纳为马尔可夫链。如可以，问该过程的状态有几个？如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率为 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。求这个马尔可夫链的转移矩阵。

13. 设有马尔可夫链，它的状态空间为I：{0，1}，它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}$，$f_{00}^{(2)}$，$f_{00}^{(3)}$，$f_{01}^{(1)}$，$f_{01}^{(2)}$，$f_{01}^{(3)}$。

14. 设有一个三状态{0，1，2}的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & 0\\ 0 & p_2 & q_2\\ q_3 & 0 & p_3\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}$，$f_{00}^{(2)}$，$f_{00}^{(3)}$，$f_{01}^{(1)}$，$f_{01}^{(2)}$，$f_{01}^{(3)}$。

15. 设有一电脉冲序列，脉冲的幅度是随机的，其幅度的变域为{1，2，3，…，n}，且在变域上均匀分布。现用一电表测量其幅度，每隔一单位时间测量一次，从第一次测量计算起，求仪器记录到最大值n 的期望时间。

16. 确定下列马尔可夫链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移概率矩阵为

(1)

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

（4）

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17． 一质点沿圆周游动。圆周按顺时针、等距排列五个点（0，1，2，3，4，）把圆周分成五格。质点每次游动或顺时针或逆时针移动一格，顺时针前进一格的概率为 p，逆时针转一格的概率为$1-p$。设$\xi(n)$代表经过 n 次转移后质点所处的位置（即状态），$\xi(n)$是一个齐次马尔可夫链。试求：

（1）一步转移概率矩阵；

（2）极限概率分布。

18． 求习题 7 所给出的概率模型的极限分布。

19． 设质点在 xy 平面内的 x 方向或 y 方向上作随机

游动。在 x y 平面上安排着整数点格，质点每次转移只能沿 x 方向往左或往右移一格，或沿 y 方向往上或往下移一格，设这四种转移方式的概率均相等。若质点从（0，0）出发游动，求经过 2n 次转移质点回到(0，0)点的概率，问这种对称的二维的随机游动是常返的、还是非常返的？

20. 设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：{0，1，2，…}，且设当 $|i-j|>1$ 时 $p_{ij}=0$，在其它的 i、j 值时 p_{ij} 是任意的正数，对每个 $j>0$ 必须满足

$$p_{j,j-1}+p_{jj}+p_{j,j+1}=1$$

当 $j=0$ 时，$p_{00}+p_{01}=1$

这类过程可以称为离散参数的生灭过程。求该链为正常返的条件。

21. 设 $\{\xi(n),\ n=1,2,3,\cdots\}$ 是伯努利过程。定义另一随机过程 $\{\eta(n),\ n=1,2,3,\cdots\}$：

如果 $\xi(n)=0$，则 $\eta(n)=0$

如果 $\xi(n)=\xi(n-1)=\cdots=\xi(n-k+1)=1$，而 $\xi(n-k)=0$

则 $\eta(n)=k\ (k=1,2,\cdots,n)$

即 $\eta(n)$ 代表在 n 时和 n 前连续出现 $\xi(m)=1$ 的次数。

（1）试证明 $\eta(n)$ 是一马尔可夫链，并求其一步转移概率；

（2）从零状态出发，经 n 步转移，求首次返回零状态的概率 $f_{00}^{(n)}$ 和 n 步转移概率 $p_{00}^{(n)}$；

（3）该链是常返的还是非常返的？

（4）设 T 代表连续两个 $\eta=0$ 间的时间，则 T 为一随机变量。求 T 的均值和方差。

第三章　马尔可夫过程（II）
——状态离散参数连续的马尔可夫过程

§1　基本概念

在第二章§1中已给出了马尔可夫过程的定义。

在马尔可夫链中最重要的概念是转移概率。同样，在马尔可夫过程中最重要的概念也是转移概率，它是$P\{\xi(t)\in A/s,\ x\}$，其中s，$t\in T$，且$s<t$，A为状态空间的子集。它表明在$\xi(s)=x$的条件下$\xi(t)\in A$的条件概率。特别当$A=(-\infty,\ y)$时有

$$P\{\xi(t)<y/s,x\}=P\{\xi(t)\in A/s,x\}$$
$$=F(s,x;t,y)=F(t,y/s,x)=F_{t/s}(y/x)\qquad(1)$$

称它为转移概率分布。

转移概率分布是一条件概率分布，对y而言它是一个分布函数，因而有

$$F(s,x;t,y)=F_{t/s}(y/x)\geqslant 0\qquad(2)$$
$$F(s,x;t,\infty)=F_{t/s}(\infty/x)=1\qquad(3)$$
$$F(s,x;t,-\infty)=F_{t/s}(-\infty/x)=0\qquad(4)$$

$F(s,x;t,y)=F_{t/s}(y/x)$是关于y的单调不减和左连续函数。

转移概率分布函数$F(s,x;t,y)$也有类似于第二章§2

中所讨论的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式。

考虑三个时刻s、τ、t，$s<\tau<t$，在τ时的状态空间可以分解成无穷多个不相容的子集$(z,z+dz)$。过程由s时的x值到t时转移为小于y的状态子集的事件可视为由s时的x值到τ时转移到区间$(z,z+dz)$，再由τ时的z值到t时转移到小于y的状态子集这许多不相容事件之和。根据全概率公式得

$$\begin{aligned} F(s,x;t,y) &= F_{t/s}(y/x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau,z;t,y)\,d_z F(s,x;\tau,z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{t/}\ (y/z)\,d_z F_{\tau/s}(z/x) \end{aligned} \qquad (5)$$

如果$F(s,x;t,y)$关于y的导数存在，则

$$\begin{aligned} f(s,x;t,y) = f_{t/s}(y/x) &= \frac{\partial}{\partial y} F(s,x;t,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} F_{t/s}(y/x) \end{aligned} \qquad (6)$$

称上式的$f(s,x;t,y)=f_{t/s}(y/x)$为马尔可夫过程的转移概率密度。

反之，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y} f_{(s,x;t,u)}\,du &= \int_{-\infty}^{y} d_u F(s,x;t,u) \\ &= \int_{-\infty}^{y} d_u F_{t/s}(u/x) = F_{t/s}(y/x) \\ &= F(s,x;t,y) \end{aligned} \qquad (7)$$

同时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x;t,y)\,dy = 1 \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,z;t,y) f(s,x;\tau,z)\,dz \\ &= f(s,x;t,y) \end{aligned} \qquad (9)$$

$F(s,x;t,y)$ 当然满足

$$F(s,x;s,y)=\eta(x,y)=\begin{cases}1 & (x<y)\\ 0 & (x\geqslant y)\end{cases} \tag{10}$$

并且还假定其满足连续性条件

$$\lim_{s\to t-0} F(s,x;t,y)=\lim_{t\to s+0} F(s,x;t,y)=\eta(x,y) \tag{11}$$

以上说明了转移概率分布和转移概率密度的一些性质。

在以后的讨论中常常要碰到 $F(s,x;t,y)$ 只依赖于 $t-s$ 而不依赖于 s、t 本身的情况，具有这种特性的马尔可夫过程称为齐次马尔可夫过程。它可表示为

$$F(s,x;t,y)=F(t-s,x;y)=F(\tau,x;y) \tag{12}$$

式中 $\tau=t-s$。该式表示在s时处于x经过 τ 这段时间后过程转移到 $(-\infty,y)$ 内的概率，且该概率与 s 无关。齐次马尔可夫过程的转移概率密度相应地可表示为 $f(\tau,x;y)$。

第二章讨论的是状态和参数都是离散的马尔可夫过程，即马尔可夫链。本章将着重讨论状态离散而参数连续的马尔可夫过程，即纯不连续马尔可夫过程。这类马尔可夫过程的转移概率分布除了应该满足上述的基本性质外，还要求满足下面的条件：

设 $\xi(t)=x$ 时过程在 $(t,t+\Delta t)$ 中以概率 $1-q(t,x)\Delta t+o(\Delta t)$ 留在此状态中，而以概率 $q(t,x)\Delta t+o(\Delta t)$ 发生跳跃，如果发生跳跃则 $\xi(t+\Delta t)$ 的分布由 $Q(t,x;y)+o(1)$ 给出，因此根据全概率公式有

$$F(t,x;t+\Delta t,y)=[1-q(t,x)\Delta t]\eta(x,y)+q(t,x)\Delta t\cdot Q(t,x;y)+o(\Delta t) \tag{13}$$

其中 $q(t,x)$ 称为跳跃率函数或跳跃强度函数，它总是非负

的。$Q(t,x;y)$ 又是一个条件分布函数，因此关于 y 它是单调非降的，而且满足

$$Q(t,x;-\infty)=0 \tag{14}$$

$$Q(t,x;\infty)=1 \tag{15}$$

因为 $Q(t,x;y)$ 是近似描写 $\xi(t)=x$ 在 $(t,t+\Delta t)$ 发生跳跃的条件下 $\xi(t+\Delta t)$ 的分布的，所以 $Q(t,x;y)$ 必需有 $Q(t,x;y)$ 关于 y 在 $y=x$ 连续。

上章§4中已说明了独立增量过程具有马尔可夫性，本章则先从泊松过程讨论。

§2 泊松过程

(一) 计数过程

定义 在 $(0,t)$ 内出现事件 A 的总数所组成的过程 $\{N(t),t\geqslant0\}$ 称为计数过程。

如 $(0,t)$ 内到达某商店的顾客数所组成的过程 $\{N(t),t\geqslant0\}$ 就是一计数过程。

从上述定义出发，任何一个计数过程 $\{N(t),t\geqslant0\}$ 应该满足下列条件：

(1) $N(t)\geqslant0$；

(2) $N(t)$ 是一个正整数；

(3) 如果有两时刻 s、t，且 $s<t$，则 $N(s)\leqslant N(t)$；

(4) 对于 $s<t$，$N(t)-N(s)$ 代表在时间间隔 (s,t) 内出现事件 A 的次数。

在计数过程中，如果在不相交叠的时间间隔内出现事件 A 的次数是相互统计独立的，则该计数过程为独立增量过程。即，如 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，(t_1,t_2) 和 (t_3,t_4) 为两个不相交

叠的时间间隔，在$[t_1,t_2)$内出现事件A的次数为$N(t_2)-N(t_1)$，在$[t_3,t_4)$内出现事件A的次数为$N(t_4)-N(t_3)$，若$[N(t_2)-N(t_1)]$与$[N(t_4)-N(t_3)]$相互统计独立，则$N(t)$为独立增量过程。

平稳增量计数过程的定义　在计数过程中如果在$[t_1,t_1+s)$内出现事件A的次数仅与时间差s有关而与起始时间t_1无关，即$[N(t_1+s)-N(t_1)]$仅与s有关而与t_1无关，则称该过程为平稳增量计数过程。

（二）泊松过程　泊松过程是计数过程，而且是最重要的一类计数过程。

定义　设有一随机的计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$满足下列假设：

（1）从$t=0$起开始观察事件，即$N(0)=0$；

（2）该过程是独立增量过程，即当$0<t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$时，$[N(t_2)-N(t_1)]$、$[N(t_4)-N(t_3)]$是相互统计独立的；

（3）该过程为平稳增量过程；

（4）在$(t,t+\Delta t)$内出现一个事件的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$（当$\Delta t\to 0$时），$\lambda$为一常数；在$(t,t+\Delta t)$内出现事件二次以及二次以上的概率为$o(\Delta t)$，即

$$P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]\geqslant 2\}=o(\Delta t)，$$

则称该计数过程为泊松过程。

定理　泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$在时间间隔$[t_0,t_0+t)$内n次出现事件A的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}$$

$$=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

证　设$P_n(t)=P\{N(t)=n\}$

$$=P\{[N(t)-N(0)]=n\} \quad (1)$$

$[0, t+\Delta t)$可以分为两个不相交叠的时间间隔$[0, t)$、$[t, t+\Delta t)$。

在$(0, t+\Delta t)$内出现k个事件可以等价于下列几个不相容事件之和：(1)在$[0, t)$内出现事件k次，在$[t, t+\Delta t)$内出现事件零次；(2)在$[0, t)$内出现事件$(k-1)$次，在$[t, t+\Delta t)$内出现事件一次；(3)在$[0, t)$内出现事件$(k-2)$次或$(k-2)$次以下，在$[t, t+\Delta t)$内出现事件二次或二次以上。因此根据假设

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)P_0(\Delta t)+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+o(\Delta t)$$

$$=P_k(t)[1-\lambda\Delta t]+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，则 $\frac{dp_k(t)}{dt}+\lambda P_k(t)$

$$=\lambda P_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \cdots) \quad (2)$$

(2)式代表了一系列递推微分方程式。

同理，如果在$[0, t+\Delta t)$内没有出现任何事件，即在$[0, t)$内和$[t, t+\Delta t)$内均不出现任何事件，则

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)$$

$$=P_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，则 $\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t) \quad (3)$

解方程(3)得 $P_0(t)=B_0e^{-\lambda t}$

根据假设　$P_0(t)=P\{N(t)=0\}=P\{[N(t)-N(0)]=0\}$

则　　　　$P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1$

于是　　　$B_0=1$

故　　　　$P_0(t)=e^{-\lambda t}$　　　　(4)

当(2)式中的k = 1 时，

$$\frac{dP_1(t)}{dt}+\lambda P_1(t)=\lambda P_0(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{5}$$

解方程式(5)得　$P_1(t)=e^{-\lambda t}[\lambda t+B_1]$

由于　$P_1(0)=P\{N(0)=1\}=0$

故　　$B_1=0$

$$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t} \tag{6}$$

逐次迭代入(2)式，并利用数学归纳法可得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \tag{7}$$

即　　$P_n(t)=P\{[N(t)-N(0)]=n\}=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$

根据该过程是平稳增量的假设，则

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{8}$$

因此　　$E\{N(t)\}=\lambda t$

即

$$\lambda=\frac{E\{N(t)\}}{t} \tag{9}$$

因此 λ 代表单位时间内事件 A 出现的平均次数。

（三）泊松过程满足§1中提出的对纯不连续马尔可夫过程的要求，即满足对F(s, x; t, y)的要求，当然也满足§1的(13)式。

由于泊松过程是一独立增量过程，故

$$F(t,x;t+\Delta t,y)=P\{\xi(t+\Delta t)<y/\xi(t)=x\}$$

$$=\sum_{z=0}^{k}P\{\xi(t+\Delta t)=z/\xi(t)=x\}$$

$$=\sum_{z=0}^{k}P\{\xi(t+\Delta t)=z,\ \xi(t)=x/\xi(t)=x\}$$

$$=\sum_{z=0}^{k}P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=z-x/\xi(t)=x\}$$

$$=\sum_{z=0}^{k}P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=z-x\}$$

上式中 k 代表满足条件“$r<y$”的最大的正整数。x，z 均为整数。根据泊松过程是一个计数过程，当 $z<x$ 时 $P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=z-x\}$都是零，故当$y\leqslant x$时上式右边的和式中的各项均为零。

当 $y\leqslant x$ 时　$F(t,x;t+\Delta t,y)=0$

当 $y>x$时

$$F(t,x;t+\Delta t,y)=P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=0\}$$
$$+P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=1\}$$
$$+\sum_{r=2}^{k-x}P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=r\}$$

其中第一项代表在$[t,t+\Delta t)$内过程状态不变的概率

$$P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=0\}=e^{-\lambda\Delta t}$$
$$=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

第二项代表在$[t,t+\Delta t)$内过程发生跳跃，且过程恰好转移到状态为$(x+1)$的概率，它等于

$$P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=1\}=\lambda\Delta te^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

第三项代表在$[t,t+\Delta t)$内过程发生跳跃且转移到$(x+1)$之

外其它状态的概率，它是

$$\sum_{r=2}^{k-x} P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=r\} = \sum_{r=2}^{k-x} \frac{(\lambda\Delta t)^r}{r!} e^{-\lambda\Delta t}$$

$$\leqslant \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(\lambda\Delta t)^r}{r!} e^{-\lambda\Delta t} = e^{-\lambda\Delta t}\left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda\Delta t)^r}{r!}\right.$$

$$\left.-1-\lambda\Delta t\right] = 1-e^{-\lambda\Delta t}(1+\lambda\Delta t)$$

$$=1-[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)][1+\lambda\Delta t]$$

$$=1-1+o(\Delta t)=o(\Delta t)$$

这就说明在$[t,t+\Delta t)$内过程发生跳跃的概率为

$$P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]\geqslant 1\} = \lambda\Delta t+o(\Delta t)+o(\Delta t)$$

$$=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

在$[t,t+\Delta t)$内过程发生跳跃的条件下，过程进入状态$x+1$的概率为

$$P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=1/[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]\geqslant 1\}$$

$$=\frac{P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]=1\}}{P\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]\geqslant 1\}}$$

$$=\frac{\lambda\Delta t+o(\Delta t)}{\lambda\Delta t+o(\Delta t)}=1+o(\Delta t)$$

于是可知泊松过程是纯不连续的马尔可夫过程，故相应地有

$$q(t,x)=\lambda$$

$$Q(t,x;y)=\begin{cases}1 & (y>x+1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

而且这时的$q(t,x)$，$Q(t,x;y)$均与t无关，即该过程是齐次的，所以在本节所假设的条件下获得的泊松过程是一齐次的纯不连续的马尔可夫过程。

§3 有关泊松过程的几个问题

（一）各次事件间的时间间隔分布

设泊松过程中第一个A事件的到达时间为T_1，显然T_1是一个随机变量，现在来研究它的分布。

设时间轴上有一点t，事件$\{T_1\geqslant t\}$表示在$[0, t)$内没有出现A事件，则事件$\{T_1\geqslant t\}$和事件$\{N(t)=0\}$是等价的，即

$$P\{T_1\geqslant t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$$

因此T_1的分布函数为

$$F_{T_1}(t)=P\{T_1<t\}=1-P\{T_1\geqslant t\}=1-e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0)$$

T_1的概率密度为

$$f_{T_1}(t)=F'_{T_1}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0)$$

这说明泊松过程中第一个A事件的到达时间T_1的概率密度为负指数分布的密度函数。T_1的平均值为

$$E\{T_1\}=\int_0^{\infty}t\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$$

设T_n代表第$(n-1)$次出现A事件和第n次出现A事件的时间间隔，T_n也是一个随机变量，则有

$$P\{T_2\geqslant t\}=P\{在[T_1,T_1+t)内没有事件发生\}=e^{-\lambda t}$$

$$F_{T_2}(t)=P\{T_2<t\}=1-P\{T_2\geqslant t\}=1-e^{-\lambda t}$$

$$f_{T_2}(t)=F'_{T_2}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0)$$

同理 $$F_{T_n}(t)=1-e^{-\lambda t}$$

$$f_{T_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0)$$

即相邻两次事件间时间间隔的分布是一负指数分布，它的平

均值均为$\frac{1}{\lambda}$。

结论 T_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 具有独立的同分布的概率密度，$f_{T_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，$E\{T_n\}=\frac{1}{\lambda}$。

（二）等待时间的分布

定义 从时间 $t=0$ 开始到达第 n 次 A 事件出现所需的时间称为第n次事件的等待时间，用 S_n 表示之。

由定义可知 $S_n=\sum_{i=1}^{n}T_i=T_1+T_2+\cdots+T_n \quad (n\geqslant 1)$

$T_1, T_2, \cdots, T_n$ 为独立同分布的随机变量，T_i 的特征函数为

$$\Phi_{T_i}(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}e^{jtu}dt=\frac{\lambda}{\lambda-ju}$$

$$\Phi_{s_n}(u)=\left[\Phi_{T_i}(u)\right]^n=\frac{\lambda^n}{(\lambda-ju)^n}$$

$$f_{s_n}(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & (t\geqslant 0)\end{cases}$$

S_n的概率密度为 Γ 分布。

也可以用另一种方法证明 S_n 的分布是 Γ 分布。由于事件$\{S_n<t\}$等价于$[0, t)$内至少出现 n 个 A 事件，即等价于$\{N(t)\geqslant n\}$，故

$$P\{S_n<t\}=F_{s_n}(t)=P\{N(t)\geqslant n\}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad (t\geqslant 0)$$

对上式取导数得

$$f_{s_n}(t)=F'_{s_n}(t)=-\lambda\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$=-\lambda\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}+\lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0)$$

（三）到达时间的条件分布

有泊松过程 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$，如果已知在 $[0,\ t)$ 内有一个 A 事件出现，问这一事件到达时间的分布为何？

$$P\{T_1<s/N(t)=1\}=\frac{P\{T_1<s,N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$=\frac{P\{\text{在}[0,s)\text{内出现 A 事件一次},\text{在}[s,t)\text{内不出现 A 事件}\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$=\frac{P\{\text{在}[0,s)\text{内出现A事件一次}\}P\{\text{在}[s,t)\text{内不出现A事件}\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$=\frac{\lambda se^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda te^{-\lambda t}}=\frac{s}{t}$$

即 $$F_{T_1/N(t)=1}(s)=\frac{s}{t}$$

它的概率密度为 $f_{T_1/N(t)=1}(s)=F'_{T_1/N(t)=1}(s)=\dfrac{1}{t}$

如果已知在$[0,t)$内出现事件A一次，则该事件A的出现时间均匀分布于$[0,t)$内。

由上述结论可作如下推论：

如果一泊松过程中，已知在$[0,t)$内出现n次事件A $(n\geq1)$，则n次A事件的到达时间$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$是一n维独立、同分布的随机变量所组成的顺序统计量，且每一随机变量均匀分布于$[0, t)$内。为了说明这一点作如下分析。

已知在$[0, t)$内有n个A事件发生。在$[0,t)$内选取$t_0=0, t_1, t_2, \cdots, t_{M-1}$点把t分成M个间隔，见图3-1。

设$\tau_M=t-t_{M-1}$，$\tau_m=t_m-t_{m-1}$，……，$\tau_1=t_1-t_0$，

则
$$t=\sum_{m=1}^{M}\tau_m$$

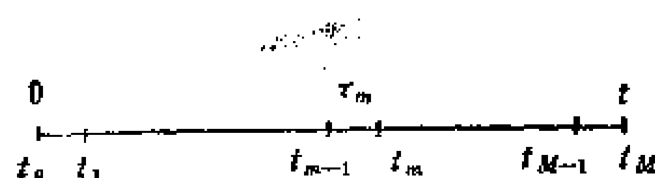


图 3-1

如果有n_1个A事件出现在τ_1内，…，n_m个A事件出现在τ_m内，n_M个A事件出现在τ_M内，则

$$n=\sum_{m=1}^{M}n_m$$

$$P\{n_1,\tau_1;n_2,\tau_2;\cdots;n_M,\tau_M/n,t\}$$
$$=\frac{P\{n_1,\tau_1;n_2,\tau_2;\cdots,n_M,\tau_M\}}{P\{n,t\}}$$

由于泊松过程是独立增量过程，故

$$P\{n_1,\tau_1;n_2,\tau_2;\cdots;n_M,\tau_M\}$$
$$=P\{n_1,\tau_1\}P\{n_2,\tau_2\}\cdots P\{n_M,\tau_M\}$$

$$= \prod_{m=1}^{M} \frac{(\lambda\tau_m)^{n_m}}{n_m!} e^{-\lambda\tau_m}$$

$$P\{n_1, \tau_1; n_2, \tau_2; \cdots; n_M, \tau_M / n, t\}$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{M} \frac{(\lambda\tau_m)^{n_m}}{n_m!} e^{-\lambda\tau_m}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{n!}{t^n} \prod_{m=1}^{M} \frac{(\tau_m)^{n_m}}{n_m!}$$

如果间隔 τ_m 取得很小使 $M>N$，且在 M 个间隔中有 N 个间隔每间隔出现一次 A 事件，而其余$M-N$个间隔不出现A事件，则

$$n = \sum_{m=1}^{M} n_m = N$$

$$P\{n_1, \tau_1; n_2, \tau_2, \cdots; n_M, \tau_M / n = N, t\}$$

$$= \frac{N!}{t^N} \prod_{i=1}^{N} \tau_i \qquad (1)$$

上式中 τ_i 代表有一个事件 A 出现的间隔，共有这样的间隔 N 个，共出现 N 个 A 事件，显然

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_i \leqslant t$$

另一方面，如果有 N 个顺序出现的事件，其出现时间为$w_1 < w_2 < \cdots < w_N$，且按照相互统计独立、均匀分布于$[0, t)$内的随机变量所组成的顺序统计量进行安排，则

$$P\{n_1, \tau_1; n_2, \tau_2; \cdots; n_M, \tau_M / N, t\} = \frac{N!}{t^N} \prod_{i=1}^{N} \tau_i \qquad (2)$$

(1)、(2)的结果是相同的。这说明，已知泊松过程在

〔0，t)内出现 N 个 A 事件，则这些事件的出现时间为 N 个独立同分布随机变量所组成的顺序统计量，且每个随机变量均匀分布于〔0，t）内。

（四）有二个相互统计独立的泊松过程$\{N_1(t), t\geq 0\}$及$\{N_2(t), t\geq 0\}$，它们在单位时间内出现事件的平均数分别为λ_1及λ_2。设$s_1^{(1)}$代表第一过程$\{N_1(t)\}$中出现第一次事件所需的时间。$s_1^{(2)}$代表第二过程$\{(N_2(t)\}$中出现第一次事件所需的时间。现研究第一过程出现第一次事件先于第二过程出现第一次事件的概率，即求$P\{s_1^{(1)}<s_1^{(2)}\}$。

根据本节(一)的结果可知第一过程中出现第一次事件所需时间的概率密度为

$$f(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

第二过程中出现第一次事件所需时间的概率密度为

$$f(y)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

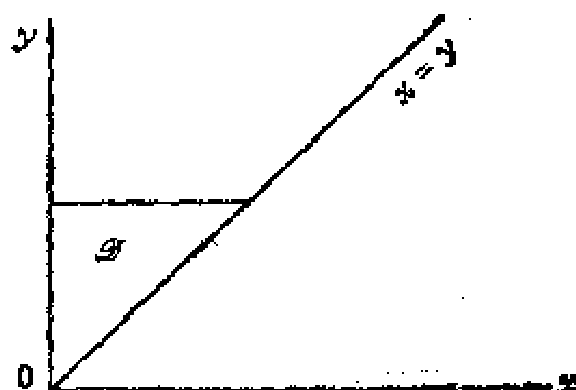


图 3-2

故 $$P\{s_1^{(1)}<s_1^{(2)}\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{（见图 3-2）}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^y \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}dxdy$$

$$=\int_0^\infty (1-e^{-\lambda_1 y})\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,dy$$

$$=1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

（五） $\{N_1(t), t\geqslant 0\}$和$\{N_2(t), t\geqslant 0\}$为两个相互统计独立的泊松过程。它们在单位时间内事件出现的平均数分别为λ_1及λ_2。现求第一过程出现第k次事件先于第二过程出现第一次事件的概率，即求$P\{s_k^{(1)}<s_1^{(2)}\}$。其中$s_k^{(1)}$代表第一过程出现第k次事件所需的时间，$s_k^{(1)}$的概率密度为

$$f(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$s_1^{(2)}$代表第二过程出现第一次事件所需的时间，它的概率密度为

$$f(y)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

见图 3-3，得

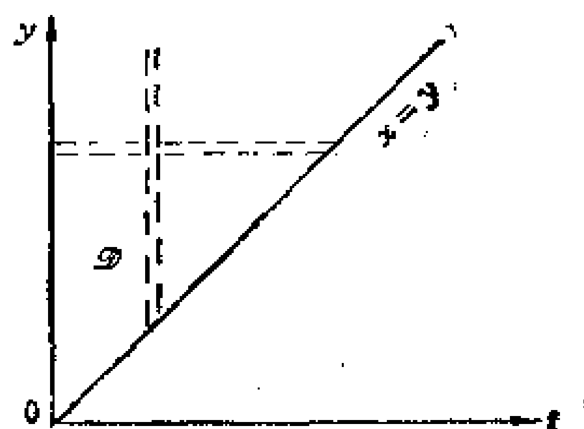


图 3-3

$$P\{s_k^{(1)}<s_1^{(2)}\} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\infty\int_x^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\cdot\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}dy\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}dx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

§4 非齐次泊松过程

非齐次泊松过程是§ 2 定义的泊松过程的推广。

定义 计数过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$满足下列假设：

① $N(0)=0$

② $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$是一独立增量过程

③ $P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]\geqslant 2\}=o(\Delta t)$

④ $P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=1\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$

则称它为非齐次泊松过程。

可以利用§ 2 （三）中的方法说明非齐次泊松过程符合§1 的(13)式，其跳跃强度函数$q(t,x)=\lambda(t)$是时间的函数。

$$Q(t,x;y)=\begin{cases}1 & (y>x+1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

如果$\lambda(t)=\lambda$（常数），则该过程就是通常的泊松过程。

定理 满足上述四个假设的非齐次泊松过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$在时间间隔$[t_0,\ t_0+t)$内出现事件A n 次的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}$$

$$= \frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^n}{n!} e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]} \quad (n \geqslant 0)$$

式中
$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

上式表明 $P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}$ 不仅是 t 的函数，也是 t_0 的函数。

证 证明方法和§ 2 定理的证明方法相似。

设 $P_n(t,t_0) = P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}$

则 $P_0(t+\Delta t, t_0) = P\{[N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0)]=0\}$

$= P\{$在$[t_0, t_0+t)$内无事件发生，在$[t_0+t, t_0+t+\Delta t)$内无事件发生$\}$

$= P\{$在$[t_0, t+t)$内无事件发生$\} \cdot P\{$在$[t_0+t, t_0+t+\Delta t)$内无事件发生$\}$

$= P_0(t,t_0)[1-\lambda(t_0+t)\Delta t + o(\Delta t)]$

$$\therefore \frac{P_0(t+\Delta t, t_0)-P_0(t,t_0)}{\Delta t}$$

$$= -\lambda(t_0+t)P_0(t,t_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，并利用 $P_0(0,t_0)=1$ 的起始条件，则得

$$\frac{dP_0(t,t_0)}{dt} = -\lambda(t_0+t)P_0(t,t_0)$$

$$\ln P_0(t,t_0) = -\int_0^t \lambda(t_0+u)du = -\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(s)ds$$

故 $P_0(t,t_0) = e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$

同理 $P_n(t+\Delta t, t_0) = P\{[N(t_0+t+\Delta t) - N(t_0)]=n\}$

$= P\{$在$[t_0, t_0+t)$内出现 n 事件，在$[t_0+t, t_0$

$+t+\Delta t)$内出现 0 事件$\}$

$+P\{$在$[t_0, t_0+t)$内出现$(n-1)$事件，在$[t_0+t, t_0+t+\Delta t)$内出现 1 事件$\}$

$+P\{$在$[t_0, t_0+t)$内出现$(n-2)$及少于$(n-2)$次事件，在$[t_0+t, t_0+t+\Delta t)$内至少出现 2 事件$\}$

$$= P_n(t, t_0)[1-\lambda(t_0+t)\Delta t+o(\Delta t)]$$

$$+P_{n-1}(t, t_0)[\lambda(t_0+t)\Delta t]+o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t, t_0)-P_n(t, t_0)}{\Delta t} = -\lambda(t_0+t)P_n(t, t_0)$$

$$+\lambda(t_0+t)P_{n-1}(t, t_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，则 $\frac{dP_n(t, t_0)}{dt} = -\lambda(t_0+t)P_n(t, t_0)$

$$+\lambda(t_0+t)P_{n-1}(t, t_0)$$

$n=1$时，$\frac{dP_1(t, t_0)}{dt}+\lambda(t_0+t)P_1(t, t_0)$

$$=\lambda(t_0+t)P_0(t, t_0)$$

$$=\lambda(t_0+t)e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$$

$$\times\frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t\lambda(t_0+u)du}\cdot P_1(t, t_0)\right]$$

$$=\lambda(t_0+t)e^{\int_0^t\lambda(t_0+u)du}\cdot e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$$

$$=\lambda(t_0+t)$$

因 $P_1(0, t_0)=0$

故 $e^{\int_0^t(\lambda t_0+u)du}\cdot P_1(t, t_0)=\int_0^t\lambda(t_0+u)du$

$$=\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds=m(t_0+t)-m(t_0)$$

即 $P_1(t_1, t_0) = [m(t_0+t) - m(t_0)]e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$

经过逐次迭代，并利用数学归纳法可得

$$P_n(t, t_0) = P\{[N(t_0+t) - N(t_0)] = n\}$$

$$= \frac{[m(t_0+t) - m(t_0)]^n}{n!}$$

$$\times e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]} \quad (n \geqslant 0)$$

由于在非齐次泊松过程中取消了平稳增量的条件，在使用上比较方便。

例 某镇有一小商店，每日晨8时开始营业，从晨8.00到11.00平均顾客到达率线性增加，在8.00顾客平均到达率为5人/小时，11.00到达率达最高峰20人/小时。从上午11.00到下午1.00，平均顾客到达率维持不变，为20人/小时。从下午1.00到5.00，顾客到达率线性下降，到下午5.00顾客到达率为12人/小时。假设在不相交叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互统计独立的，问在上午8.30—9.30间无顾客到达商店的概率为多少？在这段时间内到达商店的顾客数学期望为多少？

解 图3-4给出了顾客到达率对时间的关系曲线。设晨8.00为 $t=0$，则晨11.00为 $t=3$，下午1.00为 $t=5$，下午5.00为 $t=9$。由于下午5.00到翌日晨5.00商店不营业，因此第二天8.00可以为 $t=9$。于是可得一周期性函数，周期为9。

顾客到达率 $\lambda(t)$ 的关系式可表示为

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5+5t & (0 \leqslant t \leqslant 3,\ \text{上午 } 8.00\text{—}11.00) \\ 20 & (3 \leqslant t \leqslant 5,\ \text{上午} 11.00\text{—下午} 1.00) \\ 20-2(t-5) & (5 \leqslant t \leqslant 9,\ \text{下午 } 1.00\text{—}5.00) \end{cases}$$

且 $$\lambda(t) = \lambda(t-9)$$

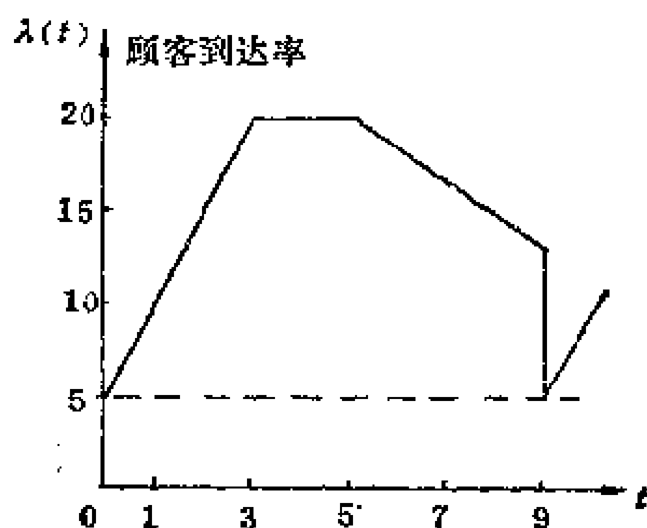


图 3-4

根据题意，该过程是一非齐次泊松过程。

$$m\left(\frac{3}{2}\right)-m\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\lambda(s)\,ds=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(5+5s)\,ds$$

$$=5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=5+5=10$$

故在 8.30—9.30 间无顾客到达商店的概率为

$$e^{-[m(3/2)-m(1/2)]}=e^{-10}$$

在 8.30—9.30 间到达商店的顾客数学期望值为

$$\left[m\left(\frac{3}{2}\right)-m\left(\frac{1}{2}\right)\right]=10\text{人。}$$

§5 复合泊松过程

定义 设有泊松过程$\{N(t);t\geqslant 0\}$和一族独立同分布随机变量$\{Y_n\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，且$\{N(t)\}$和$\{Y_n\}$也是相互统计独立的。设随机过程$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$，$t\geqslant 0$，则称$\{X(t)\}$是复合泊松过程。

如果$Y_n\equiv 1$，则$X(t)=N(t)$，$X(t)$就是通常的泊松过程。

例如，到达体育场的公共汽车数是一泊松过程，而每辆公共汽车内所载的乘客数是一随机变量。若各辆公共汽车内的乘客数服从相同分布，且又彼此统计独立，各辆车的乘客数和车数$N(t)$又是统计独立的，则到达体育场的总人数是$\{X(t), t\geqslant 0\}$是一复合泊松过程。

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$$

其中Y_n代表第n辆车内的乘客数，$N(t)$代表$[0, t)$内到达体育场的公共汽车数。

可采用母函数法研究复合泊松过程。设随机变量Y_n的母函数为$F(s)$，泊松过程$\{N(t)\}$的母函数为$G(s)$，$G(s)=e^{\lambda t(s-1)}$，λ为泊松过程$\{N(t)\}$的参数，于是$X(t)$的母函数为$G[F(s)]=e^{\lambda t[F(s)-1]}$。由此可计算出$X(t)$的数学期望和方差：

$$E\{X(t)\}=(\lambda t)E\{Y_n\}$$

$$\begin{aligned}D\{X(t)\}&=E\{N(t)\}DY_n+D\{N(t)\}(E\{Y_n\})^2\\&=(\lambda t)DY_n+(\lambda t)[E(Y_n)]^2\end{aligned}$$

$$= (\lambda t) E\{Y_n{}^2\}$$

例 设移民到某地区定居的户数是一泊松过程，平均每周有2户定居，即$\lambda = 2$。如果每户的人口是一随机变量，一户四人的概率为$\frac{1}{6}$，一户三人的概率为$\frac{1}{3}$，一户二人的概率为$\frac{1}{3}$，一户一人的概率为$\frac{1}{6}$，并且每户的人口数是相互统计独立的随机变量。求在五周内移民到该地区人口的数学期望及其方差。

解 设Y_n代表第n户的人口数，$X(t)$代表移民总人口数，

则
$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

$$E\{Y_n\} = 4 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

$$E\{Y_n^2\} = 4^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

所以
$$E\{X(5)\} = (\lambda t) E\{Y_n\} = 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25 (\text{人})$$

$$D\{X(t)\} = (\lambda t) E\{Y_n^2\} = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$

复合泊松过程还能处理另一类问题。设有一泊松过程$\{N(t), t \geqslant 0\}$，它的参数为λ。如果把过程中出现的事件A按其性质分成不同性质、互不相容的两种类型A_1型事件和A_2型事件，而且当每次A事件出现时，出现A_1型的概率为p，出现A_2型的概率为q，$p + q = 1$，各次出现A_1或

A_2是相互统计独立的。于是组成了两个计数过程，即出现 A_1 型事件的计数过程$\{N_1(t), t\geqslant0\}$和出现 A_2 型事件的计数过程 $\{N_2(t), t\geqslant0\}$，且 $N_1(t)+N_2(t)=N(t)$。

如果出现 A_1 型事件用 $\eta=1$ 表示，出现 A_2 型事件用 $\eta=0$ 表示，则 $N_1(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{N(t)}$。$N_1(t)$ 是随机个随机变量之和。$N(t)$是泊松分布，它的母函数为 $G_{N(t)}(s)=e^{\lambda t(s-1)}$。$\eta$ 是(0, 1)分布，它的母函数为$F_\eta(s)=ps+q$。因此 $N_1(t)$ 的母函数为

$$H_{N_1(t)}(s)=G_{N(t)}[F(s)]=e^{\lambda t(ps+q-1)}=e^{\lambda pt(s-1)}。$$

因此 $\{N_1(t), t\geqslant0\}$ 也是一泊松过程，但它的参数为 λp。同理$\{N_2(t), t\geqslant0\}$也是一泊松过程，它的参数为 λq。

例如，在[0, t)内进入某商店的顾客人数服从泊松分布。顾客有男女之分，若每次进入该商店的顾客中，男顾客出现的概率为 p，女顾客出现的概率为 q，则在 [0, t) 内进入商店的男顾客数和女顾客数均服从泊松分布。

§6 过滤的泊松过程

设有一泊松分布的冲激脉冲串经过一线性时不变滤波器，则滤波器输出是一随机过程$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$。

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}h(t-U_i) \qquad (1)$$

式中 $h(t)$代表滤波器的冲激响应，U_i 代表第 i 个冲激脉冲出现的时间，$N(T)$代表在[0, T)内进入到滤波器输入端冲激脉冲的个数，它服从泊松分布，

即 $$P\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T} \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

λ 代表单位时间内的平均脉冲数。

根据§3的分析可知，若在〔0, T）内进入到滤波器输入端的脉冲数 N(T) 为k，则该 k 个脉冲出现的时间均为独立同分布的随机变量，且该随机变量均匀分布于〔0,T）内，即

$$f_{(\tau_i|N(T)=k)}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (0\leqslant u<T)\\ 0 & (\text{其它}U\text{值})\end{cases} \qquad (2)$$

称(1)式所代表的随机过程 $\xi(t)$ 为过滤的泊松过程。

（一）在温度限制的二极管中，由散弹效应引起的散弹噪声电流是过滤的泊松过程。

在晶体管中有三种类型的噪声：(1)热噪声；(2)散弹噪声；(3)闪烁噪声（又称$\frac{1}{f}$噪声，是一种低频噪声）。晶体管的散弹噪声的机理和电子管内散弹噪声的机理是相同的，它们都是过滤的泊松过程。

下面用温度限制的二极管作为例子进行分析。

（1）从阴极发射的电子数是一个计数过程，而且又满足泊松分布的四个假设，因此在〔0, t)内从阴极发射的电子数是符合泊松分布的。

（2）研究在没有空间电荷的条件下，一个发射电子从阴极发射后、到达板极前、在电路内引起的电流脉冲波形。设该电流脉冲为 $i(t)$。

为了简便，假定二极管为平板型二极管，极间距离为 d，板极对阴极的电位差为 V_a，见图 3-5。如果电子处于空间 B 点，B 点对阴极的距离为 x，则 B 点的场强为 $E_B=-\frac{V_a}{d}$，B 点的电位为 $V_B=\frac{V_a}{d}x$。

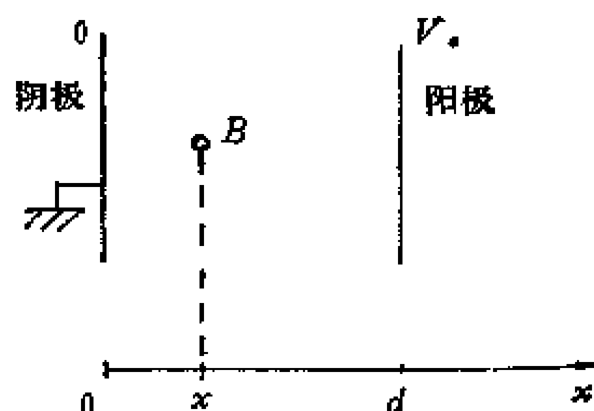


图 3-5

电子从阴极到达 B 点所获得的动能为

$$U = q_e V_B = q_e \frac{V_a}{d} x$$

作用在电子上的力为 $f = -q_e E_B = q_e \frac{V_a}{d}$，其中 q_e 为电子电荷。

如果忽略电子逸出阴极时的初速度，则电子飞抵 B 点时的速度为

$$v = \frac{q_e V_a}{md} t$$

式中 m 代表电子的质量，t 代表电子从阴极出发到达 B 点所需的时间。因而 t 应该满足下列方程式

$$x = \frac{1}{2} \frac{q_e V_a}{md} t^2$$

如果电子从阴极出发到达板极的渡越时间为 τ_a，则

$$\tau_a = \left(\frac{2m}{q_e V_a}\right)^{\frac{1}{2}} d \quad 或 \quad \frac{q_e V_a}{m} = 2\left(\frac{d}{\tau_a}\right)^2$$

于是 $$v=2\left(\frac{d}{\tau_a}\right)^2\frac{1}{d}\,t=2\frac{d}{\tau_a^2}t$$

电子在空间渡越时所获得的动能是由电源 V_a 所供给的，它相当于在板极上出现电荷 q 所做的功，故

$$qV_a=U=q_e\frac{V_a}{d}x$$

即 $$q=q_e\frac{1}{d}x$$

故在 t 时的板流为

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{q_e}{d}\frac{dx}{dt}=\frac{q_e}{d}v=2q_e\frac{t}{\tau_a^2}$$

即 $$i(t)=\begin{cases}2q_e\dfrac{t}{\tau_a^2} & (0\leqslant t\leqslant\tau_a)\\ 0 & (\text{其它时刻})\end{cases} \tag{3}$$

（3）因此温度限制二极管的板流为

$$I(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}i(t-U_i)\qquad(t<T) \tag{4}$$

其中函数 i(t) 由（3）式给出，U_i 为第 i 个电子的发射时刻，它是均匀分布在 (0, T) 内的随机变量。比较（4）、（1）两式知（4）式为（1）式的特定形式，因此温度限制二极管的噪声电流是一过滤的泊松过程。

散弹噪声电流是由大量微小的窄脉冲电流之和所组成的，而每一个电流脉冲则是由一个电子渡越空间时在电路内形成的。

同理，晶体管内的散弹噪声电流也是由大量微小的窄脉冲电流之和所组成的，而每一个电流脉冲则是由一个电子或一个空穴渡过结耗尽层时在电路内形成的。

（二） 下面研究由（1）式所表示的过滤的泊松过程的统计特性。

在研究该问题时假定 T 比 h(t) 的脉冲持续时间 τ_s 大得多，即 $T \gg \tau_s$，h(t)是具有因果性的滤波器响应。还假定被研究的时刻 t 大于 τ_s，即忽略边缘效应。

（1） ξ(t)的统计平均值

$$E\{\xi(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E_{U_i}\{\xi(t)/N(T)=k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E_{U_i}\left\{\sum_{i=1}^{k} h(t-U_i)\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\}\left\{\sum_{i=1}^{k} E_{U_i}[h(t-U_i)]\right\}$$

式中 $E_{U_i}\{\xi(t)/N(T)=k\}$ 代表在 $N(T)=k$ 的条件下 ξ(t)对随机变量 U_i 的条件平均值。因 U_i 是彼此统计独立、且同是[0, T)内均匀分布的随机变量，故

$$E_{U_i}[h(t-U_i)] = \frac{1}{T}\int_0^T h(t-U_i)\,dU_i$$

设 $$t-U_i=y$$

则 $$E_{U_i}[h(t-U_i)] = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} h(y)\,dy$$

根据假定 $t>\tau_s$，$T \gg \tau_s$，$t<T$

则 $$E_{U_i}[h(t-U_i)] = \frac{1}{T}\int_0^T h(y)\,dy$$

$$E\{\xi(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \lambda T = \lambda \int_0^T h(y)dy \qquad (5)$$

例 求温度限制二极管的散弹噪声 $I(t)$ 的统计平均值。

解 $$E\{I(t)\} = \lambda \int_0^t i(t)dt$$

由(3)式 $$\int_0^T i(t)dt = \int_0^{\tau_a} 2q_e \frac{t}{\tau_a^2} dt = q_e$$

所以 $$E\{I(t)\} = \lambda q_e \qquad (6)$$

式中 λ 代表单位时间内发射的平均电子数，q_e 代表电子电荷，$E\{I(t)\}$ 代表电流的平均值。

(2) $\xi(t)$的相关函数 $R_{\xi\xi}(t, t+\tau)$

$$R_{\xi\xi}(t, t+\tau) = E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-U_i) \sum_{j=1}^{N(T)} h(t+\tau-U_j)\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} \sum_{j=1}^{N(T)} h(t-U_i) h(t+\tau-U_j)\right\}$$

$$(t<T, \ t+\tau<T)$$

利用条件平均，上式可写成

$$R_{\xi\xi}(t, t+\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big\{P(N(T)=k) E_{U_i U_j}$$

$$\Big[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} h(t-U_i) h(t+\tau-U_j)\Big]\Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big\{P[N(T)=k] \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} E_{U_i U_j}$$

$$\cdot\left[h(t-U_i)h(t+\tau-U_j)\right]\Big\}$$

上式 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}E_{U_iU_j}\left[\quad\right]$ 中共有 k^2 项，其中 k 项 $i=j$，(k^2-k) 项 $i\neq j$。设 $t-U_i=y$，$t>\tau_a$，$T>t$。

对于 $i=j$ 的 k 项，其每一项为

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(t-U_i)h(t+\tau-U_i)dU_i$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} h(y)h(y+\tau)dy$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{t} h(y)h(y+\tau)dy$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T} h(y)h(y+\tau)dy$$

对于 $i\neq j$ 的 (k^2-k) 项，其每一项为

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(t-U_i)dU_i\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(t+\tau-U_j)dU_j$$

$$=\left(\frac{1}{T}\right)^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

于是 $$R_{ff}(t,t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)$$

$$\cdot h(y+\tau)dy+\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}(k^2-k)$$

$$\cdot\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2$$

$$=\frac{E\{N(T)\}}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy$$

$$+\frac{E\{[N(T)]^2-[N(T)]\}}{T^2}\left[\int_0^t h(y)dy\right]^2$$

而 $E\{N(T)\}=\lambda T$

$E\{[N(T)]^2-[N(T)]\}=\lambda T+(\lambda T)^2-\lambda T=(\lambda T)^2$

故 $$R_{\xi\xi}(t,\ t+\tau)=\lambda\int_0^t h(y)h(y+\tau)dy$$

$$+\lambda^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2 \tag{7}$$

$$C_{\xi\xi}(t,\ t+\tau)=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy$$

$$=C_{\xi\xi}(\tau) \tag{8}$$

例 求温度限制二极管中板流 I(t)的相关函数、自协方差函数及方差。

解 I(t)的相关函数为

$$R_{II}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^t i(t)i(t+\tau)dt+(\lambda q_e)^2 \tag{9}$$

I(t)的自协方差函数为

$$C_{II}(t,\ t+\tau)=\lambda\int_0^t i(t)i(t+\tau)dt \tag{10}$$

I(t)的方差为 $\mathrm{Var}\{I(t)\}=\lambda\int_0^t i^2(t)dt$ (11)

(3) $\xi(t)$的特征函数 $\Phi_{\xi_t}(v)$

$$\Phi_{\xi_t}(v)=E\{e^{jv\xi(t)}\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P[N(T)=k]E_{U_i}\{e^{jv\xi(t)}/N(T)=k\}$$

$$
=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E_{U_i}\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-U_i)\right]\right\}
$$

$$
=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\prod_{i=1}^{k}E_{U_i}\left\{\exp\left[jvh(t-U_i)\right]\right\}
$$

上面最后一个等式成立是因为 U_1, U_2, …, U_i, …, U_k 是相互统计独立的随机变量。

设 $y=t-U_i$，则

$$
E_{U_i}\{\exp[jvh(t-U_i)]\}
$$

$$
=\frac{1}{T}\int_0^T\exp[jvh(t-U_i)]dU_i
$$

$$
=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp[jvh(y)]dy
$$

$$
\Phi_{\xi_t}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}
$$

$$
\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp[jvh(y)]dy\right\}^k
$$

$$
=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp[jvh(y)]dy\right\}^k
$$

$$
=e^{-\lambda T}\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\exp[jvh(y)]dy\right\}
$$

$$
=\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\left[\exp\Big(jvh(y)\Big)-1\right]dy\right\}
$$

由于 $h(y)$ 是因果性系统的冲激响应，且其持续时间 $\tau_a\ll T$，同时已假定边缘效应可以忽略，即认为 $t>\tau_a$，因此在 $(t-T,0)$ 内以及在 (t,T) 内 $h(y)=0$，$\exp(jvh(y))-1=0$，故上式可以改写为

$$\Phi_{\xi_t}(v) = \exp\left\{\lambda\int_0^t [\exp(jvh(y)) - 1]dy\right\} \quad (12)$$

从(12)式可以看到$\xi(t)$的特征函数不再是t的函数，也就是说$\xi(t)$的概率密度不再是t的函数了。称这类过程为一级严平稳过程，同理也可以证明$\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$的联合概率密度仅是时间差$t_2-t_1$，$t_3-t_2$，…，$t_n-t_{n-1}$的函数。把具有这种性质的过程称为严平稳过程。过滤的泊松过程就是一严平稳过程。

（4）研究当$\lambda\to\infty$时，特征函数的极限表示式。

从(12)式 $\quad [\Phi'_{\xi_t}(v)]_{v=0} = j\lambda\int_0^t h(y)dy$

即

$$E\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^t h(y)dy$$

同理可得

$$Var\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^T [h(y)]^2dy$$

这一结论和（1）、（2）两段中所得结果是一致的。

设 $\quad \alpha = \int_0^t h(y)dy \qquad \beta^2 = \int_0^t [h(y)]^2dy$

则 $\quad E\{\xi(t)\} = \lambda\alpha \qquad Var\{\xi(t)\} = \lambda\beta^2$

设

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - \lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}$$

$\eta(t)$是一随机过程，$E\{\eta(t)\} = 0$

$$Var\{\eta(t)\} = 1$$

故$\eta(t)$是$\xi(t)$经过归一化的随机过程。$\eta(t)$的特征函数为

$$\Phi_{\eta_t}(v) = E\{e^{jv\eta(t)}\}$$

$$= E\left\{\exp\left[jv\frac{\xi(t) - \lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-jv\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\beta}\right\} E\left\{\exp\left[j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}\xi(t)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-jv\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\beta}\right\}\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\right.\right.$$

$$\left.\left.\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy\right\}$$

故 $$\ln\Phi_{n_t}(v) = -jv\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\beta}$$

$$+\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy$$

$$= -jv\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\frac{jv}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)-\frac{v^2}{2\lambda\beta^2}h^2(y)\right.$$

$$\left.-\frac{jv^3}{6\lambda^{3/2}\beta^3}h^3(y)+\cdots\right]dy$$

$$= -jv\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\beta}+j\frac{v\sqrt{\lambda}}{\beta}\int_0^T h(y)dy$$

$$-v^2\frac{1}{2\beta^2}\int_0^T[h(y)]^2dy$$

$$-\frac{jv^3}{6\lambda^{\frac{1}{2}}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+\cdots$$

$$= -\frac{v^2}{2}-\frac{jv^3}{6\lambda^{\frac{1}{2}}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)$$

当 $\lambda\to\infty$时，$\ln\Phi_{n_t}(v) = -\frac{v^2}{2}$

即 $$\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_{n_t}(v) = e^{-\frac{v^2}{2}} \qquad (13)$$

由(13)式可知，当$\lambda\to\infty$时，η_t服从正态分布，即$\eta(t)$是一正态分布的随机过程。因此$\xi(t)$也服从正态分布。当单位时间内出现的平均脉冲数无限增大时，$\xi(t)$的极限分布是正态分布，这符合中心极限定理。

§7 柯尔莫哥洛夫前进方程和后退方程

(一) 参数连续状态离散马尔可夫过程的转移概率

一般在参数连续、状态离散的马尔可夫过程中，设$t=0$时过程开始，因此其参数域一般为$T=[0, -\infty)$；状态空间为$I=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$。图3-6画出了这类过程的样本函数。状态在$t_1$，$t_2$，$t_3$，…时发生跳变，且$t_1$，$t_2$，$t_3$，…是随机的，跃迁的大小也是随机的。为了方便，可认为$\xi(t)$在跃变点是右连续的，即认为$\xi(t)$在t_1，t_2，t_3，…这些点取进入状态之值，如图所示。

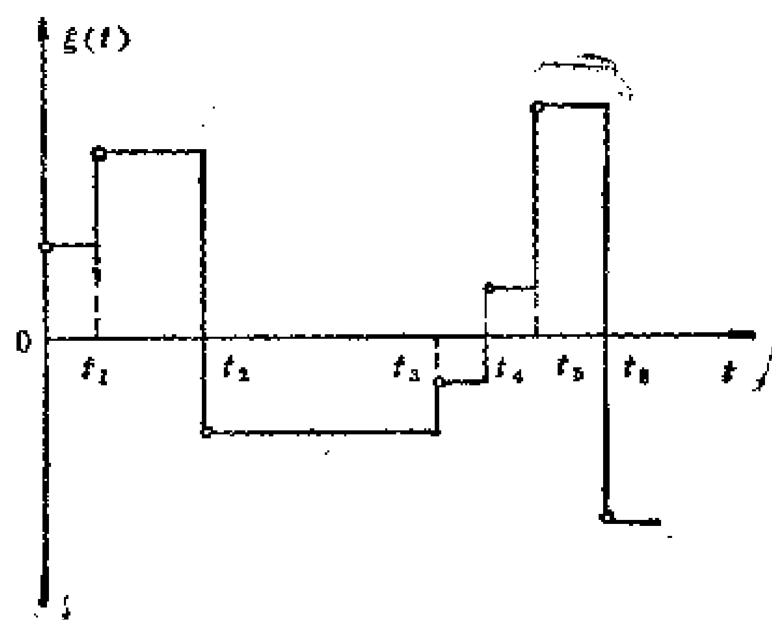


图 3-6

这类过程相当于在随机时间变化的数字动态系统中形成的一个过程，它是马尔可夫过程，即

$$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t')\ 0\leqslant t'\leqslant t_1\}$$
$$=P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}\quad (t_1\leqslant t_2,\ i,\ j\in I)$$

这是一族条件概率，它是参数连续状态离散马尔可夫过程的转移概率。显然它应满足

$$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}\geqslant 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in I}P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}=1\quad (i\in I) \qquad (2)$$

如果上述转移概率仅为时间差 $t=t_2-t_1$ 的函数，而不决定于 t_1、t_2 本身所取之值，那么转移概率 $P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}$ 可以改写为 $p_{ij}(t)$，其中 $t=t_2-t_1$，这时的马尔可夫过程为齐次马尔可夫过程。

由(1)，(2)可知，$p_{ij}(t)$应该满足下列关系：

$$p_{ij}(t)\geqslant 0 \qquad (i,\ j\in I,\ t\geqslant 0) \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in I}p_{ij}(t)=1 \qquad (i\in I,\ t\geqslant 0) \qquad (4)$$

后面着重讨论齐次马尔可夫过程。

对于参数连续、状态离散马尔可夫过程，其相应的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式取如下形式：

$$P\{\xi(t_3)=j/\xi(t_1)=i\}$$
$$=\sum_{k\in I}P\{\xi(t_2)=k/\xi(t_1)=i\}$$
$$\cdot P\{\xi(t_3)=j/\xi(t_2)=k\} \qquad (5)$$
$$(t_1<t_2<t_3,\ i,\ j\in I)$$

如果该过程为齐次的马尔可夫过程，则其相应的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程式取如下形式：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(\tau)$$

$$(i,\ j\in I,\ t>0,\ \tau>0) \quad (6)$$

在研究这类过程中还要增加一个连续性条件，

即 $$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad (7)$$

满足连续性条件的马尔可夫过程称为随机连续的马尔可夫过程。

在物理过程中，在一个有限时间间隔内不可能有无穷多次跳跃。因为无穷多次跳跃意味着要化费无穷的能量，而在有限的时间内化费无限的能量是不可能的。因此在有限时间内仅允许有限次数的跳变。这类过程称为非爆发性过程。非爆发性过程一定满足连续性条件。连续性条件说明刚进入一个状态又立刻离开这个状态是不可能的。

有了方程式(3)、(4)、(6)、(7)给出的四个条件，便可证明当 i,j 固定时，$p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数及 $p_{ij}(t)$ 的可微性。

(二) 跳跃强度（无穷小转移率 q_{ij}）及转移率矩阵（Q矩阵）

由于 $p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数且可微，则对于一很小的 $\Delta t(\Delta t>0)$ 有

$$p_{ij}(\Delta t)=p_{ij}(0)+q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$$

$$=\delta_{ij}+q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$$

或 $$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)-\delta_{ij}}{\Delta t} \quad (8)$$

q_{ij} 称为参数连续状态离散马尔可夫过程的无穷小转移率或跳跃强度。

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时，} q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\text{当 } j = i \text{ 时，} q_{ii} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - \delta_{ii}}{\Delta t}$$

因$p_{ij}(t) \geqslant 0$，故当$i \neq j$时q_{ij}是一个非负数。因$1 \geqslant p_{ii}(t) \geqslant 0$，$\delta_{ii} = 1$，$q_{ii}$是一个非正数。

根据（4）式 $$\sum_{j \in I} p_{ij}(\Delta t) = 1$$

则 $$1 = 1 + \left(\sum_{j \in I} q_{ij}\right)\Delta t$$

即 $$\sum_{j \in I} q_{ij} = 0 \tag{9}$$

设 $$-q_{ii} = \alpha_i$$

则 $$\alpha_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} q_{ij} \quad (i \in I) \tag{10}$$

对于有限状态的参数连续、状态离散的马尔可夫过程，可以定义一个转移率矩阵（Q 矩阵）

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots\cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots\cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots\cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

在（11）式所示的矩阵中，(a)每一行的所有元素之和为零；（b）对角线上各元素为负或为零；（c）当$j \neq i$时，$q_{ij} \geqslant 0$。

注（1）在许多实际问题中Q矩阵的许多元素为零；

（2）上述讨论可推广到可列个离散状态的情况；

（3）如果过程为非齐次的过程，则

$$P\{\xi(t+\Delta t)=j/\xi(t)=i\}=P\{\xi(t)=j/\xi(t)=i\}$$
$$+q_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)=\delta_{ij}+q_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

即在非齐次的条件下，$q_{ij}(t)$本身是 t 的函数。

（三）柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程式

利用Q矩阵可以获得任意时间间隔 t 的转移概率。根据切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)$$
$$=p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)$$
$$+\sum_{\substack{k\neq j\\ k\in I}}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)\quad(i\in I)$$

由于 Δt 很小，则

$$p_{kj}(\Delta t)=q_{kj}\Delta t+o(\Delta t)\quad(k\neq j)$$
$$p_{jj}(\Delta t)=\delta_{jj}+q_{jj}\Delta t+o(\Delta t)$$
$$=1+q_{jj}\Delta t+o(\Delta t)$$
$$p_{ij}(t+\Delta t)=p_{ij}(t)[1+q_{jj}\Delta t+o(\Delta t)]$$
$$+\sum_{\substack{k\neq j\\ k\in I}}p_{ik}(t)[q_{kj}\Delta t+o(\Delta t)]$$

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)}{\Delta t}$$

$$=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$，　则

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj}\quad (i,\ j\in I,\ t\geqslant 0)\tag{12}$$

(12) 式是一方程组，解该方程组并利用起始条件

$$p_{ii}(0)=1$$

$$p_{ij}(0)=0\quad (j\neq i)$$

可求得 $p_{ij}(t)$。该方程组称为柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程。

如果该过程为有限状态空间 I：$\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，则当固定 i 时，(12)式代表$(n+1)$个方程的联立方程组。若定义一行矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_i(t)=(p_{i0}(t)\quad p_{i1}(t)\cdots p_{in}(t))$ 则(12)式可写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_i(t)=\boldsymbol{\Gamma}_i(t)\mathbf{Q}\quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)\tag{13}$$

它的起始条件为

$$\boldsymbol{\Gamma}_i(0)=(0\quad 0\quad \cdots\quad \underset{\uparrow\text{第}(i+1)\text{列元素}}{1}\quad 0\quad \cdots\quad 0)$$

若进一步定义矩阵 $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_0(t)\\ \boldsymbol{\Gamma}_1(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_i(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0n}(t)\\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{i0}(t) & p_{i1}(t) & \cdots & p_{in}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n0}(t) & p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}(t)$ 是 $(n+1)\times(n+1)$矩阵，于是(12)(13)式可改写为

$$\dot{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}\tag{14}$$

它的起始条件可表示为

$$\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}_{(n+1)\times(n+1)}$$

(12)、(13)、(14)式均称为柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程。

(四) 福克-普朗克方程式

根据起始状态的概率分布以及前进方程式，可以导出在 t 时刻过程取 j 状态的无条件概率

$$p_j(t) = P\{\xi(t) = j\}。$$

已知过程的起始状态分布为

$$\mathbf{p}(0) = (p_0(0) \quad p_1(0) \cdots p_n(0))$$

设在 t 时刻过程所处状态的概率分布为

$$\mathbf{p}(t) = (p_0(t) \quad p_1(t) \cdots p_n(t))$$

则
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{p}(0)\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

即
$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q} \qquad (15)$$

(15) 式称为福克-普朗克方程。解方程式 (15) 可得任意时刻该过程的一维概率分布。

由此可以看出，虽然利用前进方程求 $p_{ij}(t)$ 的解是一个比较复杂的问题，但是该方程组是研究参数连续、状态离散齐次马尔可夫过程性质的重要工具。

(五) 例

例一 设有一参数连续、状态离散的马尔可夫过程，$\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$，它的状态空间为 $I: \{1, 2, \cdots, m\}$，

当 $i \neq j$, i, $j = 1, 2, \cdots, m$ 时 $q_{ij} = 1$；

当 $i = 1, 2, \cdots, m$ 时，$q_{ii} = -(m-1)$。求 $p_{ij}(t)$。

解 根据(12)式

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -(m-1)p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in I}} p_{ik}(t)$$

根据
$$\sum_{k=1,2,\cdots,m} p_{ik}(t) = 1$$

则 $$\sum_{\substack{k\neq j\\ k\in I}} p_{ik}(t)=1-p_{ij}(t)$$

因此 $$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=-(m-1)p_{ij}(t)+(1-p_{ij}(t))$$

$$=-mp_{ij}(t)+1 \quad (i,j=1,2\cdots,m)$$

$$p_{ij}(t)=ce^{-mt}+\frac{1}{m} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

利用起始条件，$p_{ii}(0)=1$，$p_{ij}(0)=0(i\neq j)$，则当 $i=j$时

$c=1-\frac{1}{m}$，　　而 $i\neq j$ 时 $c=-\frac{1}{m}$。

于是， $$p_{ii}(t)=(1-\frac{1}{m})e^{-mt}+\frac{1}{m} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{m}(1-e^{-mt}) \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,m)$$

例二　排队问题　设有一服务台，$[0,t)$内到达服务台的顾客数是服从泊松分布的随机变量，即顾客流是泊松过程。单位时间到达服务台的平均人数为λ。服务台只有一个服务员，对顾客的服务时间是按负指数分布的随机变量，平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。如果服务台空闲时到达的顾客立刻接受服务；如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客到达时发现已经有二人在等候，则他就离开而不再回来。设$\xi(t)$代表在t时刻系统内的顾客人数（包括正在被服务的顾客和排队等候的顾客），该人数就是系统所处的状态，于是这个系统的状态空间为I：{0，1，2，

3，}；又设在 $t=0$ 时系统处于零状态，即服务人员空闲着。求在 t 时刻系统处于状态 j 的无条件概率 $p_j(t)$ 所满足的微分方程。

解 （1）求Q矩阵

若 $\xi(t)=0$，当有一顾客来到服务台时，则状态由 0 转移到 1。因顾客流是一泊松过程，则在 $[t, t+\Delta t)$ 内有一个顾客到达服务台的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，$q_{01}=\lambda$；在 $[t,t+\Delta t)$ 内有二个或二个以上的顾客到达服务台的概率为 $o(\Delta t)$，$q_{02}=q_{03}=0$。

因为在 Q 矩阵中每一行的所有元素之和为零，故 $q_{00}=-\lambda$。

$\xi(t)=1$ 表示在 t 时刻有一顾客正在被服务，而对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量。负指数分布律有这样一个特点：在某时刻服务人员正在给某顾客服务，那么对该顾客继续服务的服务时间仍遵从同一负指数分布规律。

已知对某甲的服务已进行了一段时间 a 而未结束，在该条件下继续进行服务的时间大于 t 的概率为

$$P\{T\geqslant t+a/T\geqslant a\}=\frac{P\{T\geqslant t+a\}}{P\{T\geqslant a\}}=\frac{e^{-\mu(t+a)}}{e^{-\mu a}}=e^{-\mu t}$$

这就说明某甲在 t 以前被服务而未结束、而在 $[t, t+\Delta t)$ 内完成服务的条件概率为

$$(1-e^{-\mu\Delta t}=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

因此在 Δt 内系统由 1 状态转入 0 状态的概率为

$$[\mu\Delta t+o(\Delta t)][1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

故
$$q_{10}=\mu$$

另一方面，在 (Δt) 内有一顾客到达服务台的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，因此在 Δt 内系统由状态 1 转入到状态 2 的概

率为 $[\lambda\Delta t+o(\Delta t)][1-\mu\Delta t+o(\Delta t)]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

因此 $$q_{12}=\lambda$$

同理 $$q_{13}=0$$

$$q_{11}=-(q_{10}+q_{12}+q_{13})=-(\lambda+\mu)$$

$$q_{20}=0$$

$$q_{21}=\mu$$

$$q_{23}=\lambda$$

$$q_{22}=-(\lambda+\mu)$$

若 $\xi(t)=3$ 时系统不再可能接受新顾客，则状态 3 只可能转到状态 2 或仍然保持在状态 3 。$\xi(t)=3$时在 Δt 内对一顾客服务结束的概率为

$$1-e^{-\mu\Delta t}=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

因此 $$q_{32}=\mu$$

而 $$q_{30}=0$$

$$q_{31}=0$$

$$q_{33}=-\mu$$

于是得 Q 矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

（2）根据福克-普朗克方程式得

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+\mu p_2(t) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - (\lambda+\mu)p_2(t) + \mu p_3(t) \\[2ex]
\dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda p_2(t) - \mu p_3(t)
\end{cases}
$$

它的起始条件为
$$p_0(0) = 1$$
$$p_j(0) = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

（六）柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程

当固定 i、研究 $p_{ij}(t)$，$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$时，采用前进方程式是比较方便的。但是在另一种情况下感兴趣的是最后所处的状态，即固定 j、研究 $p_{0j}(t)$，$p_{1j}(t)$，…． 这时应该采用另一组方程。图 3-7 给出了状态与时间的关系图，图中
$$\tau - \Delta t < \tau < t + \tau$$

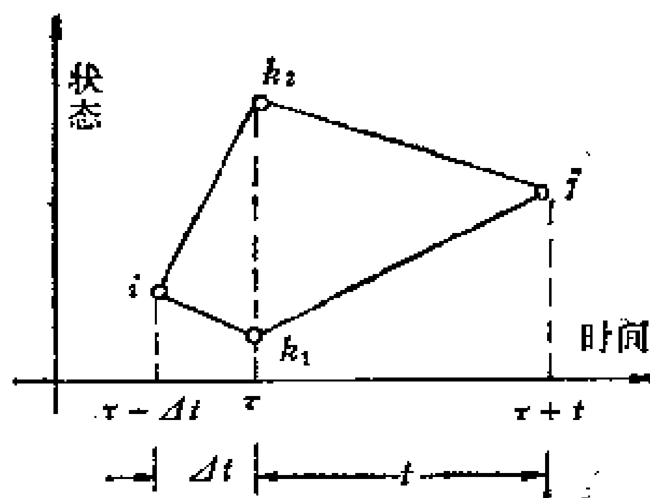


图 3-7

根据切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$
P\{\xi(\tau+t) = j/\xi(\tau-\Delta t) = i\}
$$
$$
= \sum_{k \in I} P\{\xi(\tau) = k/\xi(\tau-\Delta t) = i\}
$$

$$\cdot p\{\xi(\tau+t)=j/\xi(\tau)=k\}$$

由于过程的齐次性

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t)$$

$$=p_{ii}(\Delta t)p_{ij}(t)+\sum_{\substack{k\neq i\\k\in I}}p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t)$$

而 $$p_{ik}(\Delta t)=q_{ik}\Delta t+o(\Delta t)\qquad(k\neq i)$$

$$p_{ii}(\Delta t)=1+q_{ii}\Delta t+o(\Delta t)$$

故 $$p_{ij}(t+\Delta t)=[1+q_{ii}\Delta t+o(\Delta t)]p_{ij}(t)$$

$$+\sum_{\substack{k\neq i\\k\in I}}[q_{ik}\Delta t+o(\Delta t)]p_{kj}(t)$$

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)}{\Delta t}=q_{ii}p_{ij}(t)$$

$$+\sum_{\substack{k\neq i\\k\in I}}q_{ik}p_{kj}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$ 得

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k\in I}q_{ik}p_{kj}(t)\quad(i,\ j\in I)\tag{16}$$

(16) 式是一方程组，称为柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程。

定义 列矩阵 $S_j(t)$ 为

$$S_j(t)=\begin{pmatrix}p_{0j}(t)\\p_{1j}(t)\\\vdots\\p_{ij}(t)\\\vdots\\p_{nj}(t)\end{pmatrix}$$

则（16）式可改写为

$$\dot{S}_i(t)=QS_i(t) \tag{17}$$

注 虽然前进方程和后退方程在形式上有所不同，但两者的解却是同一的。费勒在1940年已证明两者的解是同一的。

（七） 续例

例三 机器维修问题 设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，它的平均正常工作时间为$\frac{1}{\lambda}$，它损坏后的修复时间也是一负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为$\frac{1}{\mu}$。如该机在 $t=0$ 时是正常工作的，问在 $t=10$ 时该机正常工作的概率如何

解 它是一个"二个状态"的随机过程。设该机正常工作时的状态为0，该机因损坏而修理时的状态为1，则它的状态空间为{0，1}。在Δt内机器从正常工作变为损坏状态的概率为

$$1-e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

故Q矩阵中$q_{01}=\lambda$，$q_{00}=-\lambda$。反之，如果机器处于修理状态，在Δt内机器从修理状态修复到正常工作的概率为

$$1-e^{-\mu\Delta t}=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

故Q矩阵中$q_{10}=\mu$，$q_{11}=-\mu$，即

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

根据后退方程有

$$\begin{pmatrix}p_{00}'(t)\\ p_{10}'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{00}(t)\\ p_{10}(t)\end{pmatrix}$$

或 $$p_{00}'(t)=-\lambda p_{00}(t)+\lambda p_{10}(t)$$

$$p_{10}'(t)=\mu p_{00}(t)-\mu p_{10}(t)$$

则 $$\mu p_{00}'(t)+\lambda p_{10}'(t)=[-\lambda p_{00}(t)+\lambda p_{10}(t)]\mu+[\mu p_{00}(t)-\mu p_{10}(t)]\lambda=0$$

两边积分得 $$\mu p_{00}(t)+\lambda p_{10}(t)=C$$

由于过程是随机连续的马尔可夫过程

$$p_{00}(0)=1$$

$$p_{10}(0)=0$$

因此 $$\mu p_{00}(0)+\lambda p_{10}(0)=\mu\cdot 1=c$$

$$\lambda p_{10}(t)=\mu(1-p_{00}(t))$$

$$p_{00}'(t)=-\lambda p_{00}(t)+\mu(1-p_{00}(t))$$

或 $$p_{00}'(t)+(\lambda+\mu)p_{00}(t)=\mu$$

$$p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

故 $$p_{00}(10)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-10(\lambda+\mu)}$$

按照题意，起始状态为$\xi(0)=0$，即

$$P\{\xi(0)=0\}=p_0(0)=1$$

故 $$P\{\xi(10)=0\}=p_0(10)=p_0(0)p_{00}(10)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-10(\lambda+\mu)}$$

例四 随机游动 设在[1,5]的线段上有一质点作随机游动，此质点只能停留在1，2，3，4，5诸点。质点在任何时刻都可能发生移动，其移动的规则是：（1）若在时刻t质点位于2，3，4中的一点，则在(t，t+Δt]中以概率$\lambda\Delta t$

$+o(\Delta t)$向右移动一格，以概率$\mu\Delta t+o(\Delta t)$向左移动一格；（2）若在时刻t质点位于1，则在$(t, t+\Delta t]$中以概率$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$向右移动一格；（3）若在时刻t质点位于5，则以后永远停留在5（即1为不可越壁，5为吸收壁）；（4）在$(t,t+\Delta t]$发生其他移动的概率均为$o(\Delta t)$。求各$p_{ij}(t)$满足的微分方程。

解 按照移动规则有

(1)

$$p_{ik}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda(\Delta t)+o(\Delta t) & (k=i+1;\ i=2,3,4)\\ \mu(\Delta t)+o(\Delta t) & (k=i-1;\ i=2,3,4)\\ o(\Delta t) & (k\neq i,i+1,i-1;i=2,3,4)\\ 1-\lambda(\Delta t)-\mu(\Delta t)+o(\Delta t) & \\ & (k=i;i=2,3,4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_{ik}=\lambda & (k=i+1;\ i=2,\ 3,\ 4)\\ q_{ik}=\mu & (k=i-1;\ i=2,\ 3,\ 4)\\ q_{ii}=-(\lambda+\mu) & (i=2,\ 3,\ 4)\\ q_{ik}=0 & (k\neq i,\ i+1,\ i-1;\ i=2,\ 3,\ 4)\end{cases}$$

（2）$i=1$

$$p_{1k}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t) & (k=2)\\ o(\Delta t) & (k=3,\ 4,\ 5)\\ 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) & (k=1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_{12}=\lambda & \\ q_{1k}=0 & (k=3,\ 4,\ 5)\\ q_{11}=-\lambda & \end{cases}$$

（3）$i=5$

$$\begin{cases}p_{55}(\Delta t)=1 & \\ p_{5k}(\Delta t)=0 & (k=1,2,3,4)\end{cases}$$

$$q_{55}=0$$

$$q_{5k}=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

于是得Q矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据后退方程 $\dot{S}_{i}(t)=QS_{i}(t)$，便可列出一系列含有 $p_{ij}(t)$ 的微分方程。

§8 当 $t\to\infty$ 时 $p_j(t)$、$p_{ij}(t)$ 极限的研究

（即 $\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$、$\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$ 的研究）

为了便于讨论，仅限于讨论状态空间为有限的过程，且假定所有状态都是相通的。对于可列无限个状态的过程也有相应的结果，但这时的条件和证明比较复杂。

（一）引理 当 $t\to\infty$ 时 $p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $p_i(0)$ 无关的极限，其充要条件是相应的条件概率 $p_{ij}(t)$ 对任何 i 趋于同一极限。

证 已知系统的初始分布为 $P\{\xi(0)=i\}=p_i(0)$，根据全概率公式，在时刻 t 系统处于状态 j 的概率为

$$P\{\xi(t)=j\}=p_j(t)=\sum_{i\in I}p_i(0)p_{ij}(t) \quad (j\in I)$$

（1）若 $t\to\infty$ 时 $p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $p_i(0)$ 无关的极限分布 p_j，即当 $t\to\infty$ 时 $p_j(t)\to p_j$，$j\in I$，

那末，特别选取$p_i(0)=1$、$p_k(0)=0$，$k\in I$，$k\neq i$，

则　　$p_j(t)=p_{ij}(t)$　　　　$(i\in I,\ j\in I)$

于是当$t\to\infty$时$p_{ij}(t)\to p_j$　$(i,\ j\in I)$

（2）反之，若$t\to\infty$，$p_{ij}(t)\to p_j$　$(i,\ j\in I)$

则对于任何一组初始概率分布$\{p_i(0)\}$有

当$t\to\infty$时

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\lim\sum_{i\in I}p_i(0)p_{ij}(t)$$

$$=\sum_{i\in I}p_i(0)\cdot p_j=\left[\sum_{i\in I}p_i(0)\right]p_j=p_j$$

该引理得证。

（二）马尔可夫定理　　对于任何时间连续、状态离散且有限的马尔可夫过程，若存在一个t_0使得对任何i，$r\in I$有$p_{ir}(t_0)>0$，那么极限$\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j$　存在且与i无关，$i,j\in I$　。

证　令　　$\max\limits_{j\in I}p_{ij}(t)=M_j(t)$

$\min\limits_{j\in I}p_{ij}(t)=m_j(t)$

根据切普曼-柯尔莫哥洛夫方程有

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in I}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\leqslant M_j(t)\sum_{k\in I}p_{ik}(\tau)$$

$$=M_j(t)$$

因此　　$M_j(t+\tau)\leqslant M_j(t)$

这表明　$M_j(t)$是t的非增函数。

同理　　$p_{ij}(t+\tau)=\sum\limits_{k\in I}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\geqslant m_j(t)$

$$\cdot\sum_{k\in I}p_{ik}(\tau)=m_j(t)$$

$$m_j(t+\tau)\geqslant m_j(t)$$

这表明 $m_j(t)$ 是 t 的非减函数。

$m_j(t)$、$M_j(t)$均介于0、1之间，故当 $t\to\infty$时，$M_j(t)$和$m_j(t)$必然存在极限值。如果这两个极限值重合，则本定理就得到了证明。为此，必须也只须证明，当 $t\to\infty$时

$$\Delta_j(t)=M_j(t)-m_j(t)\to 0$$

由假定已知存在 t_0 使 $p_{ir}(t_0)>0$，i，$r\in I$，

令 $d_{ik}^{(r)}=p_{ir}(t_0)-p_{kr}(t_0)\qquad(i,\ k,\ r\in I)$

因 $\sum\limits_{r\in I}p_{ir}(t_0)=\sum\limits_{r\in I}p_{kr}(t_0)=1$

故 $\sum\limits_{r\in I}d_{ik}^{(r)}=\sum\limits_{r\in I}p_{ir}(t_0)-\sum\limits_{r\in I}p_{kr}(t_0)=0$

由于 $p_{ir}(t_0)$可能大于 $p_{kr}(t_0)$，也可能小于 $p_{kr}(t_0)$，因此 $d_{ik}^{(r)}$ 可能为正，也可能为0，为负。现把$\sum\limits_{r\in I}d_{ik}^{(r)}$中各项分成两部分，即把$\sum\limits_{r\in I}d_{ik}^{(r)}$分成两部分相加，用$\sum\limits_{r}{}'$表示那些正的 $d_{ik}^{(r)}$ 求和，$\sum\limits_{r}{}''$表示那些非正的$d_{ik}^{(r)}$求和，故

$$0=\sum_{r\in I}d_{ik}^{(r)}=\sum_{r}{}'\,d_{ik}^{(r)}-\sum_{r}{}''\,|d_{ik}^{(r)}|$$

即 $\sum\limits_{r}{}'\,d_{ik}^{(r)}=\sum\limits_{r}{}''\,|d_{ik}^{(r)}|=h_{ik}\qquad(i,\ k\in I)$

又因为 $p_{ir}(t_0)>0$，$p_{kr}(t_0)>0$，　i，k，$r\in I$，故对于任意的 i 和 k 有

$$h_{ik}=\sum_r{}' d_{ik}^{(r)}=\sum_r{}'[p_{ir}(t_0)-p_{kr}(t_0)]$$

$$<\sum_r{}' p_{ir}(t_0)\leqslant\sum_{r\in I}p_{ir}(t_0)=1$$

因而 $$h=\max_{i,k\in I}h_{ik}<1$$

设 q 为任意的自然数，当 i，$k\in I$ 时

$$p_{ij}(qt_0+t_0)-p_{kj}(qt_0+t_0)$$

$$=\sum_{r\in I}p_{ir}(t_0)p_{rj}(qt_0)-\sum_{r\in I}p_{kr}(t_0)p_{rj}(qt_0)$$

$$=\sum_{r\in I}[p_{ir}(t_0)-p_{kr}(t_0)]p_{rj}(qt_0)$$

$$=\sum_{r\in I}d_{ik}^{(r)}p_{rj}(qt_0)$$

$$=\sum_r{}' d_{ik}^{(r)}p_{rj}(qt_0)-\sum_r{}''|d_{ik}^{(r)}|p_{rj}(qt_0)$$

$$\leqslant M_j(qt_0)h_{ik}-m_j(qt_0)h_{ik}$$

$$=h_{ik}\Delta_j(qt_0)\leqslant h\Delta_j(qt_0)$$

因为这个不等式对所有的 i，k 都成立，那么在上面的不等式中若取

$$p_{ij}(qt_0+t_0)=M_j(qt_0+t_0)$$

取 $$p_{kj}(qt_0+t_0)=m_j(qt_0+t_0)$$

不等式仍然满足，即

$$M_j(qt_0+t_0)-m_j(qt_0+t_0)$$

$$=\Delta_j(qt_0+t_0)\leqslant h\Delta_j(qt_0)$$

重覆运用上述不等式得

$$\Delta_j(qt_0)\leqslant h\Delta_j((q-1)t_0)\leqslant\cdots\leqslant h^{q-1}\Delta_j(t_0)\leqslant h^{q-1}$$

由于 $h<1$，故当 $q\to\infty$ 时，$\Delta_1(qt_0)\to 0$。
由于函数 $\Delta_1(t)$ 的单调性，显然当 $t\to\infty$ 时，$\Delta_1(t)\to 0$。

该定理得证。

（三）根据(一)、(二)两节的引理和定理可知：对于任何时间连续、状态离散的马尔可夫过程，若存在一个 t_0，使对于任何 i，$r\in I$，有 $p_{ir}(t_0)>0$，则

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j \qquad (j\in I)$$
$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=p_j$$

由于当 $t\to\infty$ 时 $p_{ij}(t)$ 趋于一个常数 p_j，那么当 $t\to\infty$ 时 $\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\to 0$，　i，$j\in I$；当 $t\to\infty$ 时 $\frac{dp_j(t)}{dt}\to 0$，$j\in I$。

根据前进方程

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k\in I} p_{ik}(t)q_{kj}$$

因此当 $t\to\infty$ 时

$$\sum_{k\in I} p_{ik}(t)q_{kj}=\sum_{k\in I} p_k q_{kj}=0$$

上式代表一线性方程组。根据这一线性方程组以及 $\sum_{k\in I} p_k=1$，可以求得当 $t\to\infty$ 时过程取各个状态的极限概率 p_j。

一般说，求前进方程组或求后退方程组的解是十分复杂的，但当 $t\to\infty$ 时，$p_{ij}(t)$，$p_j(t)$ 趋于常值，此时线性微分方程组成为线性方程组，就很容易求 p_j 值了。这说明 $t\to\infty$ 时该过程是遍历的。

例　在§7例三机器维修问题中，已知其解为

$$p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

当 $t\to\infty$ 时

$$\lim_{t\to\infty}p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=p_0$$

$$\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=p_0$$

即不论起始状态的分布如何，

$$\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)=p_0$$

$$\lim_{t\to\infty}p_0(t)=p_0$$

这一结论可以直接利用本节所讨论的方法求得。

由于本题中的过程仅有两个状态，机器正常工作状态即0状态和机器维修状态即1状态，其Q矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}q_{00} & q_{01}\\ q_{10} & q_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

根据 $\sum_{k\in I}p_kq_{kj}=0$

则 $\lambda p_0=\mu p_1$

且 $p_1+p_0=1$

故 $p_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

$$p_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

§9 几种重要的马尔可夫过程

(一) 泊松过程

它是马尔可夫过程。它的特点是不论在$[0, t)$内出现的事件数如何，即不论$\xi(t)$取何值，在$[t, t+\Delta t)$内出现一个事件的概率为$\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$，出现两个或两个以上事件的概率为$o(\Delta t)$。其中$\lambda(t)$可以为$t$的函数，这种情况的泊松过程是非齐次的泊松过程；如果$\lambda=$常数，则为齐次泊松过程。在§2、§4中已作详细讨论。

(二) 纯增殖过程

它是泊松过程的一个推广。在泊松过程中，$[t, t+\Delta t)$内出现一个跳跃的概率不依赖于$[0, t)$内出现的跳跃数目，即与$\xi(t)$所处的状态$\xi(t)=n$无关。而在纯增殖过程中，如果$[0, t)$内出现n个跳跃，即$\xi(t)=n$，则$[t, t+\Delta t)$内出现一个新的跳跃的概率为$\lambda_n(t)\Delta t+o(\Delta t)$，$\lambda_n(t)$与所处的状态有关。因此纯增殖过程中需用$\lambda_0(t)$，$\lambda_1(t)$，…，$\lambda_n(t)$，…序列来刻划它的特征。在纯增殖过程中，同样假定当$\xi(t)=n$时在$[t, t+\Delta t)$内出现二个或二个以上的跳跃的概率为$o(\Delta t)$，即

$$P\{\xi(t+\Delta t)=k/\xi(t)=n\}=\begin{cases}\lambda_n(t)\Delta t+o(\Delta t) & (k=n+1)\\ o(\Delta t) & (k\neq n, n+1, k>n\text{ 的其他值})\\ 1-\lambda_n(t)\Delta t+o(\Delta t) & (k=n)\end{cases}$$

下面假定$\lambda_n(t)=\lambda_n$（常数），$n=0, 1, 2, \cdots$。在这

个假定下，研究纯增殖过程在 t 时刻取 n 状态的概率，即

$$P\{\xi(t)=n\}=p_n(t)=?$$

设 $t=0$ 时它的起始状态为 m，即 $P\{\xi(0)=m\}=p_m(0)=1$，m 可以为零，也可以为其它正整数。

和 §2 研究泊松过程相仿，可以列出下列方程：

$$p_0(t+\Delta t)=p_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)+o(\Delta t)$$
$$\text{（当起始状态为零状态时）} \qquad (1)$$

$$p_m(t+\Delta t)=p_m(t)(1-\lambda_m\Delta t)+o(\Delta t)$$
$$\text{（当起始状态为m状态时）} \qquad (2)$$

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)(1-\lambda_n\Delta t)$$
$$+p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t) \quad (n>m) \qquad (3)$$

令 $\Delta t\to 0$ 得

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda_0 p_0(t) \text{（当起始状态为零状态时）} \qquad (4)$$

$$\frac{dp_m(t)}{dt}=-\lambda_m p_m(t) \text{（当起始状态为m状态时）} \qquad (5)$$

（5）式中 $m=0$ 时即为（4）式。

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \quad (n>m) \qquad (6)$$

利用起始条件，解方程式（5）、（6）可得 $p_n(t)$ 的表示式。

下面利用拉氏变换解方程式（5）、（6）。设 $\pi_n(s)=\mathscr{L}\{p_n(t)\}$，

从（5）、（6）式得

$$s\pi_m(s)-1=-\lambda_m\pi_m(s) \qquad (7)$$

$$s\pi_n(s)=-\lambda_n\pi_n(s)+\lambda_{n-1}\pi_{n-1}(s) \quad (n>m) \qquad (8)$$

$$\pi_m(s)=\frac{1}{s+\lambda_m}$$

$$\pi_n(s)=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_m}{(s+\lambda_n)(s+\lambda_{n-1})\cdots(s+\lambda_m)}$$

$$=\sum_{i=m}^{n}\frac{A_i}{s+\lambda_i}$$

$$A_i=\frac{(-1)^{n-m}\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_m}{\prod\limits_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

故 $$p_n(t)=(-1)^{n-m}\lambda_m\cdots\lambda_{n-1}\sum_{i=m}^{n}\frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)} \qquad (9)$$

例一　尤尔过程　考虑一个总体，其成员通过分裂或其他方式产生出新的成员，而且没有死亡。在Δt时间间隔内每个成员产生一个新成员的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$（$\lambda$为一常数），它确定了总体的增长率。如果在成员之间无相互作用，如果在时刻 t 总体的成员数为 n，则$(t,\ t+\Delta t)$内总体增长一个新成员的概率为$n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。因此在本过程中，$\lambda_n=n\lambda$。若在 $t=0$时总体的起始成员数为 m，求在 t 时刻总体成员数取 n 的概率。

利用（9）式得

$$p_n(t)=(-1)^{n-m}(m\lambda)[(m+1)\lambda]\cdots$$

$$\cdot[(n-1)\lambda]\sum_{i=m}^{n}\frac{e^{-i\lambda t}}{\prod\limits_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

$$m\lambda[(m+1)\lambda]\cdots[(n-1)\lambda]=\lambda^{n-m}\frac{(n-1)!}{(m-1)!}$$

$$=(n-m)!\,\lambda^{n-m}\binom{n-1}{m-1}$$

$$\prod_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)=\lambda^{n-m}(-1)^{n-i}(i-m)(i-m-1)\cdots 2$$

$$\cdot 1\cdot(n-i)(n-1-i)\cdots 2\cdot 1$$

$$=(-1)^{n-i}\lambda^{n-m}\frac{(i-m)!\,(n-i)!}{(n-m)!}(n-m)!$$

$$=(-1)^{n-i}\lambda^{n-m}(n-m)!\,\frac{1}{\binom{n-m}{i-m}}$$

$$p_n(t)=(-1)^{n-m}(n-m)!\,\lambda^{n-m}\binom{n-1}{m-1}$$

$$\cdot\sum_{i=m}^{n}\frac{e^{-i\lambda t}}{(-1)^{n-i}\lambda^{n-m}(n-m)!}\binom{n-m}{i-m}$$

$$=\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i-m}\binom{n-m}{i-m}e^{-i\lambda t}$$

$$=\binom{n-1}{m-1}e^{-m\lambda t}\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i-m}$$

$$\cdot\binom{n-m}{i-m}e^{-(i-m)\lambda t}$$

$$=\binom{n-1}{m-1}e^{-m\lambda t}\sum_{k=0}^{(n-m)}(-1)^{k}\binom{n-m}{k}e^{-k\lambda t}$$

$$=\binom{n-1}{m-1}e^{-m\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-m} \qquad (n>m)$$

该式表明$p_n(t)$是一负二项分布。

如果 $m=1$，即假定起始状态为 1，即

$$P\{\xi(0)=1\}=p_1(0)=1$$

则

$$p_n(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$$

这表明 $p_n(t)$是几何分布。于是

$$E\{\xi(t)\}=\sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)=e^{\lambda t}$$

$$D\{\xi(t)\}=E\{\xi^2(t)\}-[E\{\xi(t)\}]^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t)-e^{2\lambda t}$$

$$=e^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1)$$

尤尔在 1924 年研究了总体增长的进化理论，从而得到了这一类型的过程。弗里（W.H.Furry）曾用相同的模型描述与宇宙射线有关的过程，但也是一个粗糙的模型。

（三）生灭过程

自然现象中有一些过程属于这类过程，如在排队论、可靠性理论、化学动力学、流行病的传染等的研究中均会遇到这类过程。

例二 电话交换问题 某电话总机有n条线路。在某一呼唤来到时如有空着的线路，则该呼唤占用其中某一条空着的线路，并开始通话。如果谈话结束，则该线路使用完毕而成为空闲线路，等待下一次呼唤。如果呼唤来到时遇到 n 条线路均被占着，则该呼唤遭到拒绝而消失。设有按泊松分布的呼唤流，即在间隔 $[t, t+\Delta t)$ 内来到一次呼唤的概率为

$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，来到二次或二次以上呼唤的概率为$o(\Delta t)$；并设如果某一线路在某时刻t被占用，而在$[t, t+\Delta t)$内这条线路空出来的概率为$\mu\Delta t+o(\Delta t)$，即通话时间大于等于t的概率为$P\{T\geqslant t\}=e^{-\mu t}$。

因 $$P\{T\geqslant t+\Delta t\}=p(t+\Delta t)$$
$$=P\{T\geqslant t\}[1-\mu\Delta t]+o(\Delta t)$$
$$=p(t)[1-\mu\Delta t)+o(\Delta t)$$

即 $$\frac{dp(t)}{dt}=-\mu p(t) \qquad p(t)=Be^{-\mu t}$$

又 $$p(0)=1, \text{ 故 } p(t)=P\{T\geqslant t\}=e^{-\mu t}$$

或 $$F_T(t)=P\{T<t\}=1-e^{-\mu t}$$
$$f_T(t)=F_T'(t)=\mu e^{-\mu t}$$

这说明通话时间按负指数规律分布。

在上述的假设下，研究总机在t时刻有k条线路被占用的概率，$k=0, 1, 2, \cdots, n$，k是该过程的状态，该过程是一生灭过程。

例三 简单排队问题 有某服务台，在$[0,t)$内到达该服务台的顾客数服从泊松分布，单位时间内到达该台的顾客平均数为λ。服务台的服务原则是“先到先服务，”即如果顾客到达时服务台空着，则该顾客立刻得到服务，如果服务台正忙着，则顾客加入排队行列。服务台对顾客服务的时间是负指数分布的随机变量，其平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。在t时刻服务台的顾客数组成一个生灭过程。

例四 可靠性问题 设有一系统由M个元件所组成，每一元件的正常工作时间服从负指数分布。如系统在t时刻有

n 个元件失效，则在$[t, t+\Delta t)$内产生一个新的失效元件的概率为$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$。失效元件可以修复，在$[t, t+\Delta t)$内修复一个元件的概率为$\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$。并假定在$\Delta t$内有二个或二个以上元件失效或同时修复二个或二个以上元件的概率为$o(\Delta t)$。该系统要正常工作至少要有 k（$k \leqslant M$）个元件正常工作，因此当系统中有 $M-k+1$ 个元件失效时系统就停止工作，待修复。若设失效元件数为系统运行过程中的状态，则也组成了一个生灭过程。

综合以上三例可对生灭过程作如下假定：（1）过程中状态的转移仅仅限于从一个状态向其邻近状态转移，即如状态处于 n，$n \geqslant 1$，则可转移到（$n+1$）或（$n-1$）状态；如状态处于零状态，则仅可转移到状态 1；（2）如在 t 时刻过程处于 n 状态，则在$[t, t+\Delta t)$内产生由 n 状态转移到（$n+1$）状态的概率为$\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$，产生由 n 状态转移到（$n-1$）状态的概率为$\mu_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$，其中$\lambda_n(t)$、$\mu_n(t)$可以是 t 的函数，也可能为常数；（3）在$[t, t+\Delta t)$内转移二个或二个以上状态的概率为$o(\Delta t)$。在这些假设下，

$$q_{00} = -\lambda_0 \qquad q_{01} = \lambda_0 \qquad q_{0i} = 0 \qquad (i \neq 0, 1)$$

$$q_{10} = \mu_1 \qquad q_{11} = -(\lambda_1 + \mu_1) \qquad q_{12} = \lambda_1$$

$$q_{1i} = 0 \qquad (i \neq 0, 1, 2 \text{ 时})$$

……

$$q_{n(n-1)} = \mu_n \qquad q_{nn} = -(\lambda_n + \mu_n) \qquad q_{n(n+1)} = \lambda_n$$

$$q_{ni} = 0 \qquad (i \neq n-1, n, n+1)$$

……

根据前进方程式得

$$p_{00}'(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) + \mu_1 p_{01}(t) \qquad (1)$$

$$p'_{0n}(t)=\lambda_{n-1}p_{0(n-1)}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{0n}(t)$$
$$+\mu_{n+1}p_{0(n+1)}(t)\qquad (n\geqslant 1)\tag{2}$$
$$p'_{i0}(t)=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t)\tag{3}$$
$$p'_{in}(t)=\lambda_{n-1}p_{i(n-1)}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{in}(t)$$
$$+\mu_{n+1}p_{i(n+1)}(t)\qquad (n\geqslant 1)\tag{4}$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

上式中 λ_n 和μ_n （$n=0, 1, 2, \cdots$）均可能为 t 的函数，也可能是常数。

如果知道起始状态（$\xi(0)=i$），就可求在 t 时过程处于状态 n 的概率。此时起始条件为

$$p_{in}(0)=\delta_{in}=\begin{cases}1 & (n=i)\\ 0 & (\text{其它 } n \text{ 值})\end{cases}\tag{5}$$

如果 λ_n和 μ_n 均为 t 的函数，则上述过程是非齐次生灭过程。为了简化起见，这里仅研究线性的生灭过程，这时过程的特点是：总体是由能分裂或死亡的元素组成，在 Δt 内一个活着的元素分裂为二个的概率为 $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$，在 Δt 内一个元素死亡的概率为 $\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$，且元素间无相互作用，分裂和死亡之间也是相互统计独立的。如果 t 时的状态为 n，则

$$\lambda_n(t)=n\lambda(t)\qquad \mu_n(t)=n\mu(t)\tag{6}$$

现利用母函数方法来研究线性生灭过程，此法是 1949 年由 Kendall 提出的。

设 $p_{in}(t)$的母函数为$G(u, t)$，

$$G(u,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{in}(t)u^n\qquad (|u|\leqslant 1)\tag{7}$$

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}p_{in}(t)u^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p'_{in}(t) u^n$$

将(3)、(4)两式代入上式得

$$\frac{\partial G(u,\ t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \lambda_{n-1}(t) p_{i(n-1)}(t)$$

$$- \lambda_0(t) p_{i0}(t) u^0$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} u^n [\lambda_n(t) + \mu_n(t)] p_{in}(t)$$

$$+ \mu_1(t) p_{i1}(t) u^0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} u^n \mu_{n+1}(t) p_{i(n+1)}(t)$$

以(6)式代入上式，并对右式各项化简

$$\lambda_0(t) p_{i0}(t) u^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t) p_{in}(t) u^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda(t) p_{in}(t) u^n$$

$$= u \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda(t) p_{in}(t) u^{n-1}$$

$$= u\lambda(t) \sum_{n=1}^{\infty} n p_{in}(t) u^{n-1}$$

$$= \lambda(t) u \frac{\partial}{\partial u} G(u,\ t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^n \mu_n(t) p_{in}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(t) p_{in}(t) u^n$$

$$= u\mu(t)\sum_{n=1}^{\infty} n p_{in}(t) u^{n-1}$$

$$= \mu(t) u \frac{\partial}{\partial u} G(u, t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^{n} \lambda_{n-1}(t) p_{i(n-1)}(t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} u^{m+1} \lambda_{m}(t) p_{im}(t)$$

$$= u \sum_{m=1}^{\infty} u^{m} m \lambda(t) p_{im}(t)$$

$$= u^{2} \lambda(t) \sum_{m=1}^{\infty} m p_{im}(t) u^{m-1}$$

$$= \lambda(t) u^{2} \frac{\partial}{\partial u} G(u, t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^{n} \mu_{n+1}(t) p_{i(n+1)}(t) + \mu_{1}(t) p_{i1}(t) u^{0}$$

$$= \frac{1}{u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u^{n+1} \mu_{n+1}(t) p_{i(n+1)}(t) + u\mu_{1}(t) p_{i1}(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(t) p_{in}(t) u^{n}$$

$$= \frac{1}{u} \cdot u \sum_{n=1}^{\infty} \mu(t) n p_{in}(t) u^{n-1}$$

$$= \mu(t) \frac{\partial}{\partial u} G(u, t)$$

故 $$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial G(u,t)}{\partial u}[u^2\lambda(t)-(\lambda(t)+\mu(t))u+\mu(t)]$$

$$=(u-1)[\lambda(t)u-\mu(t)]\frac{\partial G(u,t)}{\partial u} \quad (8)$$

（8）式是一偏微分方程，解此方程可以得到非齐次线性生灭过程所处各状态的概率。但是解此方程比较复杂。为了进一步简化，设该线性生灭过程为齐次的，即 $\lambda(t)$ 和 $\mu(t)$ 均是常数，即 $\lambda(t)=\lambda$， $\mu(t)=\mu$，于是（8）式可化简为

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}=(u-1)(\lambda u-\mu)\frac{\partial G(u,t)}{\partial u} \quad (9)$$

从（5）、（7）得 $G(u,t)$ 的起始函数 $G(u,0)$，

$$G(u,0)=u^i \quad (10)$$

（9）式的辅助方程为

$$\frac{dt}{1}=\frac{du}{-(u-1)(\lambda u-\mu)}=\frac{dG}{0} \quad (11)$$

（11）式的第一组方程的解为

$$\frac{1-u}{\lambda u-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}=c_1$$

（11）式的另一组方程的解为

$$G(u,t)=c_2$$

于是得（9）式的一般解为

$$G(u,t)=f\left[\frac{1-u}{\lambda u-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right] \quad (12)$$

其中 $f[\cdot]$ 为任意函数。利用（10）式给出的起始条件得

$$G(u,0)=f\left[\frac{1-u}{\lambda u-\mu}\right]=u^i \quad (13)$$

设 $$\frac{1-u}{\lambda u-\mu}=\theta\ ，则\ u=\frac{1+\mu\theta}{1+\lambda\theta} \tag{14}$$

由于要求 $|u|<1$，即要求 $|1+\lambda\theta|>|1+\mu\theta|$，因此在满足 $|1+\lambda\theta|>|1+\mu\theta|$ 的条件下，

$$f(\theta)=\left(\frac{1+\mu\theta}{1+\lambda\theta}\right)^i \tag{15}$$

(15) 式给出了在起始条件 $G(u,\ 0)=u^i$ 的条件下，$f[\cdot]$ 的表示形式。若用 $\frac{1-u}{\lambda u-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}$ 代表(15)式中的 θ，则

$$G(u,t)=f\left[\frac{1-u}{\lambda u-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right]$$

$$=\left[\frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t})-u(\lambda-\mu e^{(\lambda-\mu)t})}{(\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t})-\lambda u(1-e^{(\lambda-\mu)t})}\right]^i \tag{16}$$

设 $$\alpha(t)=\frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t})}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}} \tag{17}$$

$$\beta(t)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\alpha(t) \tag{18}$$

则 $$G(u,t)=\left[\frac{\alpha(t)+[1-\alpha(t)-\beta(t)]u}{1-\beta(t)u}\right]^i \tag{19}$$

(19) 式给出了 $p_{in}(t)$ 的母函数。展开 (19) 式，求出 u^n 的系数，该系数为 $p_{in}(t)$。因

$$[\alpha(t)+(1-\alpha(t)-\beta(t))u]^i$$

$$=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}[\alpha(t)]^{i-j}[1-\alpha(t)-\beta(t)]^j u^j \tag{20}$$

当 $|\beta(t)u|<1$ 时

$$[1-\beta(t)u]^{-i}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-i}{k}(-1)^k[\beta(t)u]^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k}[\beta(t)]^k u^k \tag{21}$$

利用(20)、(21)式得

$$\begin{cases} p_{i0}=[\alpha(t)]^i & (22) \\ p_{in}(t)=\sum_{j=0}^{\min(i,n)}\binom{i}{j}\binom{i+n-j-1}{n-j}[\alpha(t)]^{(i-j)} & \\ \times[\beta(t)]^{n-j}[1-\alpha(t)-\beta(t)]^j \quad (n\geqslant 1) & (23) \end{cases}$$

讨论 （1） 如果在 $t=0$ 时 $i=1$，则

$$G(u,t)=\frac{\alpha(t)+[1-\alpha(t)-\beta(t)]u}{1-\beta(t)u} \tag{24}$$

$$p_{i0}(t)=p_{10}(t)=\alpha(t) \tag{25}$$

而

$$\begin{aligned} G(u,t)&=[\alpha(t)+(1-\alpha(t)-\beta(t))u] \\ &\quad\times\{1+\beta(t)u+[\beta(t)]^2u^2+\cdots\} \\ p_{in}(t)&=\alpha(t)[\beta(t)]^n \\ &\quad+(1-\alpha(t)-\beta(t))[\beta(t)]^{n-1} \\ &=[1-\alpha(t)][1-\beta(t)][\beta(t)]^{n-1} \\ &\quad(n\geqslant 1) \end{aligned} \tag{26}$$

（2） 从母函数 $G(u,t)$ 可以求出各阶矩，

$$E\{\xi(t)\}=\left[\frac{\partial G(u,t)}{\partial u}\right]_{u=1}=ie^{(\lambda-\mu)t} \tag{27}$$

$$D\{\xi(t)\}=i\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t}-1] \tag{28}$$

（3） 在齐次线性生灭过程中，当 $t\to\infty$ 时它的绝灭概率的渐近表示式为

$$\lim_{t\to\infty}p_{i0}(t)=\lim_{t\to\infty}[\alpha(t)]^i$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t})}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\right]^{i}$$

$$= \begin{cases} 1 & (\lambda<\mu) \\ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i} & (\lambda>\mu) \end{cases} \tag{29}$$

（4）可以直接从福克-普朗克方程式推导出（27）式。根据§7（四）知福克-普朗克方程式的表示形式为

$$\dot{P}(t) = P(t)Q \tag{30}$$

对于齐次线性生灭过程 Q 矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ (n-1)\mu & -(n-1)(\lambda+\mu) & (n-1)\lambda & & \\ & n\mu & -n(\lambda+\mu) & n\lambda & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\mu+\lambda)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - 2(\mu+\lambda)p_2(t) + 3\mu p_3(t) \\ \cdots\cdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = (n-1)\lambda p_{n-1}(t) \\ \qquad - n(\lambda+\mu)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{31}$$

根据定义 $E\{\xi(t)\}=M_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}np_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_\xi(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{dp_n(t)}{dt}\\
&=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_{n-1}(t)\\
&\quad-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)\\
&\quad+\mu\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_{n+1}(t)
\end{aligned}
$$

因

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_{n-1}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}m(m+1)p_m(t)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}m(m+1)p_m(t)\\
&\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_{n+1}(t)=\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)mp_m(t)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)mp_m(t)
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_\xi(t)}{dt}&=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_n(t)\\
&\quad-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)np_n(t)\\
&=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)=(\lambda-\mu)M_\xi(t)
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{dM_\xi(t)}{dt}=(\lambda-\mu)M_\xi(t) \tag{32}
$$

而　　　　$M_\xi(0)=i\cdot 1=i$

故　　　　$M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=ie^{(\lambda-\mu)t}\qquad (t\geqslant 0)\qquad (33)$

此结果和(27)式一致。

从上面解线性微分方程组的过程可以看到解前进方程组、后退方程组或福克-普朗克方程组均是十分困难的。如果仅仅研究 $t\to\infty$ 时的极限情况，则可利用§8的方法。如果当 $t\to\infty$ 时 $p_{ij}(t)$ 趋于某一常数 p_j，则可以把线性微分方程组简化为一线性方程组。

当 $t\to\infty$ 时　$p_{i0}(t)\to p_0$，$p_{i1}(t)\to p_1$，$p_{i(n-1)}(t)\to p_{n-1}$，$p_{in}(t)\to p_n$，$p_{i(n+1)}(t)\to p_{n+1}\cdots$

当 t 很大时从(3)、(4)式得

$$-\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1=0 \tag{34}$$

$$\lambda_{n-1}p_{n-1}-(\lambda_n+\mu_n)p_n+\mu_{n+1}p_{n+1}=0 \tag{35}$$

于是　　$p_1=\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0$

(35)式可改写为

$$\mu_{n+1}p_{n+1}-\lambda_n p_n=\mu_n p_n-\lambda_{n-1}p_{n-1}\qquad (n\geqslant 1)$$

设　　$g_n=\mu_n p_n-\lambda_{n-1}p_{n-1}$

则　　$g_{n+1}=g_n$

从(34)式　　$g_1=0$

故　　$g_2=g_3=g_4=\cdots=0$

即　　$p_{n+1}=\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}p_n\qquad (n\geqslant 0)$

故　　$p_1=\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0$

$$p_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}p_1=\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \ \mu_{n-1} \cdots \mu_2 \mu_1} p_0$$

因 p_n 代表在 $t \to \infty$ 时过程处于状态 n 的概率，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

因此当 $t \to \infty$ 时若过程趋于一平稳的概率分布，则要求 $1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots$ 为一收敛级数。

设 $s = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots$，并要求 $s < \infty$。在满足 $s < \infty$ 的前提下，

$$p_0 s = p_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots\right) = 1$$

于是
$$p_0 = \frac{1}{s} > 0$$

反之，如果级数 $1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots$ 为一发散级数，则说明过程没有平稳的分布。在生灭过程中只有当 s 为收敛级数时，平稳的概率分布 p_n 才会存在。

例五 电话交换问题 求 $t \to \infty$ 时有 k 条线路被占用的概率。

例二中已经给出了该生灭过程的所有条件。根据题意该过程有 $(n+1)$ 个状态，它的 Q 矩阵为

$$
Q = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & & & & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & (k-1)\mu & -[\lambda+(k-1)\mu] & \lambda & & & \\
 & & & k\mu & -(\lambda+k\mu) & \lambda & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & & & & & n\mu & -n\mu &
\end{pmatrix}
$$

此时福克-普朗克方程可表示为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
\dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda+\mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\
\cdots\cdots \\
\dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+k\mu)p_k(t) \\
\qquad + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \qquad (0<k<n) \\
\cdots\cdots \\
\dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t)
\end{cases} \tag{36}
$$

根据§8得到的结论，当 $t\to\infty$ 时 $p_k(t)\to p_k$（常数），于是(36)式可简化为线性方程组

$$
\begin{cases}
-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda+k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \\
\qquad (0<k<n) \\
\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0
\end{cases} \tag{37}
$$

设 $\quad g_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k$

根据(37)得 $\quad g_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k$

$$\lambda p_k - (k+1)\mu p_{k+1} = g_{k+1}$$

而 $\quad g_1 = 0 \quad g_n = 0$

故 $\quad g_1 = g_2 = g_3 = \cdots = g_k = \cdots = g_n = 0$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

$$p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

又因 $\quad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$

故

$$p_0\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$$

$$p_k = \frac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \quad (0 \leqslant k \leqslant n) \qquad (38)$$

(38) 式称为埃尔兰公式。

在本例的求解过程中利用了Q矩阵和福克-普朗克方程组，获得了线性方程组(37)。为了更简便地列出在平稳分布条件下的线性方程组，可以利用状态传递率图。对于(34)、(35)两式所表示的生灭过程可以用图3-8所示的状态传递率图来描述。

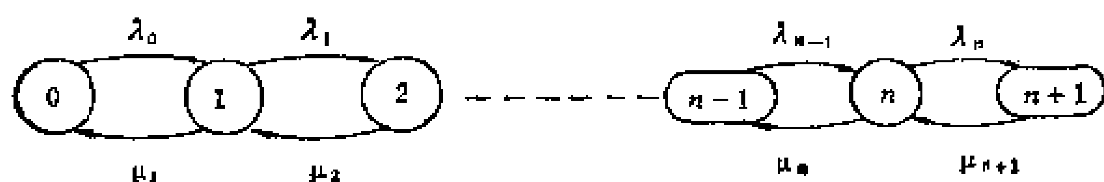


图 3-8

图 3-8 中的圆或椭圆代表过程所处的状态，如 n 状态用 n 表示；箭头代表状态间传递的关系；箭头上的符号 λ_0，λ_1，…，λ_n，…，μ_1，μ_2，…，μ_n…代表传递率。

由于假定 $t\to\infty$ 时过程已趋于平稳分布，根据统计平衡的原则得

$$\lambda_{n-1}p_{n-1}+\mu_{n+1}p_{n+1}=(\lambda_n+\mu_n)p_n \tag{39}$$

$$\lambda p_0=\mu p_1 \tag{40}$$

(39) 式与 (35) 式一致，(40) 式与 (34) 式一致。

今后称 (39)、(40) 式为平衡方程式，它说明流入 n 状态的平均传递率等于流出 n 状态的平均传递率。这样就可以利用状态传递率图直接写出平稳条件下描述生灭过程的线性方程组。

§10　排队和服务问题*

(一)　在排队服务问题中的“顾客”是一种广义的概念，如电视机送到维修站检修，电视机就是“顾客”。任何排队过程包括三个不同的历程：①到达过程；②排队；③服务过程。对这三个不同的历程可以建立一定的规则或近似地建立起相应的概率模型。

顾客到达服务点的程式可以是各种不同的类型。如顾客到达完全是随机的，即按照§2中规定的泊松分布的假设，不论t以前的到达情况如何，在[t,t+Δt)内到达一个顾客的概率是λΔt，在[t,t+Δt)内到达两个或两个以上的概率为高阶无穷小，也就是说在t时间内到达的顾客数服从泊松分布。另一种型式如流水线上到达工人面前的装配件数，这是十分有规则的。

排队也有一定的规则。如果只有一个服务人员，当顾客到达时他正在服务，则顾客就排队等候或立即离开，如遇到电话占线的情况那样。排队的容量有时没有限制，有时却有一个限额，超过一定限额时就不再参加排队而自动离去。如果有多个服务人员，则应有更复杂的规定。

服务过程有二点需要说明的：(1)如何选择下一个服务的顾客？一般采取的原则是"先到者先服务"；但也有其它规则，如计算中心选取下一个作业时要考虑优先处理的原则；(2)一般说服务时间是一个随机变量，但是也有固定的服务时间。

如果仅有一个服务人员，到达顾客数服从泊松分布，服务时间遵从负指数分布，则该排队系统称为M/M/1系统。其中M代表马尔可夫过程，1代表1个服务人员。更一般的用$G_1/G_2/s$代表一个排队系统，其中G_1代表到达顾客数服从G_1分布，G_2代表对每一个顾客的服务时间遵从G_2分布，s代表该系统内有s个服务人员。§9所讨论的几个例子是M/M/s排队系统。

(二)　对于任何排队问题需要研究四个问题：

(1) 在该服务系统中的顾客平均数L；

(2) 在排队等候的顾客平均数L_Q；

（3）顾客在系统中所花费时间的平均值 w；

（4）顾客化在排队等候的时间平均值 w_Q。

下面举例说明。

例一 M/M/1 系统 该系统的顾客到达率为 λ，平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$，求 L、L_Q、w、w_Q。

解 M/M/1 系统的排队过程是一生灭过程，可以直接利用 § 9 的结果，其中 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=\mu$。现仅考虑系统已进入平稳分布以后的情况。

$$p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0 \qquad p_2=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0\cdots$$

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_{n-1}=\cdots=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} p_n=p_0\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\cdots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\cdots\right)$$

$$=p_0\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

上式要求 $\frac{\lambda}{\mu}<1$，否则该过程不存在极限分布。$\lambda<\mu$ 说明了平均服务时间小于两个先后到达的顾客间的平均时间，在这个条件下上述级数收敛，过程才存在极限分布。$\lambda<\mu$ 时

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\mu} \tag{1}$$

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{2}$$

（1） 到达平稳后，系统中出现 n 个顾客的概率为 p_n，故系统中顾客的平均数为

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1+2\frac{\lambda}{\mu}+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\ \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (3)$$

（2） 当系统中有 n 人，其中一人被服务，（n－1） 人排队等候时，排队等候的顾客平均数为

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - (1-p_0) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (4)$$

（3） 求顾客在系统中所花费时间的平均值W

若顾客 A 到达服务点时系统中已有 n 人，其中一人在被服务，（n－1） 人在排队等候；由于服务时间是服从负指数分布的随机变量，它是无记忆的；每个顾客的服务时间是独立同分布的随机变量，故顾客A到达服务点后需要等候平均时间 $\frac{n}{\mu}$ 才能轮到被服务，他本人的平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$。因此如果顾客 A 到达服务点时已有 n 个顾客在系统中，则 A 在

系统中化费时间的平均值为$\frac{n+1}{\mu}$，于是

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客 A 在系统中化费的时间/已有 n 个顾客在系统中}\}p_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+1\right]=\frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (5)$$

（4） 求顾客排队等候所化费的平均时间 W_Q

$$W_Q=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客 A 排队等候的时间/已有 n 个顾客在系统中}\}p_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (6)$$

例二 具有有限容量的 M/M/1 排队系统在例一中排队等候的人数未加任何限制，但在本例中是有容量限制的，实际问题往往如此。如果顾客到达时发现系统的容量已满（N 人），该顾客就不再排队而离开。在这种情况下排队过程中有 N+1 个状态，即0，1，2，…，N 状态。其它的假设与例一相同。$\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=\mu$，求L、L_Q、W、W_Q。

解 排队过程仍是一生灭过程，它的状态传递速率图见图 3-9。

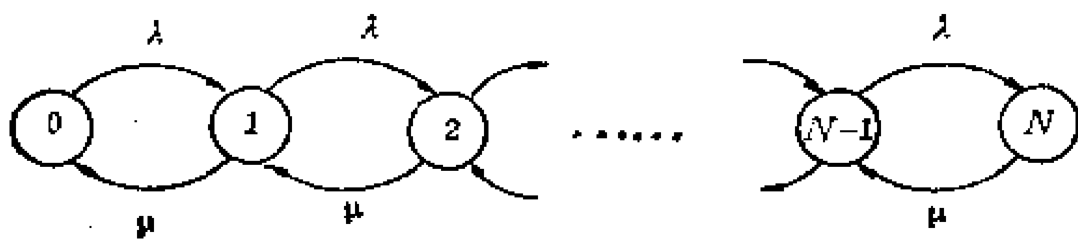


图 3-9

到达平稳分布后，相应的平衡方程式为

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda+\mu)p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ (\lambda+\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} \quad (1 \leqslant k \leqslant N-1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu p_N = \lambda p_{N-1} \end{cases}$$

于是

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{k-1} = \cdots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_N = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{N-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N p_0$$

$$1 = \sum_{k=0}^{N} p_k = p_0\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right]$$

$$= p_0 \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

所以

$$p_0 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$p_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,N) \qquad (7)$$

在容量有限的 M/M/1系统中无需假设$\frac{\lambda}{\mu}<1$。

于是可以计算出 L、L_q、W。

（1）系统中顾客的平均数

$$L=\sum_{k=0}^{N}kp_k=\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\sum_{k=0}^{N}k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\left[1+2\frac{\lambda}{\mu}+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right.$$

$$\left.+\cdots+N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1}\right]$$

$$=\frac{\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\cdot\frac{1+N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{1+N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \qquad (8)$$

（2） 排队等候的顾客平均数为

$$L_Q = \sum_{k=1}^{N}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{N} kp_k - \sum_{k=1}^{N} p_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} kp_k - (1-p_0) = L - (1-p_0) \qquad (9)$$

（3）求顾客在系统中花费时间的平均值 W

在计算 W 时需要注意一个问题。有一些顾客当他们到达服务点时发现系统已被占满，就不再等候而立即离开，这部分顾客在系统中花费的时间为零。顾客遇到系统占满的概率为 p_N。如果计算 W 时把这些顾客也计算在内，称这种计算方法得到的 W 为 $W^{(1)}$。

$$W^{(1)} = \sum_{k=0}^{N} E\{\text{顾客 A 在系统中花费的时间/系统中有 } k \text{ 个顾客}\} p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k+1}{u}\right)p_K \qquad (10)$$

应注意，在上式中相加是从 $k=0$ 起相加到 $k=N-1$ 为止，因为 $k=N$ 时该顾客 A 发现系统内已有 N 个顾客而立刻离去，该顾客在系统内的停留时间为零。

对上式化简

$$W^{(1)} = \frac{1}{u}\left[\sum_{k=0}^{N-1} kp_k + \sum_{k=0}^{N-1} p_k\right]$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N} kp_k - Np_N + 1 - p_N}{u}$$

$$= \frac{L-(N+1)p_N+1}{u} \qquad (11)$$

式中的 L 和 p_N 可从（7）、（8）式中得到。

另一种方法是在计算W时只考虑进入系统的顾客，而那些发现系统已处于N状态而立即离去的顾客不计在内，这种计算方法所得到的W称为$W^{(2)}$。

$$W^{(2)}=\sum_{k=0}^{N-1}E\{\text{顾客A在系统中化费的时间}/\text{A到达时系统中有}$$

$$k\text{个顾客}\}\frac{p_k}{1-p_N} \tag{12}$$

(12)式中$\frac{p_k}{1-p_N}$是一条件概率，即已知系统的状态为0，1，2，…，N-1时系统处于状态k的概率，k=0，1，2，…，N-1。于是

$$W^{(2)}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k+1}{\mu}\ \frac{p_k}{1-p_N}=\frac{W^{(1)}}{1-p_N}$$

$$=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu(1-p_N)} \tag{13}$$

（三）排队服务问题中的基本关系式

比较例一中的(3)式和(5)式、(4)式和(6)式，可知

$$L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\lambda W \tag{14}$$

$$L_Q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\lambda W_Q \tag{15}$$

虽然(14)、(15)两式是通过一个特殊的排队问题得到的，但是如对(14)、(15)作一些恰当的说明，则这两个关系式对所有的排队问题几乎都是正确的。这两个关系式说明了，在系统中的顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在系统中花费的时间平均值；在排队等候的顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在排队等候的时间平均值。

现在观察一下(14)、(15)两式对例二是否适用？如果用$W^{(1)}$，则$L=\lambda W^{(1)}$，说明(14)式是正确的。这是因为

$$W^{(1)}=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu}$$

$$=\frac{L-(N+1)\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^N\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}+1}{\mu}$$

$$=\left\{L+\frac{1}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N+(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right]\right\}\Big/\mu$$

$$=\left\{L+\frac{1}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\left[1+N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right]\right\}\Big/\mu$$

$$=\frac{L+\dfrac{\mu-\lambda}{\lambda}L}{\mu}=\frac{1}{\lambda}L$$

即 $L=\lambda W^{(1)}$

如果用$W^{(2)}$，则需要作适当的说明后才能使用关系式

(14)。

计算 $W^{(2)}$ 时，仅仅考虑进入系统的顾客。$W^{(2)}$ 说明了进入排队系统的顾客在系统中花费的时间平均值。另一方面顾客到达服务点时以概率 p_N 不进入排队系统而离开，以概率 $(1-p_N)$ 进入系统。根据本章§5复合泊松过程的性质知道进入系统的顾客数也服从泊松分布，它的到达率为 $\lambda(1-p_N)$。根据(13)式

$$W^{(2)}=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu(1-p_N)}=\frac{L}{\lambda(1-p_N)}$$

即
$$L=\lambda(1-p_N)W^{(2)}$$

定义 $\lambda_a=\lambda(1-p_N)$，λ_a 代表进入系统的顾客到达率，则

$$L=\lambda_a W^{(2)}$$

同理
$$L_Q=\lambda W_Q^{(1)}$$
$$L_Q=\lambda_a W_Q^{(2)}$$

因此今后用关系式

$$L=\lambda_a W \tag{16}$$

$$L_Q=\lambda_a W_Q \tag{17}$$

作为排队服务问题的基本关系式。式中 λ_a 代表（作适当说明后）顾客的到达率。

为了说明(16)、(17)式对所有排队问题是基本关系式，特作如下分析：如果系统已经进入平稳状态。取一个很长的时间间隔 T。现从两个方面计算在 T 时间内所有顾客在系统内所花费的平均总时间。(1) 由于系统已进入平稳状态，在任何时刻系统内的平均顾客数为 L，故在 T 时间内所有顾客在系统内花费的平均总时间为 LT；(2)每一顾客在系统内花费的平均时间为 W，在 T 时间内到达系统的顾客平

均数为$\lambda_e T$，如果忽略在T时刻在系统内的顾客需要花费在系统内的时间，则$\lambda_e TW \approx LT$，或$L=\lambda_e W$（假定T很大，所忽略之数与T相比是微不足道的）。

同理可说明$L_Q=\lambda_e W_Q$。

可以不采用解平衡方程式的方法，而是利用基本关系式(16)、(17)计算排队服务问题的四个基本参数L、W、L_Q、W_Q。

例三 设有一排队服务系统，其仅有一个服务人员。假定顾客按批到达服务点，每批的顾客数为K（K是常数），在[0, T)内到达的批数是服从泊松分布的随机变量，单位时间内到达的平均批数为λ；又假定服务人员每次对一位顾客服务，其服务时间是负指数分布的随机变量，其平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。求该服务系统的L、L_Q、W、W_Q四个基本参数。

解 图3-10给出了该排队服务系统的状态传递率图。

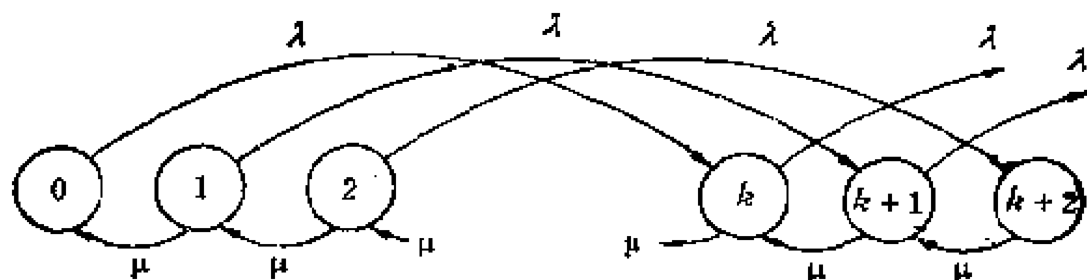


图 3-10

当排队过程进入平稳状态后，它的平衡方程式为

对于状态0 $\lambda p_0=\mu p_1$

对状态1 $(\lambda+\mu)p_1=\mu p_2$

对状态2 $(\lambda+\mu)p_2=\mu p_3$

……

对状态 $k-1$ $\qquad (\lambda+\mu)p_{K-1}=\mu p_K$

对状态 k $\qquad (\lambda+\mu)p_K=\lambda p_0+\mu p_{K+1}$

对状态 $n, n\geqslant k$ $\qquad (\lambda+\mu)p_n=\lambda p_{n-k}+\mu p_{n+1}$

同时已知 $\qquad \sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$

利用平衡方程及 $\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$ 可解出 p_0，p_1，p_2，…，然后求 L、W、L_Q、W_Q 四个参数。应注意该排队过程是无限容量的排队过程，与例一相同，有一个收敛性问题，也就是说，该系统是否存在平稳分布，如存在，则可解出 p_0，p_1，…，p_n，…。其实，在该过程存在平稳状态的前提下，利用(16)、(17)两个关系式，可求得 L、W、L_Q、W_Q。

W = 顾客在系统中花费的时间平均值

$=\sum_{n=0}^{\infty}E$｛顾客A在系统中化费的时间/A到达时系统处于状态 n｝p_n。先求"顾客A到达时系统处于状态 n 的条件下，顾客A在系统中化费的时间的条件平均值"，即上式中的E｛ ｝。由于顾客A到达时系统内已有 n 个顾客，故必需平均化费 $\frac{n}{\mu}$ 才能轮上对本批顾客服务。本批顾客有K人，其中第一人的平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$，而最后一人需等候 $\frac{K-1}{\mu}$ 后才被服务，其平均服务时间也为 $\frac{1}{\mu}$，因此本批顾客的平均服务时间为 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{K}{\mu}\right)=\frac{1+K}{2\mu}$。所以

E｛顾客A在系统中化费的时间/A到达时系统处于状态 n｝

$$=\left(n+\frac{1+K}{2}\right)\frac{1}{\mu}$$

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1+K}{2}\right)\frac{1}{\mu}p_n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}np_n\right)\frac{1}{\mu}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n\right)\frac{1}{\mu}\,\frac{1+K}{2}$$

$$=\frac{1}{\mu}L+\frac{1}{\mu}\,\frac{1+K}{2}$$

其中
$$L=\sum_{n=0}^{\infty}np_n$$

利用基本关系式
$$L=\lambda_s W$$

则
$$W=\frac{1}{\mu}\lambda_s W+\frac{1}{\mu}\,\frac{1+K}{2}$$

剩下的一个问题是确定 λ_s。根据题意，单位时间内到达的平均批数为 λ，每批顾客为 K 人，故单位时间内到达的顾客平均数为 λK，即 $\lambda_s=\lambda K$。

于是
$$W=\frac{1}{\mu}\lambda KW+\frac{1}{\mu}\,\frac{1+K}{2}$$

解得
$$W=\frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)} \tag{18}$$

故
$$L=\lambda KW=\frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu-\lambda K)} \tag{19}$$

$$W_Q=W-（一个顾客的平均服务时间）$$

$$=W-\frac{1}{\mu}=\frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)}-\frac{1}{\mu} \tag{20}$$

$$L_Q=\lambda_s W_Q=\frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu-\lambda K)}-\frac{\lambda K}{\mu} \tag{21}$$

（四）多个服务员排队服务问题，M/M/s 排队的研究

在这类排队问题中假定：（1）顾客到达过程是泊松过程，顾客到达率为λ，（2）有s个服务人员；（3）每个服务人员对顾客的服务时间均为负指数分布的随机变量，其平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$；（4）当s个服务人员均在服务时，再到达的顾客参加排队，且按先到先服务的原则进行服务；如果顾客到达时系统中正在工作的服务人员不足s人，则该顾客立刻接受服务；（5）顾客的到达过程和各个服务人员对顾客的服务时间均是统计独立的。这类排队过程仍是一个生灭过程。为了便于讨论，仅研究进入平稳状态后各状态的概率分布以及L和W。

例四 无容量限制的M/M/s排队的研究

解 它是一生灭过程，其状态空间为{0，1，2，…}。

$$\lambda_n=\lambda \tag{22}$$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu & (1\leqslant n\leqslant s)\\ s\mu & (n>s)\end{cases} \tag{23}$$

根据§9（三）的（34）、（35）式得

$$p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0$$

$$p_2=\frac{\lambda}{2\mu}p_1=\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}p_0$$

………

$$p_K=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \qquad (k\leqslant s)$$

$$p_{s+1}=\frac{\lambda}{s\mu}p_s=\frac{1}{s}\,\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}p_0$$

$$p_{s+2}=\left(\frac{1}{s}\right)^2\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2}p_0$$

………

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}p_n=\left\{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left[1+\frac{\lambda}{s\mu}+\cdots+\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k+\cdots\right]\right\}p_0$$

$$=\left\{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k\right]\right\}p_0$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right)p_0 \qquad (24)$$

所以
$$p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)}} \qquad (25)$$

(24) 式中 $1+\frac{\lambda}{s\mu}+\cdots+\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k+\cdots$应是一收敛级数才能保证该排队过程能有平稳状态，即必须要求$\frac{\lambda}{s\mu}<1$才能获得各状态的极限概率。

$$p_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad (n\leqslant s) \qquad (26)$$

$$p_n = \frac{1}{s!}\,\frac{1}{s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad (n>s) \tag{27}$$

系统中顾客的平均数 $L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$

故 $L = p_0\left[\sum_{n=1}^{s} n\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{s^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n\right]$

$$= p_0\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{s^s}{s!}\,\frac{s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{s+1}}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right.$$

$$\left. + \frac{s^s}{s!}\,\frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{s+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}\right] \tag{28}$$

根据(25)式 $\qquad p_0\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$

$$= 1 - p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)} \tag{29}$$

将(29)式代入(28)式得

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \tag{30}$$

L_Q = 排队等候的顾客平均数

$$= \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n = \sum_{n=s+1}^{\infty} n p_n - s\sum_{n=s+1}^{\infty} p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n - p_1 - 2p_2 - \cdots$$

$$- s p_s - s \sum_{n=s+1}^{\infty} p_n$$

$$= L - p_0 \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 2\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 3\frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \right.$$

$$\left. + \cdots + s\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s + s \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{1}{s!}\frac{1}{s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$= L - p_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots \right.$$

$$+ \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}$$

$$\left. + \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \right]$$

$$= L - \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)!\left(s - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \qquad (31)$$

关于顾客排队等候所化费时间的平均值计算需要考虑：(1)只有当系统中的顾客数超过 s 时才会出现排队。若系统内有 s 个顾客（出现这种情况的概率为 p_s），此时再进入一个顾客，则该顾客需要排队；当 s 个被服务的顾客中有一人结束服务时，他才能接受服务，故他的平均等候时间为 $\frac{1}{s\mu}$；(2)如系统内顾客为 n（$n>s$），出现顾客为 n 的概率是 p_n，若此时再进入一个顾客，则该顾客的平均等候时

间为 $(n-s+1)\frac{1}{s\mu}$。于是

$$W_q=\sum_{n=s}^{\infty}(n-s+1)\frac{1}{s\mu}p_n$$

$$=\left[\sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n+\sum_{n=s}^{\infty}p_n\right]\frac{1}{s\mu}$$

$$=\frac{1}{s\mu}p_0\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(1+\frac{\lambda}{s\mu}+\frac{\lambda^2}{s^2\mu^2}+\cdots\right)\right)$$

$$=\frac{1}{s\mu}p_0\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{s}{s-\frac{\lambda}{\mu}}\right)$$

$$=\frac{p_0}{\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\tag{32}$$

顾客在系统中化费时间的平均值

$$W=\sum_{n=s}^{\infty}\left[\frac{n-s+1}{s\mu}+\frac{1}{\mu}\right]p_n+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{\mu}p_n$$

$$=\sum_{n=s}^{\infty}\frac{n-s+1}{s\mu}p_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n$$

$$= \frac{p_0}{\mu} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} + \frac{1}{\mu} \tag{33}$$

比较(30)、(33)式及比较(31)、(32)式得

$$L = \lambda W \tag{34}$$

$$L_Q = \lambda W_Q \tag{35}$$

它完全符合基本关系式(16)、(17)。

例五 具有有限容量的 M/M/s 系统 设系统的容量为 k，如顾客到达时系统中已有 k 个顾客，则该顾客即离去，不参加排队。$k \geqslant s$。仅计算在系统进入平稳状态后的平稳分布。

解 它是一生灭过程，其参数为

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (0 \leqslant n < k) \\ 0 & (n \geqslant k) \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ n\mu & (0 < n \leqslant s) \\ s\mu & (s < n \leqslant k) \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 \qquad (0 < n \leqslant s)$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n} p_0 \qquad (s < n \leqslant k)$$

$$1 = \sum_{n=0}^{k} p_n = p_0\left[\sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{1}{s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

于是可得 p_0，p_1，…，p_s，…，p_k。

如果系统的容量为 s，则该问题就是有名的电话交换问题（见 §9（三）例五）。

（五） 机器维修问题

设有 M 台自动机，在运行过程中的任何时刻，都可能发生故障而需要维修，机器从开始运行起到达需要维修间的时间间隔是一个负指数分布的随机变量。如果某机器在时刻 t 处于运转状态，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内需要维修的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；反之，若在时刻 t 机器正在维修，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内机器恢复为运转状态的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$。如果为了管理 M 台自动机仅配备一个维修工，那么当有一台机器发生故障时该机器可立刻接受维修；当维修工正在维修某一机器而另有一机器发生故障时，新发生故障的机器排队等候。若不运转的机器有 n 台，则其中一台正在被维修，n－1 台参与排队。称该系统处于状态 n；若所有机器处于运转状态，则称该系统处于 0 状态。因此过程有 M＋1 个状态：0，1，2，…，M。因此维修问题也是一个生灭过程，其中

$$\lambda_n=\begin{cases}(M-n)\lambda & (n\leqslant M)\\ 0 & (n>M)\end{cases}$$

$$\mu_n=\mu$$

图 3-11 给出了它的状态传递率图。

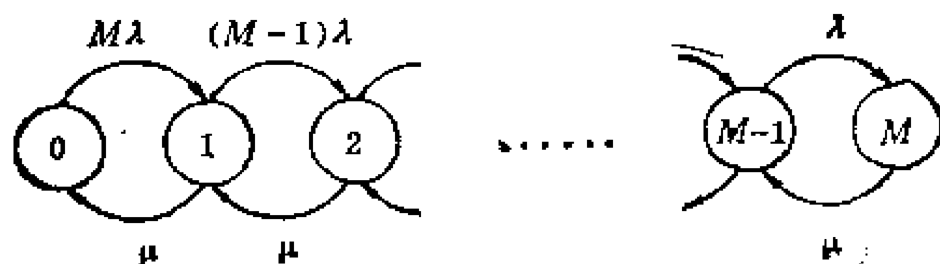


图 3-11

于是得平衡方程式：

$$M\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$[(M-1)\lambda + \mu]p_1 = M\lambda p_0 + \mu p_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$[(M-n)\lambda + \mu]p_n$$

$$= (M-n+1)\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mu p_M = \lambda p_{M-1}$$

$$p_1 = \frac{M\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{M(M-1)\lambda^2}{\mu^2} p_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_{n+1} = \frac{M(M-1)\cdots(M-n)\lambda^{n+1}}{\mu^{n+1}} p_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_M = \frac{M!\lambda^M}{\mu^M} p_0$$

$$1 = \sum_{n=0}^{M} p_n = p_0\left[1 + M\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + M(M-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + M!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M\right]$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} \frac{M!}{(M-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

$$p_n = \frac{\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=0}^{M} \frac{M!}{(M-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M)$$

计算系统中不工作的自动机的平均数 L：

$$L=\sum_{n=0}^{M} np_n$$

从平衡方程式知

$$\begin{aligned}(M-n)\lambda p_n-\mu p_{n+1}\\ =\lambda(M-n+1)p_{n-1}-\mu p_n\\ =\cdots=\lambda p_{M-1}-\mu p_M=0\end{aligned}$$

故
$$\lambda\sum_{n=1}^{M}(M-n+1)p_{n-1}=\mu\sum_{n=1}^{M}p_n$$

$$M\lambda(1-p_M)-\lambda\sum_{n=1}^{M}(n-1)p_{n-1}=\mu(1-p_0)$$

$$M\lambda-\lambda\sum_{n'=0}^{M-1}n'p_{n'}-\lambda Mp_M=\mu(1-p_0)$$

$$M\lambda-\lambda L=\mu(1-p_0)$$

$$L=M-\frac{\mu}{\lambda}(1-p_0)$$

等待维修的机器的平均值为 L_Q

$$L_Q=\sum_{n=1}^{M}(n-1)p_n$$

$$=\sum_{n=1}^{M}np_n-\sum_{n=1}^{M}p_n=L-(1-p_0)$$

或
$$L_Q=M-\frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-p_0)$$

例六 设 $\lambda/\mu=0.1$，$M=6$，计算平稳时各状态的概率及 L_Q。

解 根据上面的分析得下表：

系统的状态(n)	等待维修的机器数(n−1)	p_n
0	0	0.4845149
1	0	0.2907089
2	1	0.1453545
3	2	0.05814179
4	3	0.01744254
5	4	0.003488507
6	5	0.0003488507

因此修理工空闲着的概率为 $p_0=0.4845149$

等待维修的机器的平均值 $=L_Q=M-\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-p_0)$

$$=0.3296639$$

上面讨论中假设自动机数为 M，维修工只有一人。若 M 台机器由 r 个维修工来管理（r<M），其效果将是改善呢还是降低呢？假定其它的假设均不变。若仍以不运转的机器数 n 代表系统所处的状态，n<r 说明有（r−n）个维修工空闲着，有 n 台机器在维修；n≥r 说明 r 个维修工均在维修机器，有（n−r）台机器在等待维修。图 3-12 给出了 M 台机器、r 个维修工时的状态传递速率图。

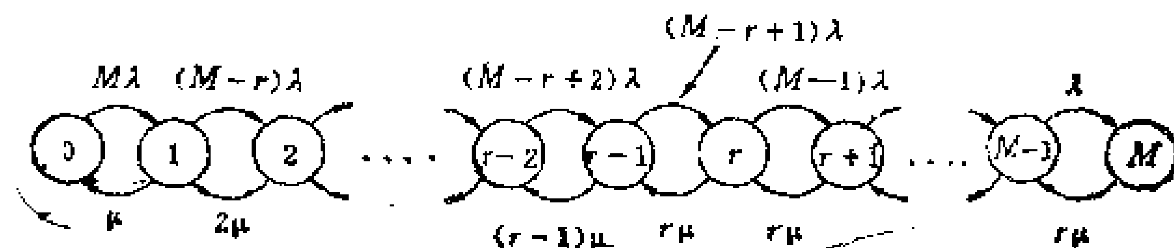


图 3-12

该系统的参数为

$$\lambda_0 = M\lambda \qquad \mu_0 = 0$$

$$\lambda_n = (M-n)\lambda \quad \mu_n = n\mu \qquad (1 \leqslant n < r)$$

$$\lambda_n = (M-n)\lambda \quad \mu_n = r\mu \qquad (r \leqslant n \leqslant M)$$

于是它的平衡方程式为

$$M\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(M-n)\lambda p_n + n\mu p_n = (M-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} \qquad (1 \leqslant n < r)$$

$$(M-n)\lambda p_n + r\mu p_n = (M-n+1)\lambda p_{n-1} + r\mu p_{n+1} \qquad (r \leqslant n < M)$$

$$\lambda p_{M-1} = r\mu p_M$$

因此
$$p_1 = \frac{M\lambda}{\mu} p_0$$

$$(M-n)\lambda p_n = (n+1)\mu p_{n+1} \qquad (1 \leqslant n < r)$$

$$(M-n)\lambda p_n = r\mu p_{n+1} \qquad (r \leqslant n < M)$$

$$p_{n+1} = \frac{(M-n)\lambda}{(n+1)\mu} p_n = \frac{(M-n)(M-n+1)\cdots M}{(n+1)n\cdots 1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0 \qquad (1 \leqslant n < r)$$

$$p_{n+1} = \frac{(M-n)\lambda}{r\mu} p_n = \frac{(M-n)(M-n+1)\cdots M}{r^{n+1-r} r(r-1)\cdots 1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0 \qquad (r \leqslant n < M)$$

再根据 $\sum_{n=0}^{M} p_n = 1$，就可算出 $p_0, p_1, \cdots, p_M$。

例七 若 $\frac{\lambda}{\mu} = 0.1$，$M = 20$，$r = 3$，求各 p_n 的值。

解 把$\frac{\lambda}{\mu}=0.1$，$M=20$，$r=3$ 代入上面所得的公式并计算之，得下表：

n	被维修的机器数	待维修的机器数	闲着的维修工	p_n
0	0	0	3	0.13625
1	1	0	2	0.27250
2	2	0	1	0.25883
3	3	0	0	0.15533
4	3	1	0	0.08802
5	3	2	0	0.04694
6	3	3	0	0.02347
7	3	4	0	0.01095
8	3	5	0	0.00475
9	3	6	0	0.00190
10	3	7	0	0.00070
11	3	8	0	0.00023
12	3	9	0	0.00007

比较例六和例七。二个例子中$\frac{\lambda}{\mu}=0.1$；例七中机器数$M=20$，修理工$r=3$，平均每个修理工管理的机器数$\frac{M}{r}=\frac{20}{3}=6.6$；而例六中一个修理工管理6台机器。这说明例七中每个工人平均管理的机器数比例六的情况提高了一些。下面比较例六和例七的效益。设

$$\frac{L_Q}{M}=\frac{\text{待修机器的平均数}}{\text{机器总数}}$$

用$\frac{L_Q}{M}$来定义机器的损失系数。设

$$\frac{\rho}{r}=\frac{\text{闲着的修理工平均数}}{\text{修理工人数}}$$

用$\frac{\rho}{r}$来定义修理工的损失系数。在例七中

$$L_Q=\sum_{n=r+1}^{M}(n-r)p_n=1p_4+2p_5$$

$$+3p_6+\cdots+17p_{20}=0.33866$$

$$\frac{L_Q}{M}=0.016934$$

$$\rho=3p_0+2p_1+1p_2=1.21263$$

$$\frac{\rho}{r}=0.40421$$

在例六中 $L_Q=0.3296639$ $\frac{L_Q}{M}=0.0549$

$\rho=0.4845149$ $\frac{\rho}{r}=0.4845$

现把两种情况所得的结果列于下表，以比较其效益。

	例六	例七
机器数(M)	6	20
修理工数(r)	1	3
平均每个修理工管理的机器数$\left(\frac{M}{r}\right)$	6	6.67
修理工的损失系数$\left(\frac{\rho}{r}\right)$	0.4845	0.4042
机器的损失系数$\left(\frac{L_Q}{M}\right)$	0.0549	0.0169

上表说明，例七的办法(用三个修理工管理20台机器)

要比例六的办法(用一个修理工管理6台机器)更有效一些。

§11 服务时间为Γ分布的排队系统

§10中讨论的排队问题都假定了服务时间服从负指数分布规律，实际上还有其他的分布规律，这就使得分析更为复杂。本节中假设：（1）顾客在〔0，t）内按泊松分布规律到达服务点；（2）一个服务员；（3）服务时间为Γ分布的随机变量，其参数为（K，μ），即服务时间的概率密度为

$$f(t)=\mu e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (t\geqslant 0)$$

其中K、μ为常数。在这三个假设的前提下、计算顾客在系统中花费的时间平均值以及系统中顾客的平均数。

虽然服务时间已不是负指数分布的随机变量，但在这三个假设下，仍可利用§10的结论来处理这类问题。因为以（K、μ）为参数的Γ分布的随机变量可以看作K个独立、同负指数分布的随机变量之和，故可把本问题看作“顾客成批到达，每批K个顾客；〔0，t)内到达的批数按泊松分布规律、其参数为λ；一个服务员，服务时间为负指数分布的随机变量，平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$”的这样一个排队服务问题。于是可以利用§10中例三的结果，根据(18)式，得：

$$W=\frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)}+\left[K-\frac{1}{2}(K+1)\right]\frac{1}{\mu}$$

$$=\frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)}+\frac{K-1}{2\mu}$$

$$= \frac{2\mu K - \lambda K(K-1)}{2\mu(\mu - \lambda K)}$$

$$L = \lambda_a W = \frac{\lambda[2\mu K - \lambda K(K-1)]}{2\mu(\mu - \lambda k)}$$

其原因是：本问题中的W相当于§10例三中的一组人员(K人)在系统中全部结束服务所需的平均时间，它等于§10例三中(18)式给出的平均时间$\frac{K+1}{2(\mu-\lambda K)}$加上$\left(K-\frac{K+1}{2}\right)\frac{1}{\mu}$。在例三中计算的是K人中的中间一人服务结束所需的平均时间，从中间一人到最后第K人结束服务还需要增加时间$\left(K-\frac{K+1}{2}\right)\frac{1}{\mu}$。

需要指出的是，本问题中要求$\mu>\lambda K$，否则该系统没有极限分布。

§12 更新过程*

§2说明了泊松过程是一种计数过程，§3说明了这类过程中两个连续出现事件间的时间间隔是独立同负指数分布的随机变量。本节将进一步推广之。如有一个计数过程，它的相邻两个连续出现事件间的时间间隔是一个独立同分布的随机变量，其概率密度为f(t)，分布函数为F(t)，则称这类过程为更新过程。

设$\{N(t), t\geq 0\}$是一个计数过程，x_n表示第$n-1$次事件和第n次事件间的时间间隔($n\geq 1$)。

定义 设$\{x_1, x_2, \cdots\}$为一非负、独立、同分布随机变量序列，则称该计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$为更新过程。

例如，假如我们能无限地提供同类型灯泡，其寿命是彼此统计独立、同分布的随机变量。若每次使用一个灯泡，当该灯泡损坏后立刻换上一个新的，则在时间 t 内损坏的灯泡数是一更新过程 $\{N(t), t\geq 0\}$。其中N(t) 表示在 t 时间内损坏的灯泡数。

（一） 能否在有限的时间内出现无穷次更新

设
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (n\geq 1) \tag{1}$$

$S_0 = 0$ 代表过程的起始点

则 $S_1 = x_1$ 代表过程中第一次更新时刻

$S_2 = x_1 + x_2$ 代表过程中第二次更新时刻

…………

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 表示过程中第n次更新时刻

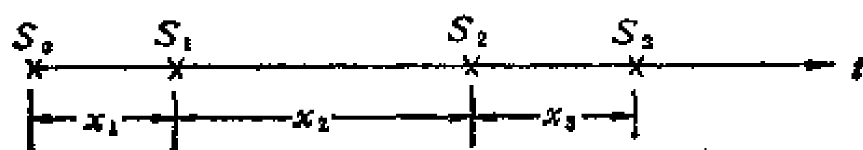


图 3-13

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的分布函数为 F(t)，概率密度为 f(t)，则随机变量 S_n 的概率密度为 f(t) 的 n 次卷积。设

$$\mu = E\{x_n\} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

由于 x_n 为非负随机变量，也不恒为 0，则 $\mu > 0$，

$$F(0^+) = P\{x_n = 0\} < 1$$

因 S_n 代表 n 次更新所化费的时间，则

$$N(t)=\max\{n;\ S_n<t\} \tag{2}$$

如果在 [0,t]内仅出现 n 次更新，它说明$S_n<t$，而 $t\leqslant S_{n+1}$。根据强大数定律，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{S_n}{n}\to\mu$，而且是依概率 1 趋于 μ。由于 $\mu>0$，故只有当 $n\to\infty$时，s_n 才有可能趋于 ∞；反之，若$S_n\to\infty$，必然要求 n 为无穷。这就说明在有限的时间内只能出现有限次更新。即当 t 为有限值时

$$N(t)=\max\{n;\ S_n<t\}<\infty$$

而 $N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\infty$，且是依概率 1 趋于无限。这是因为

$$\begin{aligned}P\{N(\infty)<\infty\}&=P\{\text{至少其中有某一个 } n,\ x_n=\infty\}\\&=P\left\{\bigcup_{n=1}^{N}(x_n=\infty)\right\}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}P\{x_n=\infty\}=0\end{aligned}$$

（二） 计算 N(t) 的概率分布，即当给定 F(t) 或 f(t) 时计算 N(t) 的概率分布

研究这个问题的出发点是利用等价事件的概念。

$$\{N(t)\geqslant n\}\leftrightarrows\{S_n<t\} \tag{3}$$

$$\{N(t)\geqslant n\}\leftrightarrows\{N(t)=n\}\cup\{N(t)\geqslant(n+1)\} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}P\{N(t)=n\}&=P\{N(t)\geqslant n\}-P\{N(t)\geqslant(n+1)\}\\&=P\{S_n<t\}-P\{S_{n+1}<t\}\end{aligned}$$

设 S_n 的分布函数为 $F_n(t)$，因 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，则$F_n(t)$ 可由 f(t) 的 n 次卷积求得。于是

$$P\{N(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t) \tag{5}$$

因此从原理上说，（5）式已给出了 $N(t)=n$ 的概率。

例一 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是独立、同分布、非负整值随机变量，且 $P\{x_n = i\} = p(1-p)^{i-1}$，$i \geqslant 1$，求 $P\{N(t) = n\}$。

解 根据题意，时间间隔 x_n 服从几何分布，则 x_i 取 i 的概率相当于在贝努利试验中在第 i 次试验时首次获得成功的概率，而每次试验成功的概率为 p。因此 S_n 取 k 的概率相当于在贝努利试验中在第 k 次试验时恰得到第 n 次成功的概率，即

$$P\{S_n = k\} = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & (k \geqslant n) \\ 0 & (k < n) \end{cases}$$

根据(5) $P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$

$$= P\{S_n < t\} - P\{S_{n+1} < t\}$$

$$= \sum_{k=n}^{[t]} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$- \sum_{k=n+1}^{[t]} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$$

式中 $[t]$ 表示不大于t的最大正整数。

(三) 更新过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 的数学期望

$$m(t) = E\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} p\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n < t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \quad (6)$$

m(t) 称为更新过程的数学期望，或更新过程的均值，或更新函数。

(6)式两边对时间取导数得

$$\lambda(t) \triangleq \frac{dm(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \quad (7)$$

λ(t) 称为更新强度。

(7)式两边取拉氏变换得

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) e^{-st} dt = \Lambda(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt$$

因 $f_n(t)$ 是 S_n 的概率密度，而 $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$，故 $f_n(t)$ 为 $f(t)$ 的 n 次卷积。设

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \phi(s)$$

则

$$\int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt = [\phi(s)]^n$$

于是

$$\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi(s)]^n = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)} \quad (8)$$

$$\phi(s) = \frac{\Lambda(s)}{1+\Lambda(s)} \quad (9)$$

(8)、(9)两式给出了时间间隔概率密度与更新强度之间的关系。由(8)式

$$\phi(s) = \Lambda(s) - \Lambda(s)\phi(s)$$

利用拉氏反变换得

$$f(t)=\lambda(t)-\int_0^t\lambda(t-u)f(u)du \tag{10}$$

(10)式说明了当给定 $\lambda(t)$ 后，更新过程的间隔概率密度 $f(t)$ 是积分方程(10)式的解。这个积分方程称为更新方程。

例二　某更新过程的更新强度 $\lambda(t)$ 为

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda & (t\geqslant 0,\lambda>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

求该更新过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的时间间隔 x_n 的概率密度。

解

$$\Lambda(s)=\int_0^\infty\lambda(t)e^{-st}dt=\frac{\lambda}{s}$$

$$\phi(s)=\frac{\frac{\lambda}{s}}{1+\frac{\lambda}{s}}=\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$f(t)=L^{-1}\{\phi(s)\}=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

即更新强度 $\lambda(t)$ 为常数的更新过程为泊松过程，时间间隔服从负指数分布规律。

(四)　极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}$ 的研究

在本节(一)中已说明在有限长时间内更新的次数是有限的，而当 $t\to\infty$ 时 $N(t)$ 依概率 1 趋于无穷，目前的问题是要研究N (t) 以多大的速度趋于无穷，即求

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}。$$

根据定义，S_3 表示第三次更新出现的时刻，而 $N(t)=3$

表示到 t 时刻仅出现三次更新，于是 $S_{N(t)=3}$ 表示最后一次更新即第三次更新出现在 t 之前。同理 $S_{N(t)}$ 说明在 t 内出现 N 次更新，而最后一次更新即第 N 次更新出现在 t之前。那么，$S_{N(t)+1}$ 说明在 t 内出现 N次更新，而N(t)+1 次更新出现在 t 时刻或 t 之后，$S_{N(t)+1}$ 表示第 N(t)+1 次更新出现的时刻。见图3-14。

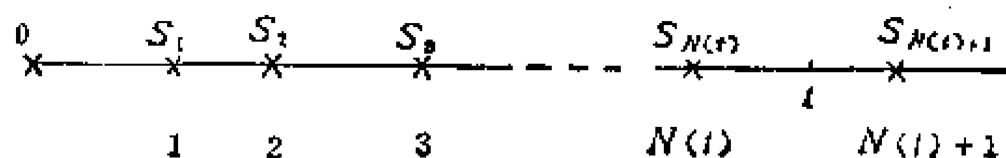


图 3-14

于是可得 $S_{N(t)}<t\leqslant S_{N(t)+1}$

或
$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}<\frac{t}{N(t)}\leqslant\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

而
$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\frac{\sum_{i=1}^{N(t)}x_i}{N(t)}$$
表示 N(t) 个独立同分布的随机变量的平均值。

前面的讨论中已知当 $t\to\infty$ 时 $N(t)\to\infty$，$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ 依概率1趋于 μ。

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}=\left(\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right)\left(\frac{N(t)+1}{N(t)}\right)$$

同上述理由，当 $t\to\infty$ 时 $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}$ 依概率1趋于 μ。

而
$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)+1}{N(t)}=\lim_{N(t)\to\infty}\frac{N(t)+1}{N(t)}=1$$

故当 $t\to\infty$ 时 $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}\to\mu$。

因为 $\frac{t}{N(t)}$ 位于 $\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ 和 $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$ 两值之间，而它们均趋于 μ，因此当 $t\to\infty$ 时

$$\frac{t}{N(t)}\to\mu$$

或
$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

因此称 $\frac{1}{\mu}$ 为更新过程的速率。

例三 某君的收音机使用一节电池供电。当电池失效时他立刻换一节同一型号的新电池。如果电池的寿命为均匀分布在（30小时，60小时）内的随机变量，问在长时间工作情况下某君更换电池的速率为何？

解 设 $N(t)$ 表示在 t 时间内失效的电池数（即更新的电池数）。在长时间工作情况下，电池的更新速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

而 $\mu=\int_{30}^{60}t\frac{1}{30}dt=\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{2}(60^2-30^2)=45$（小时）

故 $$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{45}\left(\frac{1}{小时}\right)$$

例四 在上例中，如果某君没有储备电池，当收音机所用电池失效时，他立刻在市场上采购同一型号的电池，他获得一新电池所需的时间也是一均匀分布的随机变量，均匀分布于（0小时，1小时）之间。求在长时间工作情况下，某君更换电池的速率。

解 在两次相邻更换间所需的平均时间为

$$\mu=E\{x_i\}+E\{u_i\}$$

其中 $E\{x_i\}$ = 电池的平均寿命 = 45（小时）

$E\{u_i\}$ = 采购电池所需时间的平均值

$$=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\text{（小时）}$$

故 $$\mu=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}\text{（小时）}$$

长时间工作情况下某君更换电池的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=\frac{2}{91}\left(\frac{1}{小时}\right)$$

例五 设有潜在顾客到达一个服务员的银行，在$[0, t)$内到达的潜在顾客服从泊松分布，其到达率为 λ。顾客到达时如果服务员空着，他就进入银行接受服务，如果到达时服务员正在工作，他就离开。假定对顾客的服务时间是服从某一分布的随机变量。求

(1)顾客进入银行的速率；

(2)进入银行的顾客占潜在顾客的比率。

解 由于到达银行的潜在顾客服从泊松分布，则两个相邻的潜在顾客间的时间是服从负指数分布的随机变量。而负

指数分布是一无记忆的分布。因此两个相邻的进入银行的顾客间的平均时间为

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda}$$

其中 G 表示服务时间的分布规律，μ_G 表示服务时间的平均值。因此的长时间工作情况下，进入银行的顾客速率为

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}$$

因潜在顾客的到达率为 λ，则进入银行的顾客占潜在顾客的比率为

$$\left(\frac{\dfrac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}}{\lambda}\right) = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}$$

习　　题

1．设有一泊松过程 $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$，若有两时刻 s、t，且 $s < t$，试证明

$$P\{N(s) = k / N(t) = n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

其中　　　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

2．设顾客以泊松分布抵达银行，其到达速率为 λ。若已知在第一小时内有两个顾客抵达银行，问：

（1）此两个顾客均在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

（2）至少有一个顾客在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

3. 设$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$为泊松过程，其参数为λ。设$\Psi_{N(t)}(s)$是随机变量$N(t)$的母函数，证明

（1）$\Psi_{N(t+\Delta t)}(s)=\Psi_{N(t)}(s)\Psi_{N(\Delta t)}(s)$

（2）
$$\frac{\partial \Psi_{N(t)}(s)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Psi_{N(t+\Delta t)}(s)-\Psi_{N(t)}(s)}{\Delta t}$$
$$=\Psi_{N(t)}(s)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Psi_{N(\Delta t)}(s)-1}{\Delta t}$$

（3）当$|s|<1$时
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Psi_{N(\Delta t)}(s-1)}{\Delta t}=\lambda(s-1)$$

或
$$\frac{\partial \Psi_{N(t)}(s)}{\partial t}=\lambda(s-1)\Psi_{N(t)}(s)$$

（在证明过程中运用泊松过程的四个假设）

4. 利用习题3得到的偏微分方程式求：

（1）泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$的母函数$\Psi_{N(t)}(s)$的表示式；

（2）$P\{N(t)=k\}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$的表示式。

5. 设有非齐次泊松过程$\{N(t),\ t\geqslant 0\}$，它的均值函数$m(t)$可以表示为$m(t)=t^2+2t, t\geqslant 0$，求在$t=4$，$t=5$间出现n个事件的概率。

6. 设ξ、η是两个非负整值随机变量，定义二元离散随机变量的母函数为
$$\Phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}z_1{}^k z_2{}^n P\{\xi=k,\eta=n\}$$

k、n均为非负整数。

（1）求$\Phi_\xi(z)$，用$\Phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（2）若ξ、η是彼此统计独立的随机变量，试证明

$$\Phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\Phi_\xi(z_1)\Phi_\eta(z_2)$$

（3）设有随机变量$w=\xi+\eta$，求随机变量w的母函数，用$\Phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（4）设有二元随机变量ξ、η，其母函数为

$$\Phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\exp\{-a_1-a_2-b+a_1z_1+a_2z_2+bz_1z_2\}$$

其中a_1，a_2，$b>0$，问ξ的分布是否符合泊松分布？η的分布是否符合泊松分布？ξ、η是否统计独立？若$w=\xi+\eta$问w是否符合泊松分布？

7． 设$\{N_1(t),t\geqslant0\}$和$\{N_2(t),t\geqslant0\}$是相互统计独立的泊松过程，其参数分别为λ_1和λ_2。若

$$N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$$

问$\{N_0(t),t\geqslant0\}$是否为泊松过程？

8． 设有复合泊松过程$\left\{X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n,\ t\geqslant0\right\}$

其中Y_n，$n=1$，2，3，…是彼此统计独立、同分布的随机变量，$\{N(t),\ t\geqslant0\}$是一泊松过程，Y_n和$N(t)$也是统计独立的。求复合泊松过程$\{X(t),\ t\geqslant0\}$的特征函数。

如果Y_n，$n=1$，2，3，…的概率分布为

$$P\{Y_n=1\}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\{Y_n=-1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

而泊松过程$\{N(t),\ t\geqslant0\}$的参数$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$，试证明$\{X(t),\ t\geqslant0\}$的特征函数为

$$\Phi_{X(t)}(v)=\exp\{\lambda_1te^{jv}+\lambda_2te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}$$

试比较此结果与7题所得的结果，说明7题中的$N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$是一复合泊松过程。

9. 在某交通道上设置了一个车辆记录器，记录南行、北行车辆的总数。设$X(t)$代表在$[0,t)$内南行的车辆数，$Y(t)$代表$[0,t)$内北行的车辆数，$X(t)$、$Y(t)$均服从泊松分布，且相互统计独立；设λ和η分别代表在单位时间内通过的南行、北行车辆平均数。如果在t时车辆记录器记录的车辆数为n，问其中 k 辆属于南行车的概率为何？

10. 设$\{X_1(t),\ t\geqslant 0\}$、$\{X_2(t),\ t\geqslant 0\}$、$\{X_3(t),\ t\geqslant 0\}$为三个相互统计独立的泊松过程，$\lambda_1$、$\lambda_2$和$\lambda_3$分别为$X_1(t)$、$X_2(t)$和$X_3(t)$的参数。若$X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n$时，求$X_1(t)=k$ $X_2(t)=j$的条件概率，即求

$$P\{X_1(t)=k,\ X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}。$$

11. 有一个由两个元件组成的系统，这两种元件当遇到下列不同类型的振动时遭受损坏。如出现第一种类型振动，将使甲失效；如出现第二类型振动，将使元件乙失效；如出现第三种类型振动，将使甲乙两元件同时失效。在$(0,t)$内出现一、二、三种类型振动的次数均服从泊松分布；出现一、二、三种类型振动的事件均是彼此统计独立的；一、二、三种类型振动的出现率分别为λ_1、λ_2、λ_3。又设X_1代表元件甲的寿命，X_2代表元件乙的寿命。试证明：

（1）$P\{X_1\geqslant s,\ X_2\geqslant t\}$

$$=\exp\{-\lambda_1 s-\lambda_2 t-\lambda_3\max(t,\ s)\}$$

（2）$P\{X_1\geqslant s\}=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)s\}$

（3）$P\{X_2\geqslant t\}=\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}$

12. 设有一脉冲串送入计数器，在$[0,\ t)$出现的脉冲数服从泊松分布，其脉冲的出现率为λ。脉冲到达计数器可以被记录，也可能不被记录。每一个脉冲能被记录的概率为

p_r。不同脉冲是否被记录是相互统计独立的。设 $x(t)$ 是在 $[0, t)$ 内被记录的脉冲数，

（1）求 $P\{X(t)=k\}$，$k=0, 1, 2, \cdots$

（2）$\{X(t), t\geqslant 0\}$是否服从泊松分布？

13. 设有一非齐次泊松过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$，其中

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$$

ω 为常数。求：

（1）过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$的均值 $E\{N(t)\}$；

（2）过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$的方差 $D\{N(t)\}$。

14. 设有两个相互统计独立的泊松过程$\{X(t), t\geqslant 0\}$和$\{Y(t), t\geqslant 0\}$，两个过程的事件出现率分别为 λ_x 和 λ_y。试证明在过程$\{X(t), t\geqslant 0\}$中两个相邻事件间，过程$\{Y(t), t\geqslant 0\}$出现 k 个事件的概率为

$$P=\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\right)^k (k=0, 1, 2, \cdots)$$

15. 设有两个通信用信道，每个信道的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，其均值为$\frac{1}{\lambda}$。两个信道何时产生中断是相互统计独立的。信道一旦中断，立刻进行维修，其维修时间也是负指数分布的随机变量，其维修平均时间为$\frac{1}{\mu}$。两个信道的维修时间也是统计独立的。设两个信道在 $t=0$ 时均正常工作。

（1）求这两个信道组成的系统的 Q 矩阵；

（2）列出前进方程式；

（3）求在 t 时两个信道均处于正常工作状态的概率；

（4）求在[0，t)内两个信道连续工作的概率。

16．一条电路供给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现作如下假设：

（1）若一焊工在 t 时用电、而在 $(t, t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$；

（2）若一焊工在 t 时没有用电、而在 $(t, t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。

每一焊工的工作情况是相互统计独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时正在用电的焊工数。

（1）求该过程的状态空间；

（2）求该过程的 Q 矩阵；

（3）设 $\xi(0)=0$，列出福克-普朗克微分方程式；

（4）当 $t\to\infty$ 时，求极限分布 p_n。

17．设有一"生、移民及灭"过程，其中

$$\lambda_n = n\lambda + a \qquad (\lambda>0,\ a>0)$$

$$\mu_n = n\mu \qquad (\mu>0)$$

起始状态 $\xi(0)=n_0$ $n\lambda$ 代表状态为 n 时的自然增长，a 代表移民。

（1）写出描写这一过程的福克-普朗克微分方程组；

（2）求描写平均值 $M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}$ 的微分方程组；

（3）求 $M_\xi(t)$。

18．在"生灭"过程中，如果参数 $\lambda_n=0$，$\mu_n=\mu$，则该过程原是"纯灭"过程。如其起始状态 $\xi(0)=n$，求 p_{nj}，$n>j>0$。

19．设有一"生灭"过程 $\{\xi(t), t\geqslant 0\}$，其中参数 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=n\mu$，λ、μ 均为常数，且 $\lambda>0$，$\mu>0$，其起始状态为 $\xi(0)=0$。

（1）试证明 $p_n(t)=P\{\xi(t)=n\}$满足下列方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)\\[2ex]\dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)\\\qquad\qquad+(n+1)\mu p_{n+1}(t)\quad(n\geqslant1)\end{cases}$$

（2）设 $G(u,\ t)\triangleq\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n(t)u^n$

即$G(u,\ t)$为$\xi(t)$的母函数。试证

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}+\mu(u-1)\frac{\partial G(u,t)}{\partial u}$$

$$=\lambda(u-1)G(u,t)$$

（3）解上述偏微分方程式，证明

$$G(u,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}u}f[e^{-\mu t}(u-1)]$$

其中$f[\cdot]$是任意函数；

（4）利用起始条件 $p_0(0)=P\{\xi(0)=0\}=1$

或 $$G(u,\ 0)=1$$

证明 $G(u,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}(u-1)(1-e^{-\mu t})}$

（5）证明

$$p_n(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}\left\{\frac{1}{n!}\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^n\right\}$$

（6）求其均值函数

$$M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=?$$

（7）试证明 $\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$

20. 设有时变、纯增长过程$\xi(t)$，其参数为

$$\lambda_n(t)=\lambda\left(\frac{1+an}{1+a\lambda t}\right)(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a>0\ ,\lambda>0)$$

过程的起始状态为$\xi(0)=0$

（1）设 $p_k(t)=P\{\xi(t)=k\}$，写出描写 $p_k(t)$ 的福克-普朗克微分方程组；

（2）解该组微分方程，证明

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}$$

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+a\lambda t)^{-k-\frac{1}{a}}\prod_{m=1}^{k-1}(1+am)\quad(k\geqslant1)$$

注：该过程称为卜里耶(P01ya)过程。

21． 设[0，t)内到达的顾客服从泊松分布，参数为λ。设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队系统（M/M/1），平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。试证明：

（1）在服务员的服务时间内到达顾客的平均数为$\frac{\lambda}{\mu}$；

（2）在服务员的服务时间内无顾客到达的概率为

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu}。$$

22． 设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队服务系统，平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$，到达服务点的顾客数服从泊松分布，参数为λ，问顾客到达时排队系统中已有n个或n个以上的顾客的概率为何$(n\geqslant0)$？

32． 设有如题23所给定的排队服务系统(M/M/1)。设排队已到达统计平稳状态。服务的规则是先到先服务。设y代表--顾客化费在排队等候的时间和服务时间的总和。求y的

概率密度 $f_y(t)$，并证明：

（1）一个顾客化费在系统内的时间小于或等于 x 的概率为 $1-e^{-(\mu-\lambda)x}$；

（2）一个顾客化费在排队的时间小于或等于 x 的概率为

$$\begin{cases} 1-\dfrac{\lambda}{\mu} & (x=0) \\ \left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)+\dfrac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right) & (x>0) \end{cases}$$

24. 设有一单个服务员、服务时间服从负指数分布的排队服务系统。到达服务点的顾客数服从泊松分布，其参数为 λ。在这个服务系统中再作如下规定：当顾客被服务结束后，他依概率 α 离开系统，而依概率 (1-a) 重新再去排队，于是一个顾客可以多次被服务，并设平均服务时间为 $\dfrac{1}{\mu}$。

（1）建立这个系统的平衡方程，求系统进入统计平稳后取各状态的概率，并说明存在统计平稳的条件；

（2）求顾客从进入系统起到他第一次被服务所花费的排队等候时间的平均值；

（3）求顾客进入系统后一共被服务了 n 次的概率 $(n\geqslant 1)$；

（4）求顾客被服务的时间平均值（不包括该顾客在系统内排队等候的时间）。

25. 某加油站有两台泵，只有当顾客抵达加油站时泵有空闲，方可立刻对该顾客进行服务，顾客才进入系统；否则，如顾客见到二台泵均被占用便立即离去。潜在的顾客按泊松分布规律抵达油站，其参数为 λ；油站对顾客的服务时

间是负指数分布的随机变量，其平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。求进入加油站接受服务的顾客与抵达加油站的潜在顾客的比率。

26． 某项作业包括三台同一类型的机器和二个维修工。每台机器的正常工作时间（从开始工作到遭受损坏而不能工作的时间间隔）是按负指数规律分布的随机变量，其平均工作时间为10小时。一个维修工维修一台机器所需的时间也是按负指数分布的随机变量，其平均维修时间为8小时。求：（1）不工作机器的数学期望；

（2）两个维修工均忙着维修机器所占的时间。

27． 设有一出租汽车站。到达该站的出租汽车数服从泊松分布，平均每分钟到达一辆出租汽车；到达该站的顾客数也服从泊松分布，平均每分钟到达顾客2人。如果出租汽车到站时无顾客候车，不论是否已有汽车停留在站上，该辆汽车就停留在站上候客；反之，如果顾客到达汽车站时发现站上没有汽车，他就离去；如果顾客到站时有汽车在候客，他就可以立刻雇一辆。问：

（1）在汽车站上等候的出租汽车的平均数为何？

（2）在到站的潜在顾客中有多少雇得了出租汽车？

28． 设某更新过程的时间间隔服从泊松分布，其均值为μ，即$P\{x_n=k\}=\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$，$k=0, 1, 2, \cdots$。

（1）求S_n的分布；

（2）计算$P\{N(t)=n\}$。

29． 设更新过程的时间间隔x_n的分布函数为$F(t)$，$f(t)$为其概率密度，$m(t)$为$[0, t]$内平均更新的次数，$m(t)=E\{N(t)\}$。

试证明 $m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-x)f(x)dx$

30. 在使用中的一机器，或因损坏而更新，或因使用T时而更新。如果相继更新的机器的寿命是相互统计独立的随机变量，且具有相同的分布函数 $F(t)$，其相应的概率密度函数为 $f(t)$，试证明：

（1）长期工作时机器的更新率为

$$\left\{\int_0^T xf(x)dx+T[1-F(T)]\right\}^{-1}$$

（2）长期工作中使用的机器的损坏率为

$$\frac{F(T)}{\int_0^T xf(x)dx+T[1-F(T)]}$$

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

§1 二阶矩过程的定义和基本性质

定义 设有随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$，若对每个$t\in T$，$\xi(t)$的均值和方差都存在，则称$\xi(t)$为二阶矩过程。

第一章内所讨论的正弦波过程、随机电报过程均为二阶矩随机过程。今后将着重讨论的正态过程也是二阶矩过程而且是最重要的一类二阶矩过程。所谓正态过程是指随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$的各有限维分布都是正态分布的。由于正态分布的各阶矩都存在，所以正态过程属于二阶矩过程。

由于二阶矩过程$\{\xi(t), t\in T\}$的均值是存在的，$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi(t)$即均值函数是一时间的确定性函数。如果从$\xi(t)$中减去$\mu_\xi(t)$得到另一随机过程$\tilde{\xi}(t)=\xi(t)-\mu_\xi(t)$，则$E\{\tilde{\xi}(t)\}=0$，$\tilde{\xi}(t)$的二阶矩也是存在的，即$\tilde{\xi}(t)$也是二阶矩过程。$\xi(t)$和$\tilde{\xi}(t)$之间仅相差一个均值函数。$\tilde{\xi}(t)$的自协方差函数和自相关函数是相同的，$\xi(t)$的自协方差函数即为$\tilde{\xi}(t)$的自相关函数。因此，今后为了讨论简便起见，一般都假定二阶矩过程的均值为零。

根据许瓦兹不等式可以证明二阶矩过程的自协方差函数总是存在的。

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov.}\{\xi(t_1),\ \xi(t_2)\}\\
&=E\{[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)][\overline{\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2)}]\}\\
&|\operatorname{cov.}\{\xi(t_1),\ \xi(t_2)\}|^2\\
&\leqslant\{E|[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)][\overline{\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2)}]|\}^2\\
&\leqslant E|\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)|^2E|\xi(t_2)-\mu\xi(t_2)|^2
\end{aligned}
$$

而 $E|\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)|^2=D\xi(t_1)<\infty$

$E|\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2)|^2=D\xi(t_2)<\infty$

故 $|\operatorname{cov}\{\xi(t_1),\ \xi(t_2)\}|<\infty$

即二阶矩过程的自协方差函数总是存在的，那么二阶矩过程的自相关函数也总是存在的。

二阶矩过程的相关函数具有下列二个性质：

定理一 设有二阶矩过程 $\{\xi(t),\ t\in T\}$，$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)$ 为它的相关函数，则

$$R_{\xi\xi}(t_2,\ t_1)=\overline{R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)}\quad(t_1,\ t_2\in T)$$

证
$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)&=E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}\\
&=\overline{E\{\xi(t_2)\overline{\xi(t_1)}\}}\\
&=\overline{R_{\xi\xi}(t_2,\ t_1)}
\end{aligned}
$$

即 $R_{\xi\xi}(t_2,\ t_1)=\overline{R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)}$

若 $\xi(t)$ 是一实二阶矩随机过程，则

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=R_{\xi\xi}(t_2,\ t_1)$$

即实二阶矩随机过程的自相关函数是对称的。

定理二 二阶矩过程的自相关函数 $R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)$ 具有非负定性，即对于任意有限个 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots,\ t_n\in T$ 和任意的 n 个复数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_k,\ t_m)\lambda_k\bar{\lambda}_m\geqslant 0$$

其中 n 为任意正整数。

证
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_k,\ t_m)\lambda_k\bar{\lambda}_m$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}E\{\xi(t_k)\overline{\xi(t_m)}\}\lambda_k\bar{\lambda}_m$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\xi(t_k)\lambda_k\overline{\xi(t_m)}\bar{\lambda}_m\right\}$$

$$=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)\lambda_k\right]\overline{\left[\sum_{m=1}^{n}\xi(t_1)\lambda_m\right]}\right\}$$

$$=E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)\lambda_k\right|^2\geqslant 0$$

即
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_k,\ t_m)\lambda_k\bar{\lambda}_m\geqslant 0$$

上述不等式可用矩阵形式表示之：

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix}R_{\xi\xi}(t_1,\ t_1) & R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)\cdots R_{\xi\xi}(t_1,t_n)\\ R_{\xi\xi}(t_2,\ t_1) & R_{\xi\xi}(t_2,\ t_2)\cdots R_{\xi\xi}(t_2,t_n)\\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ R_{\xi\xi}(t_n,t_1) & R_{\xi\xi}(t_n,t_2)\cdots R_{\xi\xi}(t_n,\ t_n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1\\ \bar{\lambda}_2\\ \vdots\\ \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}\geqslant 0$$

或
$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)\mathbf{R}_{\xi\xi}(t_k,t_m)\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1\\ \bar{\lambda}_2\\ \vdots\\ \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}\geqslant 0$$

即 $$\lambda^{\tau} R_{\xi\xi}(t_k, t_m)\bar{\lambda} \geqslant 0$$

λ' 为一行矩阵$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n)$

§2 平稳随机过程

所谓平稳随机过程，粗略地说，指的是它的统计特性不随时间的推移而变化。它的严格定义如下：

定义 设有随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$，若对于任意 n 和任意选定的 $t_1<t_2<t_3\cdots<t_n$，$t_i\in T$，$i=1, 2, \cdots, n$，以及 τ 为任意值，且 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\in R^{(1)}$有

$$F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$=F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

则称该过程为严平稳随机过程。其中 $F_\xi(\quad)$是 n 维分布函数，n 是任意的。

该定义说明，当取样点在时间轴上作任意平移时随机过程的所有有限维分布函数是不变的。

由定义可知，严平稳过程的所有一维分布函数 $F_\xi(x; t)=F_{\xi_t}(x)$是与 t 无关的，即

$$F_\xi(x; t)=F_\xi(x; t+\tau)$$

或 $$f_\xi(x; t)=f_\xi(x; t+\tau)$$

平稳随机过程的二维分布函数为

$$F_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2)=F_\xi(x_1, x_2; t_1+\tau, t_2+\tau)$$

若在上式中令 $\tau=-t_1$，则

$$F_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2)=F_\xi(x_1, x_2; t_1+\tau, t_2+\tau)$$
$$=F_\xi(x_1, x_2; 0, t_2-t_1)$$

即严平稳随机过程的二维分布函数仅是时间差(t_2-t_1)的函数，而不再是 t_1 和 t_2 本身的函数。

对于随机序列$\{\xi_n; n=1, 2, 3, \cdots\}$，其平稳性的定义完全和平稳过程的定义相类似。

一般说，当产生随机现象的一切主要条件可视为不随时间的推移而改变时，我们常可以把这类过程看作为平稳的。例如，在电子管中散弹效应引起电路中的噪声电压，由于产生这过程的主要条件不随时间的推移而变化，这一随机过程就是平稳随机过程。许多领域如通信、自动控制等方面所遇到的过程有很多可以认为是平稳随机过程。

如果上述定义中的平稳条件不是全部满足，即不是对任意n都满足，而只是对k满足时，则对任意选择的$t_1<t_2<\cdots<t_k$，$t_i\in T$，$i=1, 2, \cdots, k$，和任意的τ值有

$$F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1, t_2, \cdots, t_k)$$
$$=F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_k+\tau)$$

而对于$n>k$时其平稳条件就不再满足，则称它为k级平稳的随机过程。当然，如果过程为k级平稳，那么当$n<k$时都满足平稳的条件。

严平稳过程或二级平稳过程如果它又是二阶矩过程，则该过程的均值函数为常数，而不是时间的函数，即

$$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x; t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x; t+\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x)=\text{常数}(\mu_\xi)$$

该过程的相关函数仅是时间差(t_2-t_1)的函数，而不再是t_1和t_2本身的函数，即

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$=\iint x_1x_2 dF_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$=\iint x_1x_2 dF_\xi(x_1, x_2; 0, t_2-t_1)$$

$$=R_{\xi\xi}(t_2-t_1)=R_{\xi\xi}(\tau)$$

其中 $$\tau=t_2-t_1$$

由于用分布函数研究随机过程往往比较复杂，所以一般只研究过程的一阶矩、二阶矩。所谓随机过程的相关理论就是研究仅与过程的一阶矩、二阶矩有关性质的理论。在平稳过程的相关理论中出现的特征数仅是常数 μ_ξ 和一个变量 $\tau=t_2-t_1$ 的函数 $R_{\xi\xi}(\tau)$。当然，仅研究一阶矩、二阶矩是不能代替对整个 $\xi(t)$ 性质的研究的。

零均值实正态分布随机过程的特征函数可表示为

$$\Phi_\xi(u_1, u_2, \cdots, u_n)=\exp\left\{-\frac{u^\tau Bu}{2}\right\} \tag{1}$$

其中 $$u^\tau=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{ij}=E\{\xi(t_i)\xi(t_j)\} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

（1）式的证明见第六章。

由此可见，在正态分布随机过程中相关矩阵完全确定了过程的概率密度，因此对于正态分布的随机过程而言，只要研究其一阶矩、二阶矩就足够了。对于其它平稳随机过程 $\xi(t)$，相关理论不能代替对整个 $\xi(t)$ 的性质的研究，但相关理论也能解决许多应用中的一些重要问题。

对于严平稳过程或二级平稳过程而且又是二阶矩过程已经得到了上述两个重要结论。但是，仅仅由一个随机过程的均值为常数、相关函数是$\tau = t_2 - t_1$的函数还不能充分说明它符合严平稳的条件。为此引入另一种平稳随机过程的定义：

定义 设有一个二阶矩随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$，它的均值为常数，相关函数仅是$\tau = t_2 - t_1$的函数，则称它为宽平稳随机过程或广义平稳随机过程。

这是苏联学者欣斤给的定义。

为了区别起见，第一个定义所指的过程称为严平稳过程，第二个定义所指的过程称为宽平稳过程。对于正态分布的平稳过程，严平稳就是宽平稳，宽平稳也就是严平稳，这是因为正态分布的相关函数已经充分说明了它的概率密度；另一方面正态分布过程的二阶矩总是存在的。对于其它严平稳随机过程，只有当它的二阶矩存在时才是宽平稳的；而一个过程是宽平稳时，还不能说明它是严平稳的。

今后讲到平稳过程时，总是指复宽平稳随机过程；而说到过程为严平稳时，则将特别说明之。

§3 宽平稳随机过程的性质和举例

宽平稳随机过程是一个二阶矩过程，它具有下列性质：

性质一 $R_{\xi\xi}(t_2 - t_1) = \overline{R_{\xi\xi}(t_1 - t_2)}$

或 $R_{\xi\xi}(\tau) = \overline{R_{\xi\xi}(-\tau)}$ $(\tau = t_2 - t_1)$

对于实宽平稳过程$R_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(-\tau)$，即自相关函数是$\tau$的偶函数。

性质二 $R_{\xi\xi}(0) \geqslant |\mu_\xi|^2$

μ_ξ 为过程的数学期望值，即均值。

证 $R_{\xi\xi}(0) = E\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\}$

$$= E\{[\xi(t)-\mu_\xi][\overline{\xi(t)-\mu_\xi}]\} + |\mu_\xi|^2$$

$$= D\xi(t) + |\mu_\xi|^2$$

而 $$D\xi(t) = E\{|\xi(t)-\mu_\xi|^2\} \geqslant 0$$

故 $$R_{\xi\xi}(0) \geqslant |\mu_\xi|^2$$

性质三 $$|R_{\xi\xi}(\tau)| \leqslant R_{\xi\xi}(0)$$

$$|C_{\xi\xi}(\tau)| \leqslant C_{\xi\xi}(0)$$

证 根据许瓦兹不等式有

$$|E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}|^2 \leqslant E\{|\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}|\}]^2$$

$$\leqslant [E\{|\xi(t+\tau)|^2\}E\{|\xi(t)|^2\}$$

故 $$|R_{\xi\xi}(\tau)|^2 \leqslant [R_{\xi\xi}(0)]^2$$

即 $$|R_{\xi\xi}(\tau)| \leqslant R_{\xi\xi}(0)$$

同理可得 $$|C_{\xi\xi}(\tau)| \leqslant C_{\xi\xi}(0)$$

它表明自相关函数和自协方差函数的绝对值都在$\tau=0$处取最大值。

这里并不排除在$\tau \neq 0$处也可以取最大值。如随机相位的正弦波过程的相关函数为$\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$，当$\tau = \frac{k\pi}{\omega}$，$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时相关函数的绝对值均取最大值。

性质四 相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$具有非负定性，即对于任意自然数 n，任意 n 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 以及任意 n 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 有

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(t_1-t_1) & R_{\xi\xi}(t_1-t_2) \cdots R_{\xi\xi}(t_1-t_n) \\ R_{\xi\xi}(t_2-t_1) & R_{\xi\xi}(t_2-t_2) \cdots R_{\xi\xi}(t_2-t_n) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ R_{\xi\xi}(t_n-t_1) & R_{\xi\xi}(t_n-t_2) \cdots R_{\xi\xi}(t_n-t_n) \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1\\ \bar{\lambda}_2\\ \vdots\\ \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_i-t_k)\lambda_i\bar{\lambda}_k\geqslant 0$$

性质一、四是从§1中定理一、定理二获得的。

例一 热噪声的取样观察值为 $\{\xi(n),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}$，$\{\xi(n)\}$是一实随机序列，它具有下列性质：（1）$\{\xi(n)\}$相互独立；（2）$\xi(n)$是$N(0,\sigma^2)$分布。求它的均值和相关函数。

解
$$\mu_\xi(n)=E\{\xi(n)\}=0$$
$$D\{\xi(n)\}=\sigma^2$$
$$E\{\xi(n+m)\xi(n)\}=0 \qquad (m\neq 0)$$
$$E\{\xi(n+m)\xi(n)\}=\sigma^2 \qquad (m=0)$$

故
$$R_{\xi\xi}(m)=\begin{cases}\sigma^2 & (m=0)\\ 0 & (m\neq 0)\end{cases}$$

该例中相关函数只和 m 有关而与 n 无关，且均值为常数，故它是一平稳随机序列，而且是严平稳序列。

例二 第一章所讨论的正弦波随机过程为平稳随机过程。

例三 第一章所讨论的随机电报信号中均值为

$$E\{\xi(t)\}=\frac{1}{2}=\text{常数}$$

相关函数为
$$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{1}{4}(1+e^{-2\lambda|\tau|}) \qquad (-\infty<\tau<\infty)$$

其中
$$\tau=t_2-t_1$$

协方差函数为　　$C_{\xi\xi}(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$　　$(-\infty<\tau<\infty)$

故它是平稳随机过程，而且是实的平稳过程。相关函数在$\tau=0$时为最大，$R_{\xi\xi}(\tau)$是偶函数。

例四　滑动平均

设$\{\xi(n);\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是标准不相关序列，即

$$E\{\xi(n)\}=0$$

$$E\{\xi(n)\overline{\xi(m)}\}=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ 1 & (n=m)\end{cases}$$

则$\zeta(n)=a_0\xi(n)+a_1\xi(n-1)+\cdots+a_s(n-s)$也是平稳序列。其中$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_s$是复数序列。

解　　$E\{\zeta(n)\}=0$

$$E\{\zeta(n+m)\overline{s(n)}\}$$

$$=E\sum_{k=0}^{s}a_k\xi(n+m-k)\overline{\sum_{l=s}^{s}a_l\xi(n-l)}\}$$

$$=\sum_{l=s}^{s}\sum_{k=s}^{s}a_k\bar{a}_l E\{\xi(n+m-k)\overline{\xi(n-l)}\}$$

$$=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant s\\ 0\leqslant k-m\leqslant s}}a_k\bar{a}_{k-m}$$

因此$\zeta(n)$的均值为常数，相关函数仅与m有关而与n无关，故$\zeta(n)$也是平稳随机序列。

例五　设ξ_k，$k=1,2,\cdots$为随机变量，$E\{\xi_k\}=0$，$E\{\xi_i\bar{\xi}_k\}=0(i\neq k)$，$E\{\xi_k\bar{\xi}_k\}=E\{|\xi_k|^2\}=b_k>0$，若有$\{\lambda_k\}$，$k=1,2,\cdots$是两两不相等的实数串，且$\sum_{k=1}^{\infty}E\{|\xi_k|^2\}<\infty$，

则 $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e^{j\lambda_k t}$ 为一平稳随机过程，且是具有离散谱的过程。

解 $$E\{\xi(t)\}=0$$

$$E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}=E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e^{j\lambda_k(t+\tau)}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\xi}_l e^{-j\lambda_l t}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\xi_k\overline{\xi}_l e^{j\lambda_k(t+\tau)}e^{-j\lambda_l t}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}E\{\xi_k\overline{\xi}_l\}e^{j\lambda_k(t+\tau)}e^{-j\lambda_l t}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{j\lambda_k\tau}$$

故相关函数为时间差 τ 的函数

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{j\lambda_k\tau}$$

而 $$R_{\xi\xi}(0)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k<\infty$$

因此 $\xi(t)$ 是一平稳随机过程。其中 b_k 代表谐波分量 $\xi_k e^{j\lambda_k t}$ 的功率的平均值。

例六 设有一脉冲串，其脉宽为1，脉冲可为正脉冲也可为负脉冲，幅值可取+1也可取−1，取+1或−1的概率相等；各脉冲取+1或−1是相互统计独立的；脉冲的起始时间均匀分布于单位时间间隔内。求此随机过程的相关函数。

解 此过程的样本函数见图4-1。

因该过程在任何时间 t_1 可取值+1或−1，且

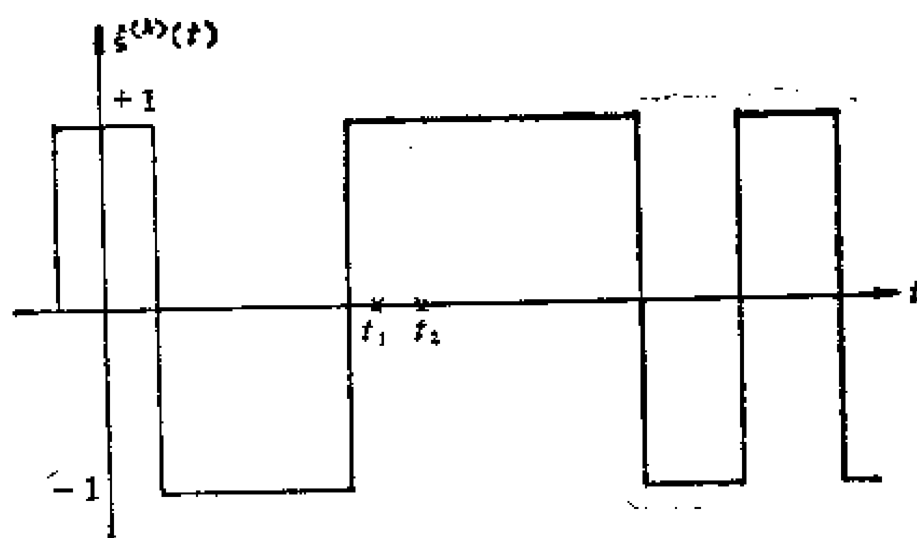


图 4-1

$$P\{\xi(t_1)=+1\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{\xi(t_1)=-1\}=\frac{1}{2}$$

故
$$E\{\xi(t_1)\}=1\times\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$$

它的相关函数为

$$\begin{aligned}
&E\{\xi(t_2)\xi(t_1)\}\\
&=1\times1P\{\xi(t_1)=+1,\ \xi(t_2)=+1\}\\
&\quad+1\times(-1)P\{\xi(t_1)=+1,\ \xi(t_2)=-1\}\\
&\quad+(-1)\times1P\{\xi(t_1)=-1,\ \xi(t_2)=+1\}\\
&\quad+(-1)\times(-1)P\{\xi(t_1)=-1,\ \xi(t_2)=-1\}
\end{aligned}$$

现求 $P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}$。设 $t_2>t_1$，则

$$\begin{aligned}
&P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}\\
&\qquad=P\{\xi(t_2)=1/\xi(t_1)=1\}P\{\xi(t_1)=1\}
\end{aligned}$$

设 θ 是 t_1 所在的脉冲的起始时刻，根据题意 θ 是均匀分布于单位时间间隔内的随机变量，故可以认为 θ 是均匀分布于 $(t_1-1,\ t_1)$ 内的随机变量（见图 4-2）。当 $t_2-t_1\leqslant 1$ 时，t_2 可能和 t_1 处于同一脉冲内也可以处于不同的脉冲内。

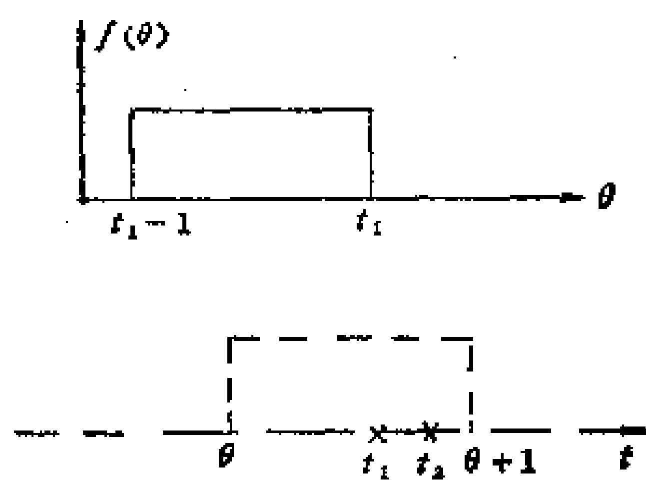


图 4-2

$$P\{\xi(t_2)=1/\xi(t_1)=1\}$$

$$=P\{t_2<(\theta+1)\}+\frac{1}{2}P\{t_2>(\theta+1)\}$$

上式中右边第一项代表 t_1、t_2 处于同一脉冲内的概率，第二项中 $P\{t_2>(\theta+1)\}$ 代表 t_1、t_2 处于不同脉冲内的概率，当 t_1、t_2 不在同一脉冲内时 $\xi(t_2)$ 取 $+1$ 的概率为 $\frac{1}{2}$。

$$P\{t_2<(\theta+1)\}=P\{\theta>(t_2-1)\}=1-P\{\theta<t_2-1\}$$

$$=1-\int_{t_1-1}^{t_2-1}d\theta$$

$$=1-(t_2-t_1)\quad (0\leqslant t_2-t_1\leqslant 1)$$

$$P\{t_2>(\theta+1)\}=P\{\theta<(t_2-1)\}$$

$$=t_2-t_1\quad (0\leqslant t_2-t_1\leqslant 1)$$

故当 $0 \leqslant t_2 - t_1 < 1$ 时

$$P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-(t_2-t_1)+\frac{1}{2}(t_2-t_1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(t_2-t_1)\right]$$

而当 $t_2-t_1 \geqslant 1$ 时，t_2 和 t_1 永远处于不同的脉冲内，则

$$P\{\xi(t_2)=1/\xi(t_1)=1\}=\frac{1}{2}$$

此时 $P\{\xi(t_1)=1,\ \xi(t_2)=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

同理 $P\{\xi(t_1)=-1,\ \xi(t_2)=-1\}$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(t_2-t_1)\right] \quad (0 \leqslant t_2-t_1<1)$$

$$P\{\xi(t_1)=-1,\ \xi(t_2)=-1\}=\frac{1}{4} \quad (t_2-t_1 \geqslant 1)$$

$$P\{\xi(t_1)=1, \xi(t_2)=-1\}=P\{\xi(t_1)=1\}$$

$$\cdot P\{\xi(t_2)=-1/\xi(t_1)=1\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[0\times P\{t_2<(\theta+1)\}+\frac{1}{2}P\{t_2>(\theta+1)\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(t_2-t_1)=\frac{1}{4}(t_2-t_1)$$

$$(0 \leqslant t_2-t_1 \leqslant 1)$$

$$P\{\xi(t_1)=1, \xi(t_2)=-1\}=\frac{1}{4} \qquad (t_2-t_1 \geqslant 1)$$

$$P\{\xi(t_1)=-1, \xi(t_2)=1\}=\frac{1}{4}(t_2-t_1) \quad (0 \leqslant t_2-t_1<1)$$

$$P\{\xi(t_1)=-1, \xi(t_2)=1\}=\frac{1}{4} \qquad (t_2-t_1\geqslant 1)$$

因此 $E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(t_2-t_1)\right]$

$$+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(t_2-t_1)\right]-\frac{1}{4}(t_2-t_1)-\frac{1}{4}(t_2-t_1)$$

$$=1-(t_2-t_1) \quad (0\leqslant t_2-t_1<1)$$

$$E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$(t_2-t_1\geqslant 1)$$

同理若 $t_1>t_2$，则

$$E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\begin{cases}1-(t_1-t_2) & (0\leqslant t_1-t_2<1)\\ 0 & (t_1-t_2\geqslant 1)\end{cases}$$

把上述两种情况结合起来，设 $\tau=t_2-t_1$，

$$E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=R_{\xi\xi}(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & (|\tau|\leqslant 1)\\ 0 & (|\tau|>1)\end{cases}$$

其相关函数如图 4-3 所示。故该过程为平稳随机过程。

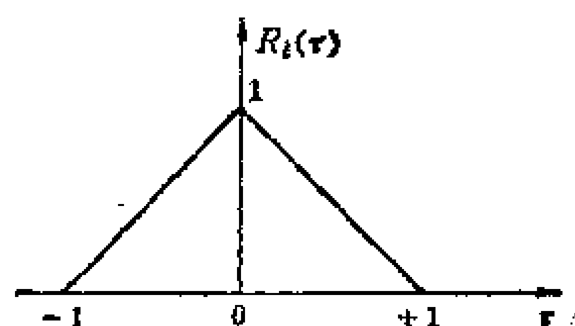


图 4-3

§4　正交增量过程

定义　设有二阶矩过程$\{\xi(t), t\in T\}$，并设$t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，$t_1,t_2,t_3,t_4\in T$，有

$$E\{[\xi(t_2)-\xi(t_1)]\overline{[\xi(t_4)-\xi(t_3)]}\}=0$$

则称该过程为正交增量过程。

在第二章讨论独立增量过程时，已经提到了正交增量过程。现对其性质作进一步讨论。

若T为有限区间[a，b]，且规定$\xi(a)=0$，取$t_1=a, t_2=t_3=s$，$t_4=t$，其中$t>s$，则

$$E\{\xi(s)\overline{[\xi(t)-\xi(s)]}\}=0$$

此时　$$E\{\xi(s)\overline{\xi(t)}\}=E\{\xi(s)\overline{\xi(s)}\}=E\{|\xi(s)|^2\}$$

对于这类正交过程如定义$F(s)=E\{|\xi(s)|^2\}$

则
$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(s,t)&=E\{\xi(s)\overline{\xi(t)}\}\\&=E\{\xi(s)\overline{[\xi(t)-\xi(s)+\xi(s)]}\}\\&=E\{\xi(s)\overline{[\xi(t)-\xi(s)]}\}+E\{\xi(s)\overline{\xi(s)}\}\\&=F(s)\qquad\qquad (t>s)\end{aligned}$$

若$t<s$，则$R_{\xi\xi}(s,t)=F(t)$

于是　$$R_{\xi\xi}(s,t)=F(\min(s,t))$$

当$t>s$时

$$\begin{aligned}E\{|\xi(t)-\xi(s)|^2\}&=E\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\}-E\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}\\&\quad-E\{\xi(s)\overline{\xi(t)}\}+E\{\xi(s)\overline{\xi(s)}\}\\&=F(t)-F(s)-F(s)+F(s)\\&=F(t)-F(s)\end{aligned}$$

由于　$$E\{|\xi(t)-\xi(s)|^2\}\geqslant 0$$

故　$$F(t)-F(s)\geqslant 0$$

即 $F(t)$ 是单调不减的函数。

由于 $$R_{\xi\xi}(s,t)=F(\min(s,t))$$

故正交增量过程为非平稳过程。

例 研究对称的无限制随机游动的特征，并求其均值和相关函数。假定 $\xi(0)=0$。

解 $$E\{\xi(n)\}=0$$

$$E\{\xi(m)[\xi(n)-\xi(m)]\}$$

$$=E\{\xi(m)\}E\{\xi(n)-\xi(m)\}=0 \quad (n>m)$$

故当 $m<n$ 时

$$R_{\xi\xi}(m,n)=E\{\xi(m)\xi(n)\}=E\{[\xi(m)]^2\}$$

$$=m=F(m)$$

因此 $$R_{\xi\xi}(m,n)=\min(m,n)$$

即对称的无限制随机游动是一正交增量过程，它是非平稳的。

§5 均方极限

上面讨论了二阶矩过程的定义和基本性质。宽平稳过程是二阶矩过程中的一类，正交增量过程也属于二阶矩过程。以下各节将进一步研究二阶矩过程的一些性质，如讨论二阶矩过程的连续性、导数和积分等概念，即希望把数学分析中的一些方法推广到研究二阶矩过程。这部分内容统称为随机分析。

连续性、导数和积分的基础是极限的概念，在随机分析中也是一样。为了研究二阶矩过程的连续性、导数和积分，也必须定义随机变量序列的极限。随机变量序列的极限有许多种定义的方法，本书中采用均方极限的概念，因此后面的讨论实际上是研究二阶矩过程在均方意义下的随机分析。

本节首先研究随机变量序列在均方意义下收敛的定义、性质以及均方收敛的判定准则。

定义 设有随机变量序列 $\{\xi_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 存在二阶矩，即 $E\{|\xi_n|^2\}<\infty$，$n=1,2,3\cdots$；又设有随机变量 ξ，它也存在二阶矩，即 $E\{|\xi|^2\}<\infty$；如果

$$\lim_{n\to\infty} E\{|\xi_n-\xi|^2\}=0$$

则称序列 $\{\xi_n\}$ 均方收敛于 ξ，或序列 $\{\xi_n\}$ 的均方极限为 ξ，用 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$ 表示之。

定理一 设有存在二阶矩的随机变量序列 $\{\xi_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 及二阶矩随机变量 ξ，且 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，

则有：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} E\{\xi_n\}=E\{\xi\}=E\{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n\}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|\xi_n|^2\}=E\{|\xi|^2\}=E\{|\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n|^2\}$ 即极限和取均值可以交换次序。但先取极限时，指的是取均方极限。

证（1）利用许瓦兹不等式

$$|E\{\xi_n\}-E\{\xi\}|=|E\{\xi_n-\xi\}|$$

$$\leqslant E|\xi_n-\xi|\leqslant\{E|\xi_n-\xi|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

由于 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n-\xi|^2=0$

故当 $n\to\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} E\{\xi_n\}=E\{\xi\}=E\{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n\}$

（2）利用三角不等式

$$\sqrt{E|\xi+\eta|^2}\leqslant\sqrt{E|\xi|^2}+\sqrt{E|\eta|^2}$$

$$E\{|\xi_n|^2\}=E\{|\xi+\xi_n-\xi|^2\}\leqslant E|\xi|^2$$
$$+E\{|\xi||\xi_n-\xi|\}+E\{|\xi_n-\xi||\xi|\}$$
$$+E\{|\xi_n-\xi|^2\}$$
$$\leqslant E|\xi|^2+\{E|\xi|^2E|\xi_n-\xi|^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{E|\xi_n-\xi|^2E|\xi|^2\}^{\frac{1}{2}}+E\{|\xi_n-\xi|^2\}$$

$$=(\sqrt{E|\xi|^2}+\sqrt{E|\xi_n-\xi|^2})^2$$

即 $\sqrt{E|\xi_n|^2}-\sqrt{E|\xi|^2}\leqslant\sqrt{E|\xi_n-\xi|^2}$

同理设 $|\xi|=|\xi-\xi_n+\xi_n|$

可得 $\sqrt{E|\xi|^2}-\sqrt{E|\xi_n|^2}\leqslant\sqrt{E|\xi_n-\xi|^2}$

故 $|\sqrt{E|\xi|^2}-\sqrt{E|\xi_n|^2}|\leqslant\sqrt{E|\xi-\xi_n|^2}$

当 $n\to\infty$时，$E|\xi_n-\xi|^2\to 0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}E|\xi_n|^2=E|\xi|^2=E\{|\mathop{l.i.m}\xi_n|^2\}$

因而 $$\lim_{n\to\infty}D\xi_n=D\xi$$

定理二 设有随机序列$\{\xi_n\}$、$\{\eta_n\}$，$n=1,2,3\cdots$和随机变量ξ、η，且$E|\xi_n|^2<\infty$，$E|\eta_n|^2<\infty$，$E|\xi|^2<\infty$，

$E|\eta|^2<\infty$，$\mathop{\lim}\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，$\mathop{l.i.m}\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta$，

a、b为任意常数，则

$$\mathop{l.i.m}_{n\to\infty}(a\xi_n+b\eta_n)=a\xi+b\eta$$

证 $E|a\xi_n+b\eta_n-a\xi-b\eta|^2$

$$=E|a(\xi_n-\xi)+b(\eta_n-\eta)|^2$$

利用三角形不等式

$$E|a\xi_n+b\eta_n-a\xi-b\eta|^2$$

$$\leqslant\{[E|a|^2|\xi_n-\xi|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$+[E|b|^2|\eta_n-\eta|^2]^{\frac{1}{2}}\}^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

所以 $\mathop{l.i.m}(a\xi_n+b\eta_n)=a\xi+b\eta$

定理三 设随机变量序列$\{\xi_n\}$、$\{\eta_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$均存在二阶矩，随机变量ξ、η均有二阶矩，且$\mathop{l.i.m}\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，$\mathop{l.i.m}\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta$，则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}E\{\xi_m\overline{\eta}_n\}=E\{\xi\overline{\eta}\}$$

证 $|E\{\xi_m\eta_n\}-E\{\xi\overline{\eta}\}|$

$$=|E\{\xi_m\overline{\eta}_n-\xi\overline{\eta}\}|$$

$$=|E\{\xi(\overline{\eta_n-\eta})+(\xi_m-\xi)\overline{\eta}+(\xi_m-\xi)(\overline{\eta_n-\eta})\}|$$

$$\leqslant E|\xi(\overline{\eta_n-\eta})|+E|(\xi_m-\xi)\overline{\eta}|+E|(\xi_m-\xi)(\overline{\eta_n-\eta})|$$

$$\leqslant\{E|\xi|^2E|\eta_n-\eta|^2\}^{\frac{1}{2}}+\{E|\xi_m-\xi|^2E|\eta|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\{E|\xi_m-\xi|^2E|\eta_n-\eta|^2\}^{\frac{1}{2}}\xrightarrow[\substack{m\to\infty\\n\to\infty}]{}0$$

所以 $$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}E\{\xi_m\overline{\eta}_n\}=E\{\xi\overline{\eta}\}$$

定理四 均方极限是唯一的，即设$\{\xi_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$是具有二阶矩的随机变量序列，ξ、η为两个具有二阶矩的随机变量，且$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,\xi_n=\eta$，则有$\xi=\eta$。

证 因为$E\{(\xi_n-\eta)(\overline{\xi_n-\eta})\}$

$$=E\{\xi_n\overline{\xi}_n\}-E\{\eta\overline{\xi}_n\}-E\{\xi_n\overline{\eta}\}+E\{\eta\overline{\eta}\}$$

上式两边取$n\to\infty$，左边用$\xi_n\to\xi$代入，右边用$\xi_n\to\eta$代入，则左边为

$$E\{(\xi_n-\eta)(\overline{\xi_n-\eta})\}\xrightarrow[n\to\infty]{}E\{(\xi-\eta)(\overline{\xi-\eta})\}$$

$$=E\{|\xi-\eta|^2\}$$

右边为

$$E\{\xi_n\overline{\xi}_n\}-E\{\eta\overline{\xi}_n\}-E\{\xi_n\overline{\eta}\}+E\{\eta\overline{\eta}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}E\{\eta\overline{\eta}\}$$

$$-E\{\eta\overline{\eta}\}-E\{\eta\overline{\eta}\}+E\{\eta\overline{\eta}\}=0$$

故 $$E\{|\xi-\eta|^2\}=0$$

即$\xi=\eta$，因此均方极限是唯一的。

如果已知二阶矩随机变量序列$\{\xi_n;\ n=1,2,3,\cdots\}$，设想判定该序列是否均方收敛。由于并不知道$\xi$是否存在，即使存在也不知道$\xi$为何，因此直接利用均方收敛的定义$E\{|\xi_n-\xi|^2\}\to0$来判定该序列$\{\xi_n\}$收敛与否是困难的。下面讨论两个常用的判定准则。

定理五 柯西准则

设$\{\xi_n, n=1,2,3,\cdots\}$是随机变量序列，且$E\{|\xi_n|^2\}<\infty$，则$\{\xi_n\}$均方收敛于$\xi$（即$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$）的充要条件是

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} E|\xi_n-\xi_m|^2=0$$

证 利用三角不等式

$$E|\xi_n-\xi_m|^2=E|(\xi_n-\xi)+(\xi-\xi_m)|^2$$
$$\leqslant\{[E|\xi_n-\xi|^2]^{\frac{1}{2}}+[E|\xi-\xi_m|^2]^{\frac{1}{2}}\}^2$$

如果序列$\{\xi_n\}$均方收敛于ξ，则

$$\lim_{n\to\infty} E|\xi_n-\xi|^2=0$$

$$\lim_{m\to\infty} E|\xi-\xi_m|^2=0$$

故

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} E|\xi_n-\xi_m|^2=0$$

上面仅证明了定理的必要性，没有证明充分性。然而该条件是充分必要的。由于证明充分性要利用测度论的知识，这里就不再证明了。

定理六 Loéve 准则

设$\{\xi_n, n=1,2,3,\cdots\}$是随机变量序列，且$E|\xi_n|^2<\infty$，则$\{\xi_n\}$均方收敛于$\xi$（即$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$）的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} E\{\xi_n\bar{\xi}_m\}=\text{常数}(c)$$

证： 设$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$

利用许瓦兹不等式

$$|E\{(\xi-\xi_n)\bar{\xi}\}|^2\leqslant\{E[|\xi-\xi_n||\bar{\xi}|]\}^2$$
$$\leqslant E|\xi-\xi_n|^2\cdot E|\xi|^2$$

因

$$E|\xi-\xi_n|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

故 $$|E\{(\xi-\xi_n)\bar{\xi}\}|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

或 $$\lim_{n\to\infty}E\{\xi_n\bar{\xi}\}=E|\xi|^2=E\{(\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n)(\bar{\xi})\}$$

而 $$|E[(\xi-\xi_n)(\bar{\xi}-\bar{\xi}_m)]|^2\leqslant\{E|(\xi-\xi_n)(\bar{\xi}-\bar{\xi}_m)|\}^2$$
$$\leqslant E|\xi-\xi_n|^2\cdot E|\xi-\xi_m|^2\xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{}0$$

即 $$|E[(\xi-\xi_n)(\bar{\xi}-\bar{\xi}_m)]|\xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{}0$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}|E(\xi\bar{\xi})-E(\xi_n\bar{\xi})-E(\xi\bar{\xi}_m)+E(\xi_n\bar{\xi}_m)|=0$$

或 $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}|E(\xi\bar{\xi})-E|\xi|^2-E|\xi|^2+E(\xi_n\bar{\xi}_m)|=0$$

即 $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E(\xi_n\bar{\xi}_m)=E|\xi|^2=c$$

上面证明了必要性，下面证明其充分性。

已知 $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E(\xi_n\bar{\xi}_m)=E|\xi|^2=c$$

$$E|\xi_n-\xi_m|^2=E|\xi_n|^2-E(\xi_n\bar{\xi}_m)-E(\bar{\xi}_n\xi_m)+E|\xi_m|^2$$

故 $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E|\xi_n-\xi_m|^2=c-c-c+c=0$$

根据柯西准则，必存在随机变量ξ使$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n=\xi$。

例 设有一具有二阶矩的随机变量序列$\{\xi(n);\ n=1,2,3,\cdots\}$，$\xi(n)$的相关函数为$R_{\xi\xi}(n_1,n_2)=E\{\xi(n_1)\overline{\xi(n_2)}\}$。若有序列$\{a_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$，并定义$\eta(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi(k)$，问应具备什么条件才能使$\eta(n)$为均方收敛序列。

解 $E[\eta(n)\overline{\eta(m)}]=E\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_i\xi(k)\bar{\xi}(i)\right\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_iE\{\xi(k)\bar{\xi}(i)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_k\bar{a}_iR_{\xi\xi}(k,i)$$

根据 Loéve 收敛准则，如果$\{\eta(n)\}$为均方收敛，则要求

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}E\{\eta(n)\bar{\eta}(m)\}=常数(c)$$

即要求$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_k\bar{a}_iR_{\xi\xi}(k,i)=常数(c)<\infty$ 即要求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_k\bar{a}_iR_{\xi\xi}(k,i)$为收敛级数。

定理七 设有二阶矩随机变量序列$\{\xi_n;\ n=1.2.3.\cdots\}$及二阶矩随机变量$\xi$，且 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，设 $f(u)$ 是一确定性函数，且满足李不西兹(Lipschitz)条件，即

$$|f(u)-f(v)|\leqslant M|u-v|$$

其中 M 为某常数。又设$\{f(\xi_n)\}$，$n=1,2,3,\cdots$和$f(\xi)$ 均为二阶矩随机变量，则

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,f(\xi_n)=f(\xi)$$

证 因 $|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\leqslant M^2|(\xi_n-\xi)|^2$

$E\{|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\}\leqslant M^2E|(\xi_n-\xi)|^2$

而 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$ 或 $\lim_{n\to\infty}E|\xi_n-\xi|^2=0$

故 $\lim_{n\to\infty}E\{|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\}=0$

即 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,f(\xi_n)=f(\xi)$

推论 设 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，则对任意有限的 t，有 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\exp(jt\xi_n)=\exp(jt\xi)$，即若$\{\xi_n\}$均方收敛于$\xi$，则$\xi_n$的特征函数收敛于$\xi$的特征函数，从而$\xi_n$的分布函数收敛于$\xi$的分布函数。

§6 二阶矩过程的连续性

（一）随机过程是一族样本函数，样本函数是过程的一次观察所得的结果。如果它的每一样本函数在 t 点都是连续的，则可称该过程$\xi(t)$在 t 点连续。或用概率论中常用的办法：

如果 $\varepsilon\to 0$ 对几乎所有的样本函数满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\xi(t+\varepsilon)=\xi(t)$，即除了那些以零概率出现的样本函数才不满足上述关系，则称该随机过程以概率 1 在 t 点连续。

但是用这种方法来定义过程的连续性，其限制未免太严了一些。

（二）今后用均方意义的极限来描述随机过程的连续性。

均方连续的**定义** 设有二阶矩过程$\xi(t)$，在每一个t点，$-\infty<t<\infty$，有

$$\lim_{h\to 0}E\{|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\}=0$$

即

$$\xi(t)=\underset{h\to 0}{\text{l.i.m}}\,\xi(t+h)$$

则称$\xi(t)$在任意一个 t 点是均方意义下连续的，或称$\xi(t)$是均方意义下连续的随机过程，或称该二阶矩过程具有均方连续性。

（三）均方连续的准则

定理一 设有二阶矩过程$\{\xi(t), t\in T\}$，$R(s, t)$为其自相关函数，则$\{\xi(t)\}$在$t=t_0\in T$上均方连续的充要条件为它的自相函数$R(s,t)$在$(t_0,t_0)\in(T\times T)$处连续。

证 （1）设$R(s,t)$在$(s=t_0, t=t_0)$，$t_0\in T$处连续，

则
$$E\{|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2\}$$
$$=R(t_0+h, t_0+h)-R(t_0+h,t_0)$$
$$-R(t_0,t_0+h)+R(t_0,t_0)$$

当$h\to 0$时，上式右方趋于0，故
$$\lim_{h\to 0}E\{|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2\}=0$$

或
$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m}}\,\xi(t_0+h)=\xi(t_0)$$

（2）反之，若$\{\xi(t)\}$在$t=t_0\in T$处均方连续，根据许瓦兹不等式
$$|R(t+h, t+k)-R(t, t)|=|E\{\xi(t+h)\overline{\xi(t+k)}\}$$
$$-E\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\}|=|E\{[\xi(t+h)-\xi(t)]\overline{\xi(t+k)}$$
$$+\xi(t)[\overline{\xi(t+k)}-\overline{\xi(t)}]\}|$$
$$\leqslant E\{|\xi(t+h)-\xi(t)||\overline{\xi(t+k)}|\}+E\{|\xi(t)||\overline{\xi(t+k)}$$
$$-\overline{\xi(t)}|\}\leqslant\{E|\xi(t+h)-\xi(t)|^2E|\xi(t+k)|^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{E|\xi(t)|^2E|\xi(t+k)-\xi(t)|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

当$t=t_0\in T$，$h\to 0$，$k\to 0$时等式右边趋于0，这就意味着$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\k\to 0}}R(t_0+h, t_0+k)=R(t_0, t_0)$所以$\{\xi(t), t\in T\}$在T上均方连续的充要条件是$R(s.t)$在$[(t.t), t\in T]$上二元连续。

若$R(s,t)$在$[(t, t);t\in T]$上二元连续，则$\xi(t)$在$t_0\in T$，$s_0\in T$上均方连续，即
$$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}}\,\xi(t)=\xi(t)$$

$$\underset{s \to s_0}{\text{l.i.m}}\, \xi(s) = \xi(s_0)$$

于是根据§5定理三得

$$\lim_{\substack{s \to s_0 \\ t \to t_0}} E\{\xi(s)\overline{\xi(t)}\} = E\{\xi(s_0)\overline{\xi(t_0)}\}$$

即
$$\lim_{\substack{s \to s_0 \\ t \to t_0}} R(s,t) = R(s_0,t_0)$$

即如果 $R(s,t)$在对角线 $s=t \in T$ 上每点连续，则在整个$T \times T$ 平面上 $R(s,t)$也是连续的，两者是等价的。

(四) 若二阶矩随机过程$\xi(t)$是在均方意义下连续的，

则
$$\lim_{h \to 0} E\{\xi(t+h)\} = E\{\xi(t)\}$$

证 根据均方意义下连续的定义知

$$\lim_{h \to 0} E\{|\xi(t+h) - \xi(t)|^2\} = 0$$

利用 §5 中定理一即可得

$$\lim_{h \to 0} E\{\xi(t+h)\} = E\{\xi(t)\} = E\{\underset{h \to 0}{\text{l.i.m}}\, \xi(t+h)\}$$

即在均方连续的条件下，取平均和取极限的次序是可以交换的。但先取极限时指的是取均方极限。

(五) 上面讨论适用于一般的二阶矩过程。如果二阶矩过程是宽平稳随机过程，则有如下的定理。

定理二 设$\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$是宽平稳随机过程，则以下的各条件是等价的：

① $\{\xi(t)\}$均方连续；

② $\{\xi(t)\}$在 $t=0$ 点均方连续；

③ 自相关函数 $R_{\xi\xi}(\tau)$在$-\infty < \tau < \infty$上连续；

④ 自相关函数 $R_{\xi\xi}(\tau)$在 $\tau = 0$ 处连续。

或者说，宽平稳随机过程$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$均方连续的充要条件是其相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$\tau=0$处连续。

证（1）先证明①、②的等价性。由于$\xi(t)$是宽平稳随机过程，则

$$
\begin{aligned}
E\{|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\} &= E\{|\xi(t+h)|^2\} \\
&\quad - E\{\xi(t+h)\overline{\xi(t)}\} - E\{\xi(t)\overline{\xi(t+h)}\} \\
&\quad + E\{|\xi(t)|^2\} = R_{\xi\xi}(0) - R_{\xi\xi}(h) \\
&\quad - R_{\xi\xi}(-h) + R_{\xi\xi}(0) = E\{|\xi(h)-\xi(h)|^2\}
\end{aligned}
$$

故①、②是等价的，①⇆②。

（2）证明①⇆③

$$
\begin{aligned}
&|R_{\xi\xi}(\tau+h)-R_{\xi\xi}(\tau)| = |E\{\xi(\tau+h)\overline{\xi(0)}\} \\
&\quad - E\{\xi(\tau)\overline{\xi(0)}\}| = |E\{[\xi(\tau+h)-\xi(\tau)]\overline{\xi(0)}\}| \\
&\leqslant E\{|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)|\,|\xi(0)|\} \\
&\leqslant \{E|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)|^2 E|\xi(0)|^2\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

（根据许瓦兹不等式）

根据假定$\xi(t)$是均方连续的，即

$$\lim_{h\to 0} E|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)|^2=0$$

故
$$\lim_{h\to 0}|R_{\xi\xi}(\tau+h)-R_{\xi\xi}(\tau)|=0 \quad （对所有\tau）$$

因此 ①⇒③

（3）在（2）的证明中，设$\tau=0$，即可证明

①⇒③⇒④

（4）证明④⇒①

$$
\begin{aligned}
E\{|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\} &= 2R_{\xi\xi}(0)-R_{\xi\xi}(h) \\
&\quad - R_{\xi\xi}(-h) = 2R_{\xi\xi}(0)-R_{\xi\xi}(h)-\overline{R_{\xi\xi}(h)}
\end{aligned}
$$

如果条件④成立，即相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$\tau=0$处连续，则

$$\lim_{h\to 0}|R_{\xi\xi}(h)-R_{\xi\xi}(0)|=0$$

$$\lim_{h\to 0} |\overline{R_{\xi\xi}(h)} - R_{\xi\xi}(0)| = 0$$

故 $$\lim_{h\to 0} E\{|\xi(t+h) - \xi(t)|^2\} = 0$$

即 ④⇒①

因此，判断一个平稳过程是否均方连续，只要研究它的相关函数 $R_{\xi\xi}(\tau)$ 是否连续，如果 $R_{\xi\xi}(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处连续，则该过程为均方连续的。

§7 均方导数

（一）随机函数能否求导？如果随机过程 $\xi(t)$ 的所有样本函数都能使 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$ 存在，则 $\xi'(t)=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$ 就是它导数的样本函数。但该条件限制过严，因此今后也采用均方意义下导数的概念来定义随机过程的导数。

定义 设有随机过程 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 和随机过程 $\{\eta(t),\ t\in T\}$，设当 $h\to 0$ 时，$\dfrac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}$ 均方收敛于 $\eta(t_0)$，其中 $t_0\in T$，$t_0+h\in T$，则用 $\xi'(t_0)=\eta(t_0)$ 表示之，并称 $\eta(t_0)$ 为过程 $\xi(t)$ 在 $t=t_0$ 处的均方导数。如在整个T内有

$$\lim_{h\to 0} E\left\{\left|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} - \eta(t)\right|^2\right\} = 0 \tag{1}$$

则称 $\eta(t)=\xi'(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$ 为随机过程 $\xi(t)$ 在均方意义下的

导数。

但是(1)式中的$\eta(t)$一般并没有给出，因此往往不能用(1)式来判断$\xi(t)$是否能求导，于是采用§5中的柯西准则来定义：如果

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} E\left\{\left|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\frac{\xi(t+k)-\xi(t)}{k}\right|^2\right\}=0$$

则称$\xi(t)$可以在均方意义下求导。记

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=\xi'(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}=\dot{\xi}(t)$$

称它为$\xi(t)$在t处的均方导数或均方微商。

(二) 均方可导的判定准则

定理一 设有二阶矩过程$\xi(t)$，它的自相关函数为$R(t,s)$，则$\xi(t)$在$t=t_0\in T$处具有均方导数的充要条件为$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$在$(t_0,t_0)$附近存在且在$(t_0,t_0)$处连续。

证 若$\xi(t)$在t_0处均方可导，则要求

$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}$存在。根据Loève准则，它存在的充要条件为

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} E\left\{\left(\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right)\overline{\left(\frac{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}{k}\right)}\right\}$$

存在。

现考虑下面的等式关系

$$E\left\{\left(\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right)\overline{\left(\frac{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}{k}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{hk}\{[R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0+k)]$$

$$-[R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0)]\}$$

若$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$在$(t_0,t_0)$存在，它意味着$\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}$在$(t_0,t_0)$的附近存在且连续。根据中值定理，有

$$[R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0+k)]-[R(t_0+h,t_0)$$

$$-R(t_0,t_0)]=h\frac{\partial}{\partial t}[R(t_0+\theta_1 h,t_0+k)$$

$$-R(t_0+\theta_1 h,t_0)]$$

其中 $$0<\theta_1<1$$

由于$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$在$(t_0,t_0)$处存在且连续，则可以再一次利用中值定理

$$\frac{\partial}{\partial t}[R(t_0+\theta_1 h,t_0+k)-R(t_0+\theta_1 h,t_0)]$$

$$=k\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(t_0+\theta_1 h,\ t_0+\theta_2 k)\qquad(0<\theta_2<1)$$

因此 $$E\left\{\left[\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right]\left[\frac{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}{k}\right]\right.$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(t_0+\theta_1 h,t_0+\theta_2 k)$$

因$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}$在$(t_0,t_0)$处连续，故

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}E\left\{\left[\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right]\left[\frac{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}{k}\right]\right\}$$

$$=\left.\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\right]_{t_0,t_0}$$

于是定理得证。

由此可知，Loéve 准则包含着

$$E\{\xi'(t_0)\overline{\xi'(t_0)}\}=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(t,s)\Big]_{t_0,t_0}$$

因此$\{\xi(t),\ t\in T\}$在T上均方可导的充要条件是在一切$\{(t,t),\ t\in T\}$上$\dfrac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$存在，且在$(t,t)$上连续。

如果$\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(t,s)$在一切$\{(t,t),t\in T\}$上存在且连续，则有下列等式

$$E\{\xi'(t)\overline{\xi(s)}\}=\lim_{h\to 0}E\left\{\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\overline{\xi(s)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{R(t+h,s)-R(t,s)}{h}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}R(t,s)$$

$$E\{\xi(t)\overline{\xi'(s)}\}=\lim_{k\to 0}E\left\{\xi(t)\overline{\frac{\xi(s+k)-\xi(s)}{k}}\right\}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{R(t,s+k)-R(t,s)}{k}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}R(t,s)$$

同理 $E\{\xi'(t)\overline{\xi'(s)}\}=\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(t,\ s)=\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(t,s)$

均方导数还有下列性质：

（1）设$\xi(t)$、$\eta(t)$为二均方可导的随机过程，a、b

为常数，则 $a\xi(t)+b\eta(t)$ 也均方可导，且

$$\frac{d}{dt}[a\xi(t)+b\eta(t)]=a\frac{d\xi(t)}{dt}+b\frac{d\eta(t)}{dt}$$

（2）设 $\xi(t)$ 为均方可导的随机过程，$f(t)$ 为一确定性的可导的函数，则 $f(t)\xi(t)$ 也是均方可导的，且

$$\frac{d}{dt}[f(t)\xi(t)]=\frac{df(t)}{dt}\xi(t)+f(t)\frac{d\xi(t)}{dt}$$

（3）$\xi'(t)$ 的数学期望为

$$E\{\xi'(t)\}=E\left\{\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}E\left\{\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{E\{\xi(t+h)\}-E\{\xi(t)\}}{h}$$

$$=\frac{dE\{\xi(t)\}}{dt}$$

上式说明，如果 $\xi(t)$ 为均方可导，则 $\xi'(t)$ 的数学期望为 $\xi(t)$ 数学期望的导数，而 $E\{\xi(t)\}$ 为确定性函数故可求导。

（三）对于平稳随机过程，上述分析可以简化。

如果 $\xi(t)$ 为平稳随机过程，则 $R(t,s)=R(t-s)=R(\tau)$，其中 $\tau=t-s$。若 $R''(\tau)$ 存在，$\tau\in T$，而且在 $\tau=0$ 处 $R''(\tau)$ 连续，则 $\xi(t)$ 在 $t\in T$ 内均方可导，且 $E\{\xi'(t)\overline{\xi'(s)}\}=-R''(\tau)$

它可以从二阶矩过程存在均方导数的条件中直接得到。由于

$$R(t,s)=R(t-s)=R(\tau)\quad(\tau=t-s)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R(t,s) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R(\tau) = -R''(\tau)$$

当 $t=s$ 时　$\tau=0$，此时

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R(t,s)\right|_{t=s} = -\left.\frac{d^2}{d\tau^2} R(\tau)\right|_{\tau=0} = -R''(0)$$

若平稳随机过程为实过程，此时相关函数 $R(\tau)$ 为偶函数，即 $R(\tau)=R(-\tau)$。若该过程 $\xi(t)$ 存在均方导数，则要求 $R(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处有二阶导数存在，即要求 $R(\tau)$ 在 $\tau=0$ 为连续函数，$R'(\tau)$ 在 $\tau=0$ 也连续，因此 $R'(0)=0$。

由于平稳随机过程的数学期望 $E\{\xi(t)\}=$ 常数，那么它的均方导数 $\xi'(t)$ 的数学期望为 0，即

$$E\{\xi'(t)\} = \frac{d}{dt} E\{\xi(t)\} = 0$$

（四）求高阶导数

如果二阶矩过程 $\xi(t)$ 的均方导数 $\xi'(t)$ 仍满足均方求导的条件，则可以重复运用上面的原理求 $\xi'(t)$ 的均方导数 $\xi''(t)$。依此类推，如果二阶矩过程 $\xi(t)$ 的相关函数有 $2n$ 阶导数，且在对角线 $(t=s)$ 上连续，则 $\xi(t)$ 有均方意义下的 n 阶导数 $\xi^{(n)}(t)$，即 $\frac{d^n}{dt^n}\xi(t)=\xi^{(n)}(t)$ 存在。因此

$$R_{\xi^{(n)}\xi^{(n)}}(t,s) = E\{\xi^{(n)}(t)\overline{\xi^{(n)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial s^n} R_{\xi\xi}(t,s) \quad E\left\{\frac{d^n}{dt^n}\xi(t)\right\} = \frac{d^n}{dt^n} E\{\xi(t)\}$$

$$R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(t,s) = E\{\xi^{(n)}(t)\overline{\xi^{(m)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial t^n \partial s^m} R_{\xi\xi}(t,s) \quad (m \leqslant n)$$

如果$\xi(t)$是平稳随机过程，则

$$R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(\tau)=E\{\xi^{(n)}(t+\tau)\overline{\xi^{(m)}(t)}\}$$

$$=(-1)^m\frac{d^{(m+n)}}{d\tau^{(m+n)}}R_{\xi\xi}(\tau)$$

设$\xi(t)$、$\eta(t)$为两个二阶矩过程，则

$R_{\xi\eta}(t,s)=E\{\xi(t)\overline{\eta(s)}\}$

$$R_{\xi'\eta}(t,s)=E\{\xi'(t)\overline{\eta(s)}\}$$

$$=E\left\{\underset{h\to 0}{\text{l.i.m}}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\overline{\eta(s)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{E[\xi(t+h)\overline{\eta(s)}]$$

$$-E[\xi(t)\overline{\eta(s)}]\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[R_{\xi\eta}(t+h,s)-R_{\xi\eta}(t,s)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}R_{\xi\eta}(t,s)$$

同理 $R_{\xi^{(n)}\eta^{(m)}}(t,s)=E\{\xi^{(n)}(t)\overline{\eta^{(m)}(s)}\}$

$$=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n\partial s^m}R_{\xi\eta}(t,s)$$

（五）泰勒级数展开

若$\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$为平稳随机过程，$R_{\xi\xi}(\tau)$为它的自相关函数；如果自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$是解析的，即$R_{\xi\xi}(\tau)$存在各阶导数，且

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}R_{\xi\xi}^{(n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$$

即$R_{\xi\xi}(\tau)$可用泰勒级数展开，则$\xi(t)$可以用泰勒级数展开，

$\xi(t+\tau)$可以表示成

$$\xi(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

其中$\xi^{(n)}(t)$代表随机过程$\xi(t)$的n阶导数，它是均方意义下的n阶导数。

证 由于自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$的各阶导数均存在，故$\xi^{(n)}(t)$是存在的。设

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}=\hat{\xi}(t+\tau)$$

若能证明 $E\{|\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)|^2\}=0$ （1）

则就说明 $\xi(t+\tau)\overset{m.s}{=}\hat{\xi}(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\tau}\xi^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}$

现证明（1）式如下：

$$E\{|\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)|^2\}$$

$$=E\{[\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)]\overline{[\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)]}\}$$

$$=E\{[\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)]\overline{\xi(t+\tau)}\}$$

$$-E\left\{[\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\xi^{(n)}(t)}\frac{\tau^n}{n!}\right]\right\}$$

根据$R_{\xi\xi}(\tau)$存在各阶导数，故$R_{\xi\xi}^{(m)}(\tau)$也存在各阶导数。$R_{\xi\xi}^{(m)}(\tau)$可用泰勒级数展开

$$R_{\xi\xi}^{(m)}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}R_{\xi\xi}^{(m+n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$$

因此 $E\{[\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)]\overline{\xi^{(m)}(t)}\}$

$$=E\left\{\left[\xi(t+\tau)-\sum_{n=0}^{\infty}\xi^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}\right]\overline{\xi^{(m)}(t)}\right\}$$

$$= (-1)^m R_{\xi\xi}^{(m)}(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m R_{\xi\xi}^{(n+m)}(0) \frac{\tau^n}{n!} = 0$$

而 $\hat{\xi}(t+\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(m)}(t) \frac{\tau^m}{m!}$， 它是 $\xi^{(m)}(t)$ 的线性组合，因此

$$E\{[\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t+\tau)]\hat{\xi}(t+\tau)\} = 0$$

把 $R_{\xi\xi}(\tau+\lambda)$ 在 τ 附近展开成泰勒级数

$$R_{\xi\xi}(\tau+\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{\xi\xi}^{(n)}(\tau) \frac{\lambda^n}{n!}$$

取 $\lambda = -\tau$，得

$$R_{\xi\xi}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_{\xi\xi}^{(n)}(\tau) \frac{\tau^n}{n!}$$

$$R_{\xi\xi}(0) = \overline{R_{\xi\xi}(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \overline{R_{\xi\xi}^{(n)}(\tau)} \frac{\tau^n}{n!}$$

$$E\{[\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t+\tau)]\overline{\xi(t+\tau)}\}$$

$$= E\left\{\left[\xi(t+\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{(n)}(t) \frac{\tau^n}{n!}\right]\overline{\xi(t+\tau)}\right\}$$

$$= R_{\xi\xi}(0) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \overline{R_{\xi\xi}^{(n)}(\tau)} \frac{\tau^n}{n!} = 0$$

因此 $\quad E\{|\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t+\tau)|^2\} = 0$

即 $\quad \xi(t+\tau) \overset{m.s}{=} \hat{\xi}(t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{(n)}(t) \frac{\tau^n}{n!}$

§8 随机积分

（一）定义 设$\{\xi(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$为定义在$a\leqslant t\leqslant b$上的二阶矩过程，$h(t,\tau)$为定义在$[a,\ b]$上的任意确定性函数，其中$\tau$为一参数；现把$[a,\ b]$分成n个间隔

$$a=t_0<t_1<t_2\cdots<t_n=b$$

并设$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$i=1,2,3,\cdots,n$，$\hat{t}_i$为$[t_{i-1},\ t_i]$中的一点；又设

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

于是$S_n(\tau)$为以τ为参数的随机函数；如果存在$\eta(\tau)$，且不依赖于$\hat{t}_i$的选择有

$$\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}E\{|\eta(\tau)-S_n(\tau)|^2\}=0$$

或
$$\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}E\left\{\left|\eta(\tau)-\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\ \tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i\right|^2\right\}=0$$

则称$S_n(\tau)$均方收敛于$\eta(\tau)$，并称$h(t,\ \tau)\xi(t)$在$[a,\ b]$上均方可积，仿数学分析中黎曼积分的表示法，记$S_n(\tau)$的均方极限为$\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt$，即

$$\eta(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt=\underset{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}{\text{l.i.m}}\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

并称$\eta(\tau)=\int_a^b h(t,\ \tau)\xi(t)dt$为$h(t,\ \tau)\xi(t)$在$[a,\ b]$上的

均方积分。

$h(t,\ \tau)$可以仅是 t 的函数 $f(t)$。一般概率方面的书籍是用 $f(t)$而不是用 $h(t,\ \tau)$定义均方积分的。本书考虑到今后均方积分要用于卷积，所以采用了这样的方法定义它。

除用均方积分外，也可以从样本函数来定义随机积分。若$\xi(t)$是随机过程的一个样本函数，$h(t,\tau)$为确定性函数，那么对$\xi(t)h(t,\tau)$作一黎曼积分，这是一个普通函数的积分，即

$$[\eta(\tau)]_{s.c}=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta t_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

由于过程$\xi(t)$在每次试验中得到的样本函数是不同的，因而上述积分值是一随机变量。

由此提出一个问题，两种方式定义的随机积分是否等价？下面用概率论中的一个定理来说明之。

定理 设有一定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的随机变量序列$\{\xi_n\}$均方收敛于某一极限，以概率 1 收敛于另一个极限，则这两个极限以概率 1 相等。

由于$S_n(\tau)$是一随机序列，$S_n(\tau)$均方收敛于$[\eta(\tau)]_{m.s}$，而另一方面从样本函数积分定义了$[\eta(\tau)]_{s.c}$，因此，根据上述定理，两者以概率 1 相等。为了简便起见，今后可以把$[\eta(\tau)]_{m.s}$和$[\eta(\tau)]_{s.c}$的下标去掉，仅用$\eta(\tau)$表示之。

（二）均方可积的准则

定理 $h(t,\ \tau)\xi(t)$ 在$[a,\ b]$上均方可积的充要条件是

$$\int_a^b\int_a^b h(t,\ \tau)\overline{h(u,\tau)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu\ 存在。$$

证 利用 Loéve 准则来证明。

$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i$ 是一随机序列，它是对有限区间[a,b]作一种分割下得到的。对[a,b]可作另一种分割，得到另一随机序列

$$S_m(\tau)=\sum_{k=1}^{m}h(\hat{u}_k,\ \tau)\xi(\hat{u}_k)\Delta u_k$$

于是 $E\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\}$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\overline{\xi(\hat{u}_k)}\ \overline{h(\hat{u}_k,\tau)}\Delta t_i\Delta u_k\right.$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}h(\hat{t}_i,\tau)\overline{h(\hat{u}_k,\ \tau)}E\{\xi(\hat{t}_i)\overline{\xi(\hat{u}_k)}\}\Delta t_i\Delta u_k$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}h(\hat{t}_i,\tau)\overline{h(\hat{u}_k,\tau)}R_{\xi\xi}(\hat{t}_i,\hat{u}_k)\Delta t_i\Delta u_k$$

上式中 $R_{\xi\xi}(\hat{t}_i,\hat{u}_k)$ 是随机过程 $\xi(t)$ 的自相关函数。由于该过程为二阶矩过程，自相关函数是存在的，且是一个确定性函数。

如果 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\}$ 存在，则根据Loéve 准则$S_n(\tau)$均方收敛，即均方积分存在，因此当

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ \max\Delta t_i\to 0\\ \max\Delta u_k\to 0}}E\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\}$$

$$=\int_a^b\int_a^b h(t,\tau)\overline{h(u,\tau)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu$$

存在时，$h(t,\tau)\xi(t)$ 在[a,b]上的均方积分存在。

若区间不是有限区间则应理解为

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} E\left|\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt-\eta(\tau)\right|^2=0$$

$\eta(\tau)$存在的条件应为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\overline{h(u,\tau)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu<\infty$$

此时$\eta(\tau)$可以表示为

$$\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\xi(t)dt$$

上述等式应理解为均方意义下的等式。

（三）由于$\eta(\tau)$本身是参数为τ的随机函数，故可对$\eta(\tau)$取均值，也可取$\eta(\tau_1)\overline{\eta(\tau_2)}$乘积的均值，即可求$\eta(\tau)$的相关函数$E\{\eta(\tau_1)\overline{\eta(\tau_2)}\}=R_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2)$。$\eta(\tau)$的均值为

$$E\{\eta(\tau)\}=E\left\{\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt\right\}$$

$$=\int_a^b h(t,\tau)E\{\xi(t)\}dt$$

$\eta(\tau)$的相关函数为

$$R_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2)=E\{\eta(\tau_1)\overline{\eta(\tau_2)}\}$$

$$=E\left\{\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}\xi(t)\overline{\xi(u)}dtdu\right\}$$

$$=\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu$$

（四）均方积分的一些性质

（1）若$\{\xi(t);\ t\in T\subset[a,b]\}$为均方连续随机过程，则对一切$t\in T$有

$$E\left\{\int_a^t\xi(u)du\overline{\int_a^t\xi(v)dv}\right\}=E\left\{\left|\int_a^t\xi(u)du\right|^2\right\}$$

$$\leqslant(t-a)\int_a^t E\{\xi(u)\overline{\xi(u)}\}du\leqslant(b-a)\int_a^b E\{\xi(u)\overline{\xi(u)}\}du$$

证第二个不等式是显然的，因此只需证明第一个不等式。设 $h(t, \tau)=1$，则

$$E\left\{\left|\int_a^t \xi(u)du\right|^2\right\}=E\left\{\int_a^t\int_a^t \xi(u)\overline{\xi(v)}\,dudv\right\}$$

$$=\int_a^t\int_a^t E\{\xi(u)\overline{\xi(v)}\}dudu$$

而 $$E\left\{\left|\int_a^t \xi(u)du\right|^2\right\}\leqslant E\left\{\int_a^b\int_a^b |\xi(u)\overline{\xi(v)}|dudv\right.$$

$$=\int_a^t\int_a^t E\{|\xi(u)\overline{\xi(v)}|\}dudv$$

$$\leqslant\int_a^t\int_a^t \{E|\xi(u)|^2E|\xi(v)|^2\}^{\frac{1}{2}}dudv$$

$$=\left[\int_a^t\{E|\xi(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du\right]^2$$

$$\leqslant\int_a^t 1^2dv\int_a^t E|\xi(u)|^2du$$

$$=(t-a)\int_a^t E|\xi(u)|^2du$$

（2）设 $\xi(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续，则

$$\left\{E\left|\int_a^b \xi(u)du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\int_a^b\{E|\xi(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du$$

证 由于 $\xi(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，则 $R_{\xi\xi}(u, v)=E\{\xi(u)\overline{\xi(v)}\}$ 为连续函数，于是 $R_{\xi\xi}(u,v)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上可积，故 $\int_a^b \xi(u)du$ 存在，上式右方的积分也存在。

$$\left\{E\left|\int_a^b \xi(u)du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{E\left|\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{i=1}^n \xi(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{E\left|\sum_{i=1}^n \xi(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\{E|\xi(\hat{u}_i)|^2\}^{\frac{1}{2}}\Delta u_i$$

$$=\int_a^b\{E|\xi(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du$$

或
$$\left\{E\left|\int_a^b\xi(u)du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\int_a^b\sqrt{E|\xi(u)|^2}\,du$$

上面的证明中应用了三角不等式。

（3）设$\xi(t)$、$\eta(t)$在[a, c]上均方可积，α、β为常数，则有

$$\int_a^c[\alpha\xi(t)+\beta\eta(t)]dt=\alpha\int_a^c\xi(t)dt+\beta\int_a^c\eta(t)dt$$

若$a\leqslant b\leqslant c$，则

$$\int_a^c\xi(t)dt=\int_a^b\xi(t)dt+\int_b^c\xi(t)dt$$

（4）若$\xi(t)$在[a,b]上均方连续，设

$$\eta(t)=\int_a^t\xi(u)du \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

则$\eta(t)$在[a, b]上均方连续，均方可导，且有

$$\eta'(t)=\xi(t)$$

证 均方连续是显然的，现证明$\eta(t)$均方可导。

$$E\left\{\left|\frac{\eta(t+h)-\eta(t)}{h}-\xi(t)\right|^2\right\}$$

$$=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\xi(u)du-\xi(t)\right|^2\right\}$$

$$=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[\xi(u)-\xi(t)]du\right|^2\right\}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\sqrt{E[|\xi(u)-\xi(t)|^2]}\,du\right\}^2$$

$$\leqslant \{\operatorname*{Max}_{|u-t|\leqslant h} \sqrt{E[|\xi(u)-\xi(t)|^2]}\}^2$$

当 $h\to 0$ 时上式右边趋于 0，故 $\eta(t)$ 均方可导，且 $\eta'(t) \overset{m.s}{=} \xi(t)$。

推论 若 $\xi(t)$ 均方可导，且 $\xi'(t)$ 均方连续，则

$$\xi(b)-\xi(a)=\int_a^b \xi'(t)dt$$

§9 随机微分方程

这里仅讨论几种最简单的例子。

例 1 设有微分方程

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=\eta(t) \qquad (t\in T)$$

$$\xi(t_0)=\xi_0$$

其中 $\eta(t)$ 是二阶矩过程，ξ_0 是二阶矩随机变量，且 $\eta(t)$ 和 ξ_0 是相互统计独立的。研究 $\xi(t)$ 的统计特性。

解 对方程两边积分得

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^t \eta(u)du$$

该解是唯一的。

$$E\{\xi(t)\}=E\{\xi(t_0)\}+\int_{t_0}^t E\{\eta(u)\}du$$

当 $E\{\eta(u)\}=0$ 时

$$E\{\xi(t)\}=E\{\xi_0\}$$

$$E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$$

$$=E\{\xi_0\overline{\xi_0}\}+E\{\xi_0\}E\int_{t_0}^{t_2}\overline{\eta(u)}du+E\{\overline{\xi_0}\}E\int_{t_0}^{t_1}\eta(u)du$$

$$+E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\eta(u)\overline{\eta(v)}dudv\right\}$$

$$=E\{|\xi_0|^2\}+E\{\xi_0\}\int_{t_0}^{t_2}E\{\overline{\eta(u)}\}du$$

$$+E\{\overline{\xi_0}\}\int_{t_0}^{t_1}E\{\eta(u)\}du$$

$$+\int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1}R_{\eta\eta}(u,\ v)dudv$$

若 $E\{\eta(u)\}=0$，则

$$R_{\xi\xi}(t_1,\ t_2)=E\{|\xi_0|^2\}+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}R_{\eta\eta}(u,v)dudv$$

例2 设有一阶线性微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=a(t)x(t)+y(t)$$

其中 $a(t)$ 是普通的函数，若 $y(t)$ 是一确定性函数，初始条件 $x(t_0)=x_0$ 是一常数，则该方程的解为

$$x(t)=x_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(u)du\right\}$$

$$+\int_{t_0}^{t}y(v)\exp\left\{\int_{v}^{t}a(u)du\right\}dv$$

若 a 为常数，则

$$x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}e^{a(t-v)}y(v)dv$$

现在的输入函数是一均方连续的实二阶矩过程 $\eta(t)$，初始条件是实二阶矩随机变量 $\xi(t_0)=\xi_0$，则一阶线性微分方程有解

$$\xi(t)=\xi_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(u)du\right\}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left\{\int_{v}^{t}a(u)du\right\}dv$$

其中包含有 $\eta(v)$ 的积分是均方积分。

此结果可以验证如下：

① 当 $t=t_0$ 时，$\xi(t_0)=\xi_0$

② 右端各项求导

$$\frac{d}{dt}\xi_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(u)du\right\}=\xi_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(u)du\right\}a(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left\{\int_{v}^{t}a(u)du\right\}dv$$

$$=\eta(t)\exp\int_{t}^{t}a(u)du$$

$$+\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left\{\int_{v}^{t}a(u)du\right\}a(t)dv$$

$$=\eta(t)+a(t)\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left\{\int_{v}^{t}a(u)du\right\}dv$$

故
$$\frac{d\xi(t)}{dt}=a(t)\left[\xi_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(u)du\right)\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left(\int_{v}^{t}a(u)du\right)dv\right]$$

$$+\eta(t)=a(t)\xi(t)+\eta(t)$$

其实 $\xi(t)=\xi_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(u)du\right)+\int_{t_0}^{t}\eta(v)\exp\left(\int_{v}^{t}a(u)du\right)$ dv 仅是 $\xi(t)$ 的一个形式表示式，利用该表示式可以求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

$$E\{\xi(t)\}=E(\xi_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(u)du\right)$$

$$+\int_{t_0}^{t}E\{\eta(v)\}\exp\left(\int_{v}^{t}a(u)du\right)dv$$

$$
\begin{aligned}
K_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= E\{\xi_0^2\}\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t_2} a(v)dv\right) \\
&\quad + \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\right)\int_{t_0}^{t_2} E\{\xi_0\eta(v)\}\exp\left(\int_{v}^{t_2} a(u)du\right)dv \\
&\quad + \exp\left(\int_{t_0}^{t_2} a(u)du\right)\int_{t_0}^{t_1} E\{\xi_0\eta(v)\}\exp\left(\int_{v}^{t_1} a(u)du\right)dv \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} E\{\eta(v_1)\eta(v_2)\}\exp\left(\int_{v_1}^{t_1} a(u)du\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_{v_2}^{t_2} a(u)du\right)dv_1dv_2
\end{aligned}
$$

上述两个例子都是最简单的例子。对随机微分方程的进一步讨论将在第五章进行。

§10 各态历经性(遍历性)

研究随机过程的统计特性一般说需要知道过程的n维概率密度或n维分布函数，或者说要知道一族样本函数。这一点在实际问题中往往不易办到，因为这时要求对一个过程进行大量重覆的实验观察以便得到很多样本函数。

现在提出这样一个问题，能否从一个时间范围内观察到的一个样本函数作为提取这个过程数字特征的充分依据？所谓各态历经就是指可以从任意一个随机过程的样本函数中获得它的各种统计特性，具有这一特性的随机过程称为具有各态历经性的随机过程。因此，对于具有各态历经性的随机过程只要有一个样本函数就可以表示出它的所有的数字特征。

定义 设$\xi(t)$是均方连续平稳随机过程，如果它沿整个时间上的平均值即时间平均值$\langle\xi(t)\rangle$存在，即

$$\langle\xi(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt$$

存在，而且$\langle\xi(t)\rangle=E\{\xi(t)\}=\mu_\xi$依概率1相等。即$\langle\xi(t)\rangle$依概率1等于$\mu_\xi=E\{\xi(t)\}$，$\mu_\xi$代表随机过程的集平均（或称统计平均），则称该过程的均值具有各态历经性。

定义 设$\xi(t)$是一均方连续平稳随机过程，且对于固定的τ，$\xi(t+\tau)\xi(t)$也是连续平稳随机过程，$\langle\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\rangle$代表$\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}$沿整个时间轴的平均值，即

$$\langle\xi(t+\tau)\overline{s(t)}\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt$$

若$\langle\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}>$存在，称$\langle\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\rangle$为$\xi(\tau)$的时间相关函数。又若

$$\langle\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\rangle\overset{a.e}{=\!=}E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}=R_\xi(\tau)$$

则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

定义 如果$\xi(t)$是一均方连续平稳随机过程，且其均值和自相关函数均具有各态历经性，则称该过程$\xi(t)$为具有各态历经性的，或者说$\xi(t)$是各态历经的，或是遍历的。

例一 有随机相位正弦波过程$\xi(t)=A\cos(\omega t+\theta)$，其中A、$\omega$是常数，$\theta$为$[0,2\pi]$内均匀分布的随机变量。试计算它的时间平均值和时间相关函数，问该过程是否具有各态历经性？

解 $$\langle\xi(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\theta)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A\sin\omega T\cos\theta}{\omega T}=0$$

$$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)$$

$$\cos(\omega t+\theta)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)+\cos\omega\tau]dt$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau.$$

从第一章 §3 中知 $\xi(t)$ 的集平均值和集相关函数分别为

$$\mu_\xi(t) = E\{\xi(t)\} = 0$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$$

故

$$\mu_\xi(t) = E\{\xi(t)\} = \langle \xi(t)\rangle$$

$$R_\xi(\tau) = \langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\rangle$$

因此随机相位正弦波过程具有各态历经性。

例二 设有平稳随机过程 $\xi(t)=\eta$，其中 η 是异于零的随机变量，问该过程是否各态历经？

解 对于这一随机过程，每次试验得到的样本函数是不同的，即第一次试验 η 的出现值为 Y_1，则第一次试验中样本函数的时间均值为 $\langle\xi(t)\rangle = Y_1$；第二次试验 η 的出现值为 Y_2，则此时 $\langle\xi(t)\rangle = Y_2$；$Y_1$ 和 Y_2 两个值是不一定相同的，但 $E\{\xi(t)\} = E\eta =$ 常数。这样 $\langle\xi(t)\rangle$ 就不可能依概率 1 与 $E\eta$ 相等，因此本例中的过程不是各态历经的。

从例 2 可知平稳随机过程并不一定都是各态历经的，由此提出一个问题，一个均方连续平稳随机过程应该满足怎样的条件才能是各态历经的？

定理一 均值各态历经定理 平稳随机过程 $\xi(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)[R_\xi(\tau)-|\mu_\xi|^2]d\tau=0$$

证 $\langle\xi(t)\rangle$是一个样本函数的时间平均．不同样本函数所得到的$\langle\xi(t)\rangle$一般说是不同的，是随机的，现计算$\langle\xi(t)\rangle$的均值和方差。

$$E\{\langle\xi(t)\rangle\}=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt\right\}$$

交换积分和求均值的运算次序，且$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi$，故

$$E\{\langle\xi(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{\xi(t)\}dt=\mu_\xi$$

$$D\{\langle\xi(t)\rangle\}=E\{|\langle\xi(t)\rangle-\mu_\xi|^2\}$$

$$=E\{|\langle\xi(t)\rangle|^2\}-|\mu_\xi|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\xi(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}\overline{\xi(t_2)}\,dt_2\right\}-|\mu_\xi|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}dt_1dt_2\right]-|\mu_\xi|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_\xi(t_1-t_2)dt_1dt_2\right]-|\mu_\xi|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}[R_\xi(t_1-t_2)-|\mu_\xi|^2]dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_\xi(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

其中$C_\xi(t_1-t_2)=R_\xi(t_1-t_2)-|\mu_\xi|^2$代表$\xi(t)$的自协方差函数。

为了化简上式右端的积分，进行变量置换，设

$$t_1-t_2=\tau,\quad t_1+t_2=u$$

则 $$2t_1 = \tau + u, \quad 2t_2 = -\tau + u$$

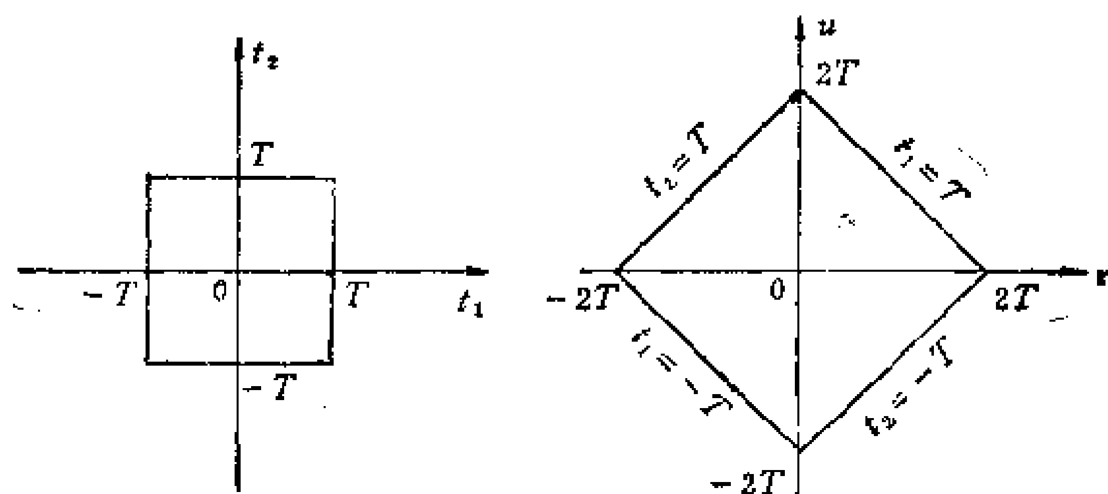


图 4-4

于是变换的雅可比式是

$$J = \frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(\tau, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial \tau} & \frac{\partial t_1}{\partial u} \\ \frac{\partial t_2}{\partial \tau} & \frac{\partial t_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

积分区域按图 4-4 转换，于是

$$D\{\langle\xi(t)\rangle\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_\xi(t_1 - t_2)dt_1dt_2\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}\frac{1}{2}C_\xi(\tau)dud\tau\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}[2T - |\tau|]C_\xi(\tau)d\tau\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)C_\xi(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right][R_\xi(\tau)-|\mu_\xi|^2]d\tau\right\}$$

从概率论的基本原理知，如果随机变η的均值$E\eta=C$（常数），方差$D\eta=0$，则η依概率1等于c。现在

$$E\{\langle\xi(t)\rangle\}=\mu_\xi$$

若 $$D\{\langle\xi(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]\right.$$

$$\left.[R_\xi(\tau)-|\mu_\xi|^2]d\tau\right\}=0$$

则$\langle\xi(t)\rangle$以概率1等于$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi$。因此$\langle\xi(t)\rangle$以概率1等于$E\{\xi(t)\}=\mu_\xi$的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right][R_\xi(\tau)-|\mu_\xi|^2]d\tau\right\}=0$$

这就是过程$\xi(t)$的均值满足各态历经的充要条件。

如果随机过程为实随机过程，则$C_\xi(-\tau)=C_\xi(\tau)$，$R_\xi(-\tau)=R_\xi(\tau)$。对于实平稳随机过程$\xi(t)$，均值满足各态历经的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left[1-\frac{\tau}{2T}\right][R_\xi(\tau)-\mu_\xi^2]d\tau=0\right.$$

定理二 自相关函数各态历经定理 平稳随机过程$\xi(t)$的自相关函数$R_\xi(\tau)$具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|u|}{2T}\right][B(u)-|R_\xi(\tau)|^2]du\right\}=0$$

其中 $$B(u)=E\{\xi(t+\tau+u)\overline{\xi(t+u)}\,\overline{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}}\}$$

其证明方法和定理一相似。

在实际应用中通常只考虑定义在$0\leqslant t<\infty$上的平稳随

机过程，在这种情况下，上面所用的时间平均都应以 $0 \leqslant t < \infty$ 上的时间平均来代替，因而相应的各态历经定理应该采用下述形式。

定理三　平稳随机过程$\xi(t)$的时间平均

$$\langle \xi(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt$$

和集平均$E\{\xi(t)\} = \mu$ 依概率 1 相等的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left[1-\frac{|\tau|}{T}\right]C_\xi(\tau)d\tau\right\} = 0$$

如果$\xi(t)$是实平稳随机过程，则其充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[1-\frac{\tau}{T}\right]C_\xi(\tau)d\tau\right\} = 0$$

定理四　平稳随机过程$\xi(t)$的时间相关函数

$$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)} \rangle = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt\right\}$$

和集相关函数 $E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\} = R_\xi(\tau)$依概率 1 相 等 的 充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left[1-\frac{|u|}{T}\right][B(u)-|R_\xi(\tau)|^2]du = 0\right.$$

其中　$B(u) = E\{\xi(t+\tau+u)\overline{\xi(t+u)}\,\overline{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}}\}$

如果$\xi(t)$是实平稳随机过程，则其充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[1-\frac{u}{T}\right][B(u)-R_\xi^2(\tau)]du = 0\right.$$

各态历经定理的重要价值在于它从理论上给出了如下保证：一个平稳随机过程只要满足了定理一、二或三、四中的充要条件，便可根据"时间平均"和"集平均"依概率1相等

的含义，从一次试验所得到的样本函数 $\xi(t)$ 确定出该过程的均值和自相关函数，即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt=\mu_\xi$$

或
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi(t)dt=\mu_\xi$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt=R_\xi(\tau)$$

或
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt=R_\xi(\tau)$$

如果试验记录只在时间[0, T]上给出了 $\xi(t)$ 的一个样本函数，则集平均和自相关函数有以下的估计式：

$$\mu_\xi\approx\hat{\mu}_\xi=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi(t)dt$$

$$R_\xi(\tau)\approx\hat{R}_\xi(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau}\xi(t)\xi(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T-\tau}\int_{\tau}^{T}\xi(t)\xi(t-\tau)dt$$

只有把 $\xi(t)$ 当作实平稳随机过程时上式才成立。

根据以上分析，可以设计出一种模拟式自相关分析仪，如图 4-5 所示。它的输入是被测的随机信号。由 x－y 记录器可以自动地描绘出自相关函数。

一般说，在实际应用中不可能给出 $\xi(t)$ 的表达式，因而用上面两个式子来估计 $\hat{\mu}_\xi$、$\hat{R}_\xi(\tau)$ 时，通常采用数字方法。如图 4-6 把[0, T]等分为N个长为 $\Delta t=\frac{T}{N}$ 的小区间，

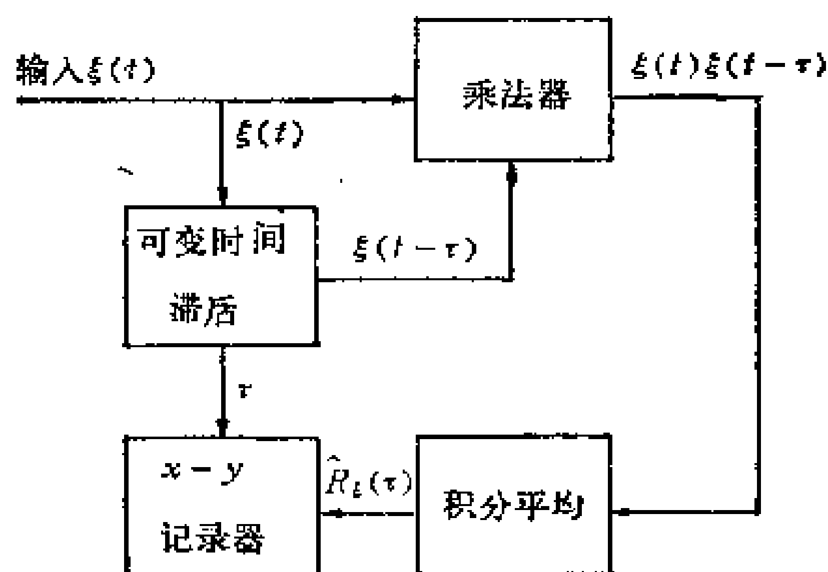


图 4-5

然后在时刻$t_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta t$，$k=1,2,3,\cdots,N$ 对 $\xi(t)$ 取样得N个样本函数值，$x_k=\xi(t_k)$，$k=1,2,3,\cdots,N$，

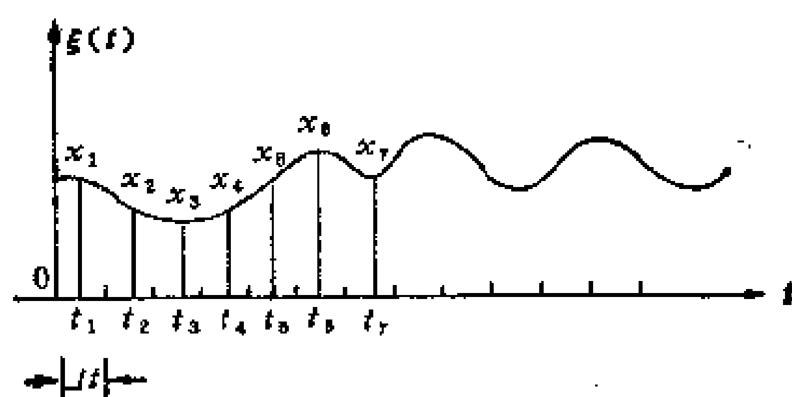


图 4-6

于是

$$\hat{\mu}_\xi=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}x_k\Delta t=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k$$

同样可以写出$\tau_r=(r\Delta t)$时的相关函数的估计式

$$\hat{R}_x(\tau_r)=\frac{1}{T-\tau_r}\sum_{k=1}^{N-r}x_k x_{k+r}\Delta t$$

$$=\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}x_k x_{k+r}$$

根据这个估计式可以算出$r=0,1,2,\cdots$各不同数值时自相关函数的一系列近似值，从而可以作出自相关函数的近似曲线。

各态历经的条件是比较宽的，工程实际中遇到的许多过程是能够满足它的条件的，不过要去验证它是否符合充要条件，往往比较困难。在许多情况下假定它具有各态历经性，从这个假设出发，对所得到的数据进行分析处理，看其结果是否与实际相符合，如果不相符合就要修改此假定，另作分析。

§11　两个或两个以上的联合平稳随机过程

在第一章§4中已经提出了要研究两个或两个以上随机过程的联合分布和数字特征问题。

如果把两个平稳随机过程$\xi(t)$、$\eta(t)$同时送到加法器的输入端，于是加法器的输出为$\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$，见图4-7。现在的问题是输出过程$\zeta(t)$是否平稳？

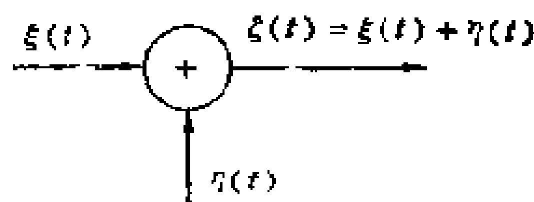


图 4-7

$$E\{\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}\}$$

$$= E\{[\xi(t+\tau)+\eta(t+\tau)][\overline{\xi(t)+\eta(t)}]\}$$

$$= E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\} + E\{\eta(t+\tau)\overline{\eta(t)}\} + E\{\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\} + E\{\eta(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}$$

$$= R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau) + E\{\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\} + E\{\eta(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}$$

上式中右端的后面两项是$\xi(t)$、$\eta(t)$两个过程的互关函数，它既是t又是$t+\tau$的函数，因此虽然两个过程$\xi(t)$、$\eta(t)$均系平稳过程，但其和$\zeta(t)$并不一定是平稳的。若要求输出过程$\zeta(t)$也是平稳的，则对过程$\xi(t)$和过程$\eta(t)$间的互关函数也要提出一些条件。

定义 若$\xi(t)$、$\eta(t)$为两个平稳随机过程，若其互关函数$E\{\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\}$及$E\{\eta(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}$仅为其时间差的函数，而与t无关，则称两随机过程$\xi(t)$、$\eta(t)$是联合平稳随机过程，即

$$E\{\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\} = R_{\xi\eta}(t+\tau,\ t) = R_{\xi\eta}(\tau)$$

$$E\{\eta(t+\tau)\overline{\xi(t)}\} = R_{\eta\xi}(t+\tau,\ t) = R_{\eta\xi}(\tau) = \overline{E\{\xi(t)\overline{\eta(t+\tau)}\}} = \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}$$

只有当$\xi(t)$、$\eta(t)$是平稳过程而且也是联合平稳过程时，其和$\zeta(t)$才是平稳过程，即

$$E\{\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}\} = R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau) + R_{\xi\eta}(\tau) + R_{\eta\xi}(\tau) = R_{\zeta\zeta}(\tau)$$

从研究加法器输出过程的性质可以看出定义两个随机过程为联合平稳的必要性。

联合平稳过程$\xi(t)$、$\eta(t)$的互关函数的一些性质：

(1) $$R_{\eta\xi}(\tau) = \overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}$$

若$\xi(t)$、$\eta(t)$均为实平稳过程，且又联合平稳，则

$$R_{\eta\xi}(\tau)=R_{\xi\eta}(-\tau)$$

由此可知，$\xi(t)$、$\eta(t)$均为实过程，互关函数是非偶函数；但实平稳过程的自相关函数为偶函数。

（2）若$\xi(t)$、$\eta(t)$为实平稳随机过程，且联合平稳，

则　$E\{[\xi(t)+\lambda\eta(t+\tau)]^2\}\geqslant 0$（λ为任意实数）。

或　$R_{\xi\xi}(0)+2\lambda R_{\eta\xi}(\tau)+\lambda^2 R_{\eta\eta}(0)\geqslant 0$

即　$[R_{\eta\xi}(\tau)]^2\leqslant R_{\xi\xi}(0)R_{\eta\eta}(0)$

同理　$[R_{\xi\eta}(\tau)]^2\leqslant R_{\xi\xi}(0)R_{\eta\eta}(0)$

$[C_{\eta\xi}(\tau)]^2\leqslant C_{\xi\xi}(0)R_{\eta\eta}(0)$

$[C_{\xi\eta}(\tau)]^2\leqslant C_{\xi\xi}(0)R_{\eta\eta}(0)$

§12　遍历性的应用

（一）遍历转换技术（Ⅰ）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的均值。

遍历转换技术是近来发展的一种方法，它用来测量某些对象的一些数字特征，如均值、相关函数。其特点是对模拟量的测量对象不需要采用乘法器和积分器就可以得到上述数字特征，在精度上可达到较高的程度，而且稳定可靠。

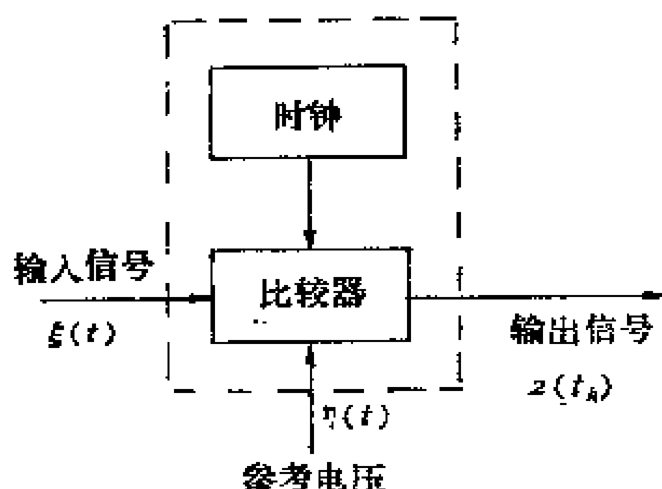


图　4-8

首先分析它的原理。其原理性方框图

见图4-8。图中被测信号$\xi(t)$输入到转换器中；转换器中有一时钟，它给出取样时刻t_k，在时刻t_k对$\xi(t)$取样得到$\xi(t_k)$；$\eta(t)$作为参考电压是具有均匀分布的严平稳遍历随机过程，在t_k诸取样时刻比较$\xi(t_k)$和$\eta(t_k)$之值，令比较器输出$z(t_k)$为

$$z(t_k)=\begin{cases}1 & (当\ \xi(t_k)>\eta(t_k)) \\ 0 & (其它)\end{cases}$$

由此完成了一个从模拟量到数字量（二进制）的转换，即$\xi(t_k)\to z(t_k)$。这一转换称为遍历转换。$\xi(t)$、$\eta(t)$、$z(t_k)$的关系见图4-9。在一定条件下，经过这一变换$\{z(t_k)\}$保留了$\xi(t)$的某些统计特征。

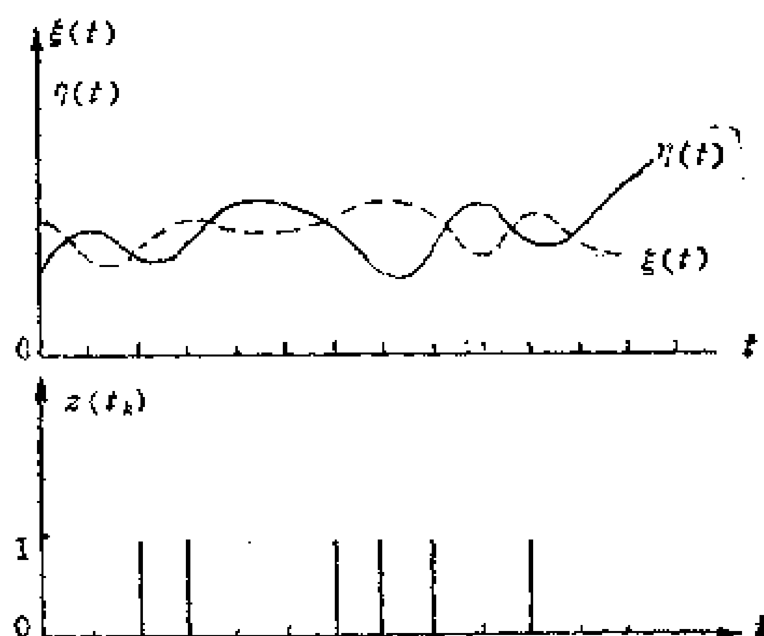


图 4-9

定理 设$\xi(t)$和$\eta(t)$是相互统计独立的遍历平稳随机过程，$\eta(t)$的一维概率密度均匀分布于$(0,a)$内，$\xi(t)>0$，$\{t_k,\ k=1,2,3,\cdots\}$是取样时刻，$t_1<t_2\cdots<t_k\cdots$，

令 $z(t_k)=\begin{cases}1 & (当\xi(t_k)>\eta(t_k)) \\ 0 & (其它)\end{cases}$

若 $E\{\xi(t)\}=\mu\xi$存在，则

(1) $P\{z(t_k)=1\}=\frac{1}{\alpha}E\{\xi(t)\}$

(2) $E\{\xi(t)\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}z(t_k)$

证 (1) 根据 $z(t_k)$的定义知

$$P\{z(t_k)=1\}=P\{\xi(t_k)>\eta(t_k)\}$$

$$=\iint\limits_{x>y}f_{\xi_{t_k},\eta_{t_k}}(x,y)dxdy$$

(如图所示)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{\xi_{t_k},\eta_{t_k}}(x,y)\cdot dydx$$

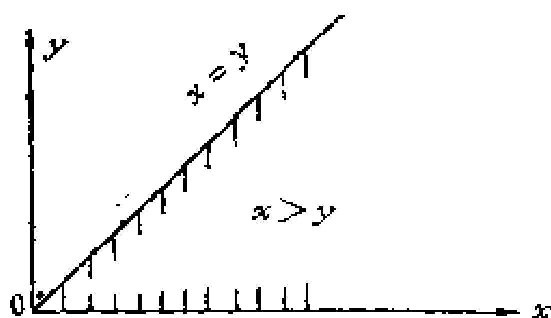


图 4-10

因$\xi(t)>0$，$\eta(t)>0$，并且$\xi(t)$和 $\eta(t)$ 是相关统计独立的平稳随机过程，故

$$P\{z(t_k)=1\}=\int_0^{\infty}\int_0^{x}f_{\xi_{t_k}}(x)f_{\eta_{t_k}}(y)dydx$$

$$=\int_0^{\infty}f_{\xi_{t_k}}(x)\int_0^{x}\frac{1}{\alpha}dydx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}xf_{\xi_{t_k}}(x)dx=\frac{E\{\xi(t_k)\}}{\alpha}$$

上面的推导中假定了 α 足够大，$P\{\xi(t_k)>\alpha\}$很小。

(2) 由于$z(t_k)$只能取两个值 0 或 1，而

$$P\{z(t_k)=1\}=\frac{E\{\xi(t_k)\}}{\alpha}=\frac{\mu_\xi}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}E\{\xi(t)\}$$

$$P\{z(t_k)=0\}=1-P\{z(t_k)=1\}=1-\frac{\mu_\xi}{\alpha}$$

式中$\mu_\xi=E\{\xi(t)\}$。由于$\xi(t)$是平稳过程，$E\{\xi(t)\}$与t无关，$z(t_k)$实质上是具有遍历性的平稳过程。因此

$$E\{z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z(t_k)$$

上式依概率1相等，于是

$$E\{z(t_k)\}=1\times P\{z(t_k)=1\}=P\{z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{1}{\alpha}E\{\xi(t)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z(t_k)$$

$$E\{\xi(t)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}z(t_k)$$

上式依概率1相等。

由上述定理可知，为了获得$\xi(t)$的数学期望，只需要在遍历转换器之后，在输出端接一个计数器即可。因为上式中右端求和相当于数$z(t_k)=1$的个数。这就是利用遍历转换技术以求$\xi(t)$均值的方法。

（二）遍历转换技术（Ⅱ）利用遍历转换技术以求输入$\xi(t)$的相关函数。

利用上述原理可以求二个遍历严平稳（联合平稳）随机过程$\xi_1(t)$和$\xi_2(t)$的互相关函数，其原理图见图4-11。

设输入信号$\xi_1(t)$、$\xi_2(t)$是两个严平稳随机过程，而且是联合平稳的；噪声产生器（Ⅰ）、（Ⅱ）产生两个相互统计独立，且在$(0,\alpha)$内均匀分布的参考电压$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$，而且$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$也是严平稳的；$\xi_1(t)$、$\xi_2(t)$均存在两阶矩，设

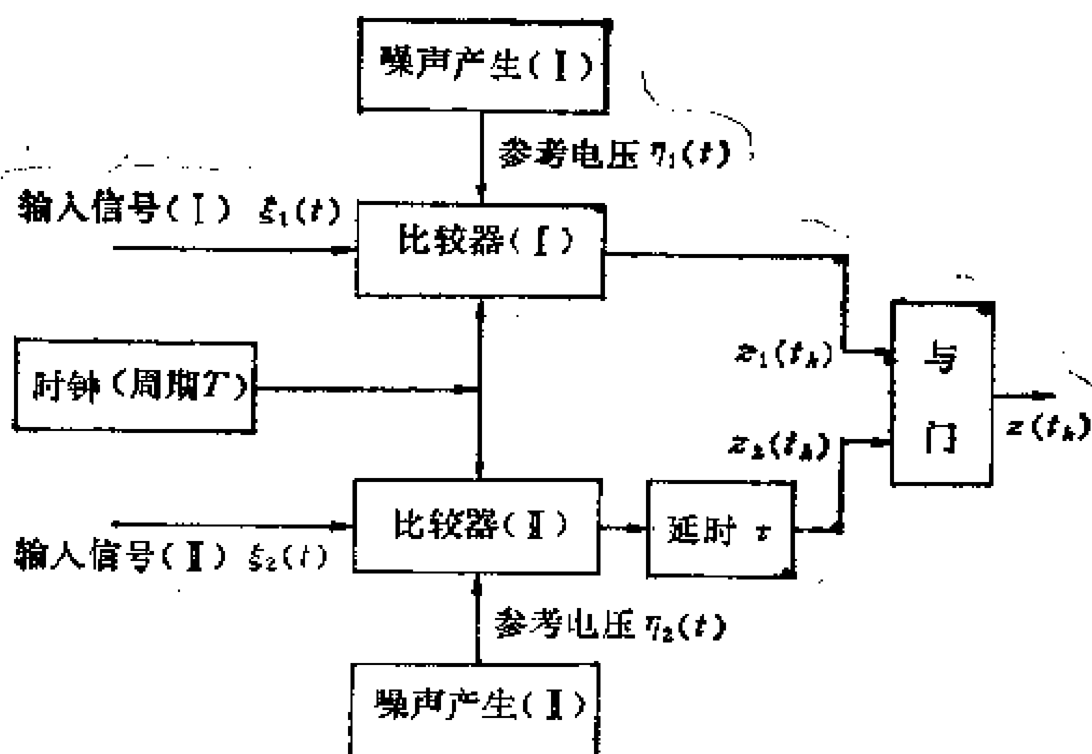


图 4-11

$E\{\xi_1(t)\xi_2(t-\tau)\}=R_{\xi_1\xi_2}(\tau)$；$\xi_1(t)$与$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$相互统计独立，$\xi_2(t)$与$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$也相互统计独立。

设$\xi_1(t)>0$，$\xi_2(t)>0$。取

$$z_1(t_k)=\begin{cases}1 & (当\ \xi_1(t_k)>\eta_1(t_k))\\ 0 & (其他)\end{cases}$$

$$z_2(t_k)=\begin{cases}1 & (当\ \xi_2(t_k)>\eta_2(t_k))\\ 0 & (其他)\end{cases}$$

令
$$z(t_k)=z_1(t_k)z_2(t_k-\tau)$$

则
$$z(t_k)=\begin{cases}1 & (当\ \xi_1(t_k)>\eta_1(t_k),\xi_2(t_k-\tau)>\eta_2(t_k-\tau))\\ 0 & (其他)\end{cases}$$

$$P\{z(t_k)=1\}=P\{\xi_1(t_k)>\eta_1(t_k),\ \xi_2(t_k-\tau)>\eta_2(t_k-\tau)\}$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x_1}\frac{1}{\alpha}dy_1\right)\left(\int_0^{x_2}\frac{1}{\alpha}dy_2\right)$$

$$f_{\xi_1(t_k)\xi_2(t_k-\tau)}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1x_2 f_{\xi_1(t_k)\xi_2(t_k-\tau)}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$\doteq \frac{1}{\alpha^2}R_{\xi_1\xi_2}(t_k, t_k-\tau) = \frac{1}{\alpha^2}R_{\xi_1\xi_2}(\tau)$$

由于$\{z(t_k)\}$的遍历性得

$$E\{z(t_k)\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z(t_k) \quad (\text{依概率 1 相等})$$

而 $$E\{z(t_k)\} = 1\times P\{z(t_k)=1\} \doteq \frac{1}{\alpha^2}R_{\xi_1\xi_2}(\tau)$$

故 $$R_{\xi_1\xi_2}(\tau) = \alpha^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z(t_k)$$

因此只要在遍历转换器之后对 $z(t_k)$ 进行计数，就可以得到$\xi(t_1)$和$\xi_2(t)$的互相关函数；如果$\xi_1(t)=\xi_2(t)$，则可以求得 $\xi_1(t)$的自相关函数。

在上面的推导中假定了 α 足够大，使 $P\{\xi_1(t_k)>\alpha\}$ 很小，$P\{\xi_2(t_k)>\alpha\}$也很小。

（三）利用**相关法**对混有噪声的弱周期信号进行检测。

在混有随机噪声的周期信号中提取其周期信号是通信工程中的一个重要的问题。例如在雷达接收机的输出端既存在着周期性的回波信号，又存在着随机噪声，雷达技术中的一个重要问题就是要在噪声背景中识别是否有周期信号的存在。

设 $$y(t) = s(t) + n(t)$$

$y(t)$代表接收机的输出，$s(t)$代表周期性的随机信号，且

s(t)的均值为零，n(t)代表随机噪声，且 $E\{n(t)\}=0$，s(t)和n(t)是相互统计独立的过程（假定$E\{n(t)\}=0$和$E\{s(t)\}=0$仅仅为了运算方便，这种假定并不影响其工作原理）。假设s(t)和 n(t)是具有各态历经特性的平稳随机过程，则 y(t)的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[y(t+\tau)y(t)]dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[s(t+\tau)+n(t+\tau)][s(t)+n(t)]dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)s(t)dt \\
&\quad + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t+\tau)n(t)dt \\
&\quad + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)n(t)dt \\
&\quad + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t+\tau)s(t)dt \\
&= R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)+R_{sn}(\tau)+R_{ns}(\tau)
\end{aligned}
$$

由于s(t)和 n(t)互相统计独立，且 $E\{s(t)\}=0$，$E\{n(t)\}=0$，s(t)、n(t)具有各态历经性，故$R_{sn}(\tau)=0$，$R_{ns}(\tau)=0$，即

$$R_{yy}(\tau)=R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)$$

由于周期性随机信号的自相关函数具有周期性，且自相关函数的周期等于随机信号的周期，而当 $\tau\to\infty$ 时随机噪声的自相关函数 $R_{nn}(\tau)\to 0$，因此当 τ 增大时信号总能从噪声中分出来。

如 n(t)为正态分布的平稳随机过程，$E\{n(t)\}=0$，

$R_{nn}(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$, $s(t)=A\cos(\omega t+\theta)$，$\theta$为均匀分布于$[0,2\pi]$间的随机变量，A、$\omega$为常数，

则
$$R_{ss}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$$

$$R_{yy}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau+\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$$

图4-12绘出了$R_{yy}(\tau)$，$R_{ss}(\tau)$，$R_{nn}(\tau)$与τ的关系曲线。从图中可以看到，无论σ^2多强，只要τ足够大，$R_{nn}(\tau)$就趋于0，就只有$R_{ss}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega t$这一项，它是一周期性函数，因此总能检测出来。即在$\tau$足够大后发现$R_{yy}(\tau)$出现周期性函数的性质，说明输出中包含有周期性随机信号s(t)。如果在τ足够大后$R_{yy}(\tau)$不呈现周期性，则说明输出中不存在信号。这种检测信号存在与否的方法称为自相关法检测，它是用时间来换取“在噪声背景中发现弱信号”的能力的。

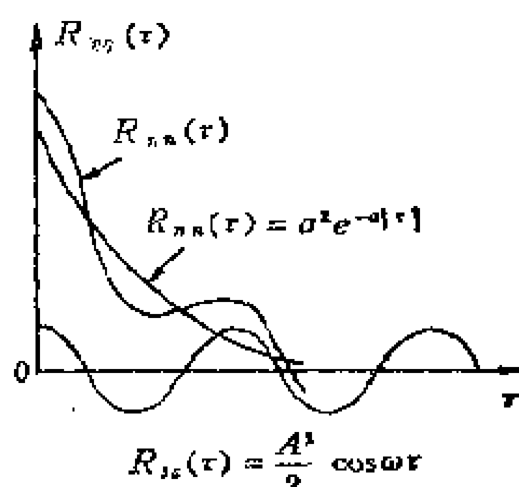


图 4-12

如果事先已经知道被检测信号的周期，那么可以利用互关法来检测信号。与上面所讨论的自相关法相比，互关法检测更加有效。

设接收机输出为

$$y(t)=s(t)+n(t)$$

式中s(t)代表周期性随机信号，它的周期为已知的，n(t)代

表接收机输出噪声，且 $E\{n(t)\}=0$。

在互关法中接收机内部提供一个与 s(t) 的周期相同的周期信号 g(t)。若 n(t) 与 g(t) 相互统计独立，且具有各态历经性，于是 y(t) 和 g(t) 间的互关函数为

$$R_{yg}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[s(t)+n(t)]g(t-\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t)g(t-\tau)dt$$

$$+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t)g(t-\tau)dt$$

而
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t)g(t-\tau)dt=R_{ng}(\tau)$$

$$=E\{n(t)g(t-\tau)\}=E\{n(t)\}E\{g(t-\tau)\}$$

$$=0$$

因 s(t) 和 g(t) 具有相同的周期，其互关函数也是周期函数，其周期即为 s(t) 的周期。上述结果表明 $R_{yg}(\tau)$ 内只有一项，它又是周期性的。因此互关法检测不像自相关法检测那样需要经过一段较长的时间 τ 才能显示出相关函数中是否存在有周期性函数，因此互关法检测更加有效。但是在互关法检测中必须事先确知被检测信号的周期。

（四）自相关法检测中增益的计算。

实际上相关器的取样平均时间 T 不是无限长，因此相关器的输出仍然存在着起伏噪声。下面计算自相关检测得到的增益。

为了便于处理分析，设周期信号为一随机相位的正弦波过程，即

$$s(t)=E_m\sin(\omega_0 t+\theta)$$

其中 E_m、ω_0 为常数，θ 为均匀分布于$[0, 2\pi]$间的随机变量，信号 $s(t)$的均方根值为 $E=\frac{E_m}{\sqrt{2}}$。

又设噪声 $n(t)$的均值 $E\{n(t)\}=0$，$n(t)$的方差为 σ_n^2，$n(t)$具有各态历经性，故$\langle n(t)\rangle=0$，$\langle [n(t)]^2\rangle=\sigma_n^2$，$\sigma_n^2$ 代表噪声的功率，于是噪声有效值为 σ_n。

于是相关器输入的信杂比为$\frac{S_i}{N_i}=\frac{E}{\sigma_n}=\frac{1}{\rho_i}$。

设 $z(t,\tau)=[s(t)+n(t)][s(t-\tau)+n(t-\tau)]$

理论上采用 $R_{yy}(\tau)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T z(t, \tau)dt$，但是在实际的相关器中 T 不是无穷长，现在假定在有限长的 T 时间内取 n 点平均来代表 $R_{yy}(\tau)$，那么所得到的值不是 $R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)$。如果 T 为无限长时间，则经过较长的 τ 后

$$R_{yy}(\tau)=R_{ss}(\tau)=\frac{E_m^2}{2}\cos\omega_0\tau=E^2\cos\omega_0\tau$$

如果 T 为有限，或在 T 内取有限个样本点（n个样本点），则 $z(t, \tau)$的 n 个样本平均值是起伏的，是一个随机变量，它的方差为

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma_z^2$$

其中 σ_z^2 代表 $z(t, \tau)$中一个样本点的方差，而

$$\begin{aligned}\sigma_z^2&=E\{z^2(t,\tau)\}-[E\{z(t,\tau)\}]^2\\&=\langle z^2(t,\tau)\rangle-[\langle z(t,\tau)\rangle]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle z(t,\tau)\rangle&=\langle[s(t)+n(t)][s(t-\tau)+n(t-\tau)]\rangle\\&=R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)+R_{sn}(\tau)+R_{ns}(\tau)\end{aligned}$$

而 $R_{sn}(\tau)=0,\qquad R_{ns}(\tau)=0$

当 τ 足够长时，$n(t)$和 $n(t-\tau)$趋于不相关，则

$$R_{nn}(\tau)=\langle n(t)n(t-\tau)\rangle=E\{n(t)n(t-\tau)\}$$
$$=E\{n(t)\}E\{n(t-\tau)\}=0$$

于是可得

$$\langle z(t,\ \tau)\rangle=R_{ss}(\tau)=\frac{E_m^2}{2}\cos\omega_0\tau=E^2\cos\omega_0\tau$$

$$\begin{aligned}\langle z^2(t,\tau)\rangle=&\langle[s(t)+n(t)]^2[s(t-\tau)+n(t-\tau)]^2\rangle\\=&\langle s^2(t)s^2(t-\tau)\rangle+\langle n^2(t)n^2(t-\tau)\rangle\\&+\langle s^2(t)n^2(t-\tau)\rangle+\langle n^2(t)s^2(t-\tau)\rangle\\&+2\langle s^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\rangle\\&+2\langle n^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\rangle\\&+4\langle s(t)s(t-\tau)n(t)n(t-\tau)\rangle\\&+2\langle s(t)n(t)s^2(t-\tau)\rangle\\&+2\langle s(t)n(t)n^2(t-\tau)\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\langle s^2(t)s^2(t-\tau)\rangle\\=&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E_m^4\sin^2(\omega_0t+\theta)\sin^2(\omega_0t-\omega_0\tau+\theta)dt\\=&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{E_m^4}{4}[1-\cos(2\omega_0t+2\theta)]\\&\cdot[1-\cos(2\omega_0t-2\omega_0\tau+2\theta)]dt\\=&\frac{E_m^4}{4}+\frac{E_m^4}{8}\cos 2\omega_0\tau=\frac{E_m^4}{4}+\frac{E_m^4}{8}(2\cos^2\omega_0\tau-1)\\=&\frac{E_m^4}{4}\cos^2\omega_0\tau+\frac{E_m^4}{8}=E^4\cos^2\omega_0\tau+\frac{E^4}{2}\end{aligned}$$

$$\langle n^2(t)n^2(t-\tau)\rangle = E\{n^2(t)n^2(t-\tau)\}$$
$$= E\{n^2(t)\}E\{n^2(t-\tau)\} = \sigma_n^4$$
$$\langle s^2(t)n^2(t-\tau)\rangle = E\{s^2(t)\}E\{n^2(t-\tau)\}$$
$$= \langle s^2(t)\rangle\langle n^2(t-\tau)\rangle = E^2\sigma_n^2$$
$$\langle n^2(t)s^2(t-\tau)\rangle = E^2\sigma_n^2$$
$$\langle s^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\rangle = E\{s^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\}$$
$$= E\{s^2(t)s(t-\tau)\}E\{n(t-\tau)\}$$
$$= \langle s^2(t)s(t-\tau)\rangle E\{n(t-\tau)\} = 0$$
$$\langle n^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\rangle$$
$$= \langle n^2(t)\rangle\langle s(t-\tau)\rangle\langle n(t-\tau)\rangle = 0$$
$$\langle s(t)s(t-\tau)n(t)n(t-\tau)\rangle$$
$$= \langle s(t)s(t-\tau)\rangle\langle n(t)\rangle\langle n(t-\tau)\rangle = 0$$
$$\langle s(t)n(t)s^2(t-\tau)\rangle = \langle s(t)s^2(t-\tau)\rangle\langle n(t)\rangle = 0$$
$$\langle s(t)n(t)n^2(t-\tau)\rangle = \langle s(t)\rangle\langle n(t)\rangle\langle n^2(t-\tau)\rangle$$
$$= 0$$

因此 $\langle z^2(t,\tau)\rangle = E^4\cos^2\omega_0\tau + \dfrac{E^4}{2} + \sigma_n^4 + 2E^2\sigma_n^2$

故 $$\sigma_z^2 = \frac{E^4}{2} + \sigma_n^4 + 2E^2\sigma_n^2$$

由此可知 $z(t,\tau)$ 的方差与 t、τ 无关。

n 个样本平均值的方差为

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{E^4}{2} + \sigma_n^4 + 2E^2\sigma_n^2\right]$$

只有当取样数不断增加时 σ^2 可以不断下降，当 $n\to\infty$ 时 σ^2 才有可能趋于零，即当样本点个数有限时它的方差不为零。样本点的个数值反映了相关器输出的噪声。相关器输出

噪声的均方根值为

$$N_{oa}=\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{E^4}{2}+\sigma_n^4+2E^2\sigma_n^2\right)}$$

自相关器输出的信号即为自相关器输出的理论值，它的有效值为

$$S_{oa}=\frac{E^2}{\sqrt{2}}$$

因此自相关器输出的信杂比为

$$R_{oa}=20\log_{10}\left(\frac{S_{oa}}{N_{oa}}\right)=10\log_{10}\frac{nE^4}{E^4+4E^2\sigma_n^2+2\sigma_n^4}(db)$$

$$=10\log_{10}\left[\frac{n}{1+4\rho_i^2+2\rho_i^4}\right](db)$$

如果 $\rho_i=10$，即输入信杂比 $\frac{S_i}{N_i}=\frac{1}{10}$ 或 $R_i=-20db$，那么当 $n=2\times10^4+4\times10^2+1\approx20400$ 时 $R_{oa}=0db$，即可获得 20db 的增益；如果选用 $n>20400$，则输出信杂比 $R_{oa}>0db$；若选用 $n=50000$，则 $R_{oa}=4db$，即可获得 24db的增益，这时可以明显地检测到输入 y(t)中存在着周期性的随机信号。从上面的公式也可以看出增加 n 可以增加输出的信杂比。

（五）互关法检测中增益的计算。

和上节讨论自相关检测中增益的计算相似，假定

$$y(t)=s(t)+n(t)$$

$$s(t)=E_{mi}\sin(\omega_0t+\theta_i)$$

其中 $E_i=\frac{E_{mi}}{\sqrt{2}}$，$\omega_0$ 为常数，θ_i 为均匀分布在[0, 2π]内的随机变量，即 s(t) 为随机相位的正弦波过程。n (t) 为噪声，

$E\{n(t)\}=0, D\{n(t)\}=\sigma_n^2$，$n(t)$具有各态历经性，则$\langle n(t)\rangle=0$，$\langle n^2(t)\rangle=\sigma_n^2$，噪声的有效值为$\sigma_n$。于是互相关器输入端的信杂比为$\frac{S_i}{N_i}=\frac{E_i}{\sigma_n}=\frac{1}{\rho_i}$。

在互相关器内部提供的周期信号$g(t)$为

$$g(t)=E_{m2}\sin(\omega_0 t+\theta_2)$$

其中 $E_2=\frac{E_{m2}}{\sqrt{2}}$为常数，$\theta_2$为随机变量，但$s(t)$与$g(t)$是相参的。

若$T\to\infty$，则

$$R_{yg}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[s(t)+n(t)]g(t-\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T z(t,\ \tau)dt=R_{sg}(\tau)$$

上式中$z(t,\ \tau)=[s(t)+n(t)]g(t-\tau)$代表样本函数。上述结果是在$T\to\infty$时得到的，是互关器输出的理论值

$$R_{yg}(\tau)=R_{sg}(\tau)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E_{m1}E_{m2}\sin(\omega_0 t+\theta_1)\sin(\omega_0 t-\omega_0\tau+\theta_2)dt$$

$$=E_1E_2\cos(\omega_0\tau+\theta)\qquad(\theta=\theta_1-\theta_2)$$

实际上T是有限的，即样本函数仅在有限时间内取平均，因而其样本平均仍然是起伏的，它是对n为有限时的样本平均。

设样本函数$z(t,\ \tau)$的方差为σ_z^2，则n个样本值平均的方差为

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma_z^2$$

而
$$\sigma_z^2=\langle z^2(t,\ \tau)\rangle-[\langle z(t,\tau)\rangle]^2$$

$$= E\{z^2(t,\ \tau)\} - [E\{z(t,\ \tau)\}]^2$$

$$\langle z(t,\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [s(t) + n(t)]g(t-\tau)dt$$

$$= E_1E_2\cos(\omega_0\tau + \theta)$$

$$\langle z^2(t,\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [s(t) + n(t)]^2[g(t-\tau)]^2dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [s(t)]^2[g(t-\tau)]^2dt$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T s(t)n(t)[g(t-\tau)]^2dt$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [n(t)]^2[g(t-\tau)]^2dt$$

其中 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)]^2[g(t-\tau)]^2dt$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E_{m1}^2E_{m2}^2\sin^2(\omega_0 t + \theta_1)\sin^2(\omega_0 t - \omega_0\tau + \theta_2)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_{m1}^2E_{m2}^2}{4}[1 - \cos2(\omega_0 t + \theta_1)]$$

$$\cdot [1 - \cos2(\omega_0 t - \omega_0\tau + \theta_2)]dt$$

$$= \frac{E_{m1}^2E_{m2}^2}{4} + \frac{1}{8}E_{m1}^2E_{m2}^2\cos 2(\omega_0\tau + \theta)$$

$$= E_1^2E_2^2\left[1 + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0\tau + \theta)\right]$$

$$= E_1^2E_2^2\left[1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cos^2(\omega_0\tau + \theta) - \frac{1}{2}\cdot 1\right]$$

$$= \frac{E_1^2E_2^2}{2} + E_1^2E_2^2\cos^2(\omega_0\tau + \theta)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t)n(t)[g(t-\tau)]^2dt$$

$$=\langle s(t)g^2(t-\tau)n(t)\rangle$$

$$=E\{s(t)g^2(t-\tau)n(t)\}$$

$$=E\{s(t)g^2(t-\tau)\}E\{n(t)\}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[n(t)]^2[g(t-\tau)]^2dt=\langle n^2(t)g^2(t-\tau)\rangle$$

$$=E\{n^2(t)\}E\{g^2(t-\tau)\}=\langle n^2(t)\rangle\langle g^2(t-\tau)\rangle$$

$$=\sigma_n^2E_2^2$$

故
$$\langle z^2(t,\tau)\rangle=\frac{E_1^2E_2^2}{2}+E_1^2E_2^2\cos^2(\omega_0\tau+\theta)+\sigma_n^2E_2^2$$

$$\sigma_z^2=\langle z^2(t,\tau)\rangle-[\langle z(t,\tau)\rangle]^2=\frac{E_1^2E_2^2}{2}+\sigma_n^2E_2^2$$

上述结果表明样本函数 $z(t,\tau)$ 的方差与 t、τ 无关，而

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\left(\frac{E_1^2}{2}+\sigma_n^2\right)E_2^2$$

上式给出了相关器输出噪声的方差，因此相关器输出噪声的均方根值为

$$N_{oc}=\sigma=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{E_1^2}{2}+\sigma_n^2}\,E_2$$

而相关器输出的信号、即它的输出理论值为

$$\langle[s(t)+n(t)]g(t-\tau)\rangle=E_1E_2\cos(\omega_0\tau+\theta)$$

故相关器输出信号的均方根值为 $S_{oc}=\frac{E_1E_2}{\sqrt{2}}$，相关器输出的信杂比为

$$R_{oc}=20\log_{10}\frac{S_{oc}}{N_{oc}}=10\log_{10}\frac{nE_1^2}{E_1^2+2\sigma_n^2}\quad(\text{db})$$

$$=10\log_{10}\frac{n}{1+2\rho_1^2}\quad(\text{db})$$

上述结果表明输出信杂比与本地信号 E_2 的强弱无关。

如果输入信杂比 $\frac{S_i}{N_i}=\frac{1}{10}$，即 $\rho_i=10$，如 n 仍选用 $n=50000$ 则

$$R_{nc}=10\log_{10}\frac{50000}{1+200}=24(\text{db})$$

这时互关法检测可以获得增益 24db + 20db = 44db，它比自相关法检测所获得的增益高 20db。从这一点上说互关法检测优于自相关法检测，但是互关法检测需要事先知道输入信号的周期，要在相关器内提供一个相参信号。

习　　题

1. 设有一泊松过程 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$，求：

（1）$P\{N(t_1)=k_1,\ N(t_2)=k_2\}$，用 t_1、t_2 的函数表示之；

（2）该过程的均值和相关函数。

问该过程是否为平稳过程？

2. 设有一个最一般概念的随机电报信号 $\{\xi(t)\}$，它的定义如下：

（1）$\xi(0)$ 是正态分布的随机变量 $N(0,\ \sigma^2)$；

（2）时间 τ 内出现的电报脉冲的个数服从泊松分布，

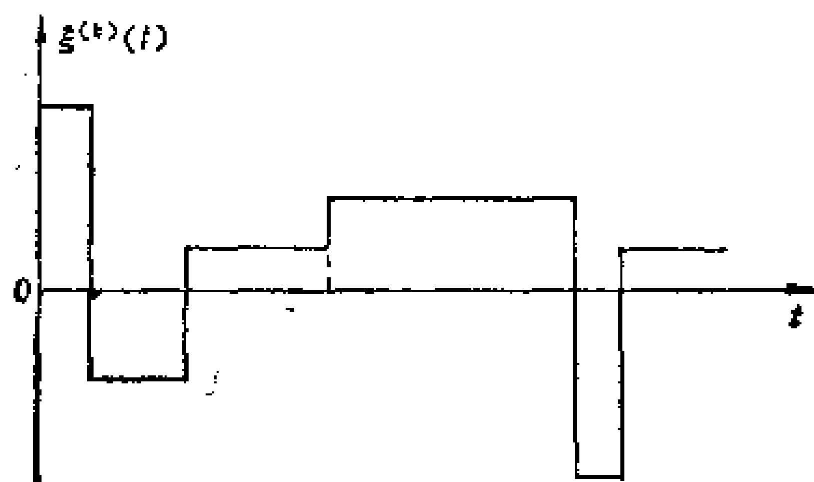
即
$$P\{k,\ \tau\}=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}\quad k=0,1,2,\cdots$$

（3）不同时间的电报脉冲幅度服从正态分布 $N(0,\ \sigma^2)$，这个脉冲幅度值延伸到下一个电报脉冲出现时保持不

变，在不同电报脉冲内的幅度取值是相互统计独立的，同一个电报脉冲内幅度是不变的；

（4）不同时间间隔内出现电报脉冲的个数是相互统计独立的。

它的样本函数如图题 4-2。



图题 4-2

（1）试求它的两元概率密度函数；

（2）试问该过程是否平稳？

3. 设 ξ_1、ξ_2 为独立同分布随机变量，且均匀分布于(0,1)上；又设有随机过程

$$\eta(t)=\xi_1\sin(\xi_2 t)\quad(t\geqslant 0)$$

求 （1）$\eta(t)$的均值；

（2）$\eta(t)$的相关函数。

4. 设$\xi(t)$是实正态分布平稳随机过程，它的数学期望为0，如定义

$$\eta(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\xi(t)\xi(t+\tau)}{|\xi(t)\xi(t+\tau)|}\right]$$

试证明 $\qquad E\{\eta(t)\}=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}[k_{\xi}(\tau)]$

其中 $k_{\xi}(\tau)=C_{\xi}(\tau)/\sigma_{\xi}^{2}$，$C_{\xi}(\tau)$代表$\xi(t)$的协方差函数，$\sigma_{\xi}^{2}=C_{\xi}(0)$代表$\xi(t)$的方差。

5. 设有随机过程$\xi(t)=z\sin(t+\theta)$，$-\infty<t<\infty$，其中z、θ是相互统计独立的随机变量，$P\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，

$P\left\{\theta=-\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{1}{2}$，Z均匀分分布于$(-1,1)$间。试证明$\xi(t)$是宽平稳随机过程，但$\xi(t)$不满足严平稳的条件（不满足一级严平稳的条件）。

6. 设z为随机变量，θ为另一随机变量，z与θ相互统计独立，θ均匀分布于$(0, 2\pi)$间，又设有随机过程

$$\xi(t)=z\sin(\omega t+\theta) \qquad (-\infty<t<\theta)$$

其中ω为常数，$\omega>0$，试利用特征函数证明$\xi(t)$系一严平稳随机过程。

7. 设有一相位调制的正弦信号，其复数表示式为

$$\xi(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))} \quad (-\infty<t<\infty)$$

其中ω为常数，$\omega>0$，$\theta(t)$是一个二阶矩平稳过程，设$\Psi_{t_1t_2}(u_1, u_2)$是过程$\theta(t)$的二维特征函数，即

$$\Psi_{t_1t_2}(u_1, u_2)=E\{e^{j[u_1\theta(t_1)+u_2\theta(t_2)]}\}$$

同时对于任何$-\infty<\tau<\infty$，$\Psi_{0\tau}(1, 0)=0$，试证明过程$\xi(t)$是宽平稳过程，并求它的相关函数$R_{\xi}(t_1, t_2)$。

8. 设有一时间离散的马尔科夫过程$\xi(n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$\xi(0)$具有概率密度函数

$$f_0(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，当给定 $\xi(n-1)=x$ 时 $\xi(n)$ 的条件概率密度均匀分布于 $(1-x, 1)$ 之间。问 $\xi(n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，是否满足严平稳的条件？

9. 设有两状态时间离散的马尔科夫链 $\xi(n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$\xi(n)$ 可取 0 或 1，它的一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

其中
$$p_1+q_1=1, \quad p_2+q_2=1$$

且
$$P\{\xi(0)=1\}=\frac{p_1}{p_1+p_2}$$

$$P\{\xi(0)=0\}=\frac{p_2}{p_1+p_2}$$

试证明该过程为严平稳过程。

10. 设有相位调制的正弦波过程

$$\xi(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$$

其中 ω 为常数，$\omega>0$，$\{\eta(t), t\geqslant 0\}$ 是泊松过程，A 是对称伯努利型随机变量，即 $P\{A=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{A=-1\}=\frac{1}{2}$，A 和 $\eta(t)$ 是相互统计独立的，试画出其样本函数，样本函数是否连续？求 $\xi(t)$ 的相关函数 $R_\xi(t_1, t_2)$，问该过程是否均方连续？

11. 设有实宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$，

试证
$$P\{|\xi(t+\tau)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon\}$$

$$\leqslant\frac{2}{\varepsilon^2}[R_\xi(0)-R_\xi(\tau)]$$

12. 设有随机过程

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$$

其中 A_k、 $k=1, 2, 3, \cdots, n$ 是 n 个实随机变量，ω_k，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ 是 n 个实数。试问各 A_k 之间应满足怎样的条件才能使 $\xi(t)$ 是一个复的平稳随机过程？

13. 设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，且 $R_\xi(T)=R_\xi(0)$，T 为一常数，$T>0$，试证：

① 有 $\xi(t+T)=\xi(t)$ 依概率 1 相等；

② $R_\xi(t+T)=R_\xi(t)$，即相关函数具有周期性，其周期为 T。

（具有周期性相关函数的平稳随机过程称为周期性随机过程）

14. 设有随机过程

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}[A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t]$$

其中 ω_k，$k=1,2,3,\cdots,n$ 是给定的实数，A_k、B_k，$k=1, 2, 3,\cdots,n$ 是实随机变量，$E\{A_k\}=0$，$E\{B_k\}=0$，各 A_k、B_k 间彼此相互统计独立，$D\{A_k\}=\sigma_k^2=D\{B_k\}$，$k=1,2,3,\cdots, n$。求它的相关函数 $R_\xi(t_1t_2)$。

15. 设有平稳随机过程 $\xi(t)$、$\eta(t)$，且 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 是相互统计独立的；又设有随机过程 $z(t)$、$\omega(t)$，

$$z(t)=\xi(t)+\eta(t)$$

$$\omega(t)=2\xi(t)+\eta(t)$$

求 $R_z(\tau)$、$R_w(\tau)$、$R_{zw}(\tau)$、$R_{wz}(\tau)$。

16. 设 $\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$ 为实随机过程，$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)$，$\xi(t)$、$\eta(t)$ 为相互统计独立的随机过程，则

（1） $R_\zeta(\tau)=R_\xi(\tau)R_\eta(\tau)$

（2）若 $P(t)=\xi(t)-\mu_\xi$

$$Q(t)=\eta(t)-\mu_\eta$$

$$R_P(\tau)=e^{-a|\tau|}$$

$$R_Q(\tau)=e^{-b|\tau|}$$

a、b 均为正实数，μ_ξ、μ_η 为 $\xi(t)$、$\eta(t)$的均值，求 $R_\zeta(t)$。

17．设有随机过程$\{\zeta(t),\ -\infty<t<\infty\}$，

$$\zeta(t)=\eta\cos t+\xi\sin t$$

其中 ξ、η 为统计独立的随机变量，ξ、η 均可取 -1和 $+2$ 两个值，取 -1 的概率为$\frac{2}{3}$，取 $+2$ 的概率为 $\frac{1}{3}$。

（1）试计算 $E\{\zeta(t)\}$、$R_\zeta(t_1,\ t_2)$；

（2）证 $\zeta(t)$是一宽平稳随机过程，但不是严平稳随机过程。

18． 设有随机游动 $\eta(t,\ s)$，

（1）$\eta(o,\ s)=0$；

（2）$\eta(t,\ s)$定义在样本点 s 集上，且 $t\geqslant 0$；

（3）每隔时间间隔 T，该过程取一个新的值，

$$\eta(t,\ s)=Y_n\quad (nT\leqslant t<(n+1)T)$$

（4）Y_n 是二项分布随机变量，

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

ξ_k 为取$(-a)$、$(+a)$两个可能值的随机变量，且$P\{\xi_k=-a\}=\frac{1}{2}$，$P\{\xi_k=+a\}=\frac{1}{2}$，$k=1,2,3,\cdots$，$\xi_j$ 与$\xi_k(j\neq k)$相互统计独立。

（1）试证 $E\{\eta(t,\ s)\}=0$；

（2）试证 $E\{\eta^2(t,\ s)\}=na^2=a^2[t/T]$；

（3）当 $T\to 0$，每次跃变值 a 也趋于 0 时，$\frac{a^2}{T}\to\beta$，β 为常数，定义

$$z(t)=\lim_{T\to 0}\{\eta(t,s)\}$$

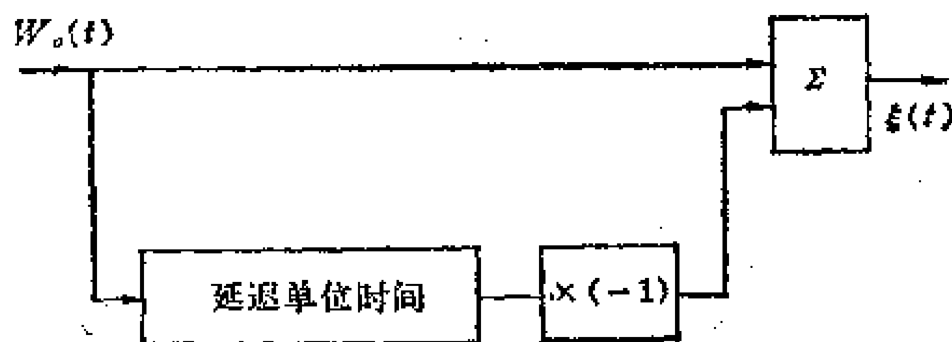
$$\frac{a^2}{T}\to\beta$$

试证 $E\{z(t)\}=0$，$D\{z(t)\}=\beta t$

（4）求 z(t) 的概率密度函数；

（5）$\eta(t,\ s)$、z(t) 均为独立增量随机过程，求 $C_z(t_1,\ t_2)$。（过程 z(t) 称为维纳过程）。

19．设有图题 4-19 所示的电路，其中 $W_0(t)$ 为输入随



图题 4-19

机过程，$W_0(t)$ 为标准维纳过程（即上题中的 z(t)，且其 $\beta=1$）；其输出为 $\xi(t)=W_0(t)-W_0(t-1)$。求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

20．定义 $\xi(t)=\sigma e^{-\alpha t}W_0(e^{2\alpha t}-1)$，其中 σ、α 均为常数，$\sigma>0$，$\alpha>0$，$W_0(\cdot)$ 代表标准维纳过程，称 $\xi(t)$ 为 Ornstein-Uhlenbeck 过程，求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

21. 设有随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$；若有随机过程$\eta(t)=a(t)\xi(t)+b(t)$，其中$a(t)$、$b(t)$是确定性函数，求$\eta(t)$的均值和相关函数。

22. 设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为

$$R_\xi(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$$

其中A,α为常数，$\alpha>0$，求$\eta(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}$的相关函数。

23. 设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的自协方差函数为

$$C_\xi(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$$

其中A、α、β为常数，又$\eta(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}$，求$\eta(t)$的自协方差函数及方差。

24. 设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为

$$R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha^2\tau^2}$$

其中σ、α为常数；若有随机过程$\eta(t)=a\frac{d\xi(t)}{dt}$，a为常数，求$\eta(t)$的相关函数。

25. 设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的相关函数为$R_\xi(\tau)$，

且设
$$\eta(t)=\xi(t)+\frac{d\xi(t)}{dt}+\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}$$

求$\eta(t)$的相关函数。

26. 设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为

$$R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$$

若有随机过程$\eta(t)$，$\eta(t)=\xi(t)+\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}$，求$\eta(t)$的相关

函数。

27. 设有随机过程 $\xi(t)$，它的相关函数为 $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$；若另有随机过程 $\eta(t)$、$\zeta(t)$ 定义如下：

$$\eta(t) = a\xi(t) + b\frac{d\xi(t)}{dt}$$

$$\zeta(t) = c\frac{d\xi(t)}{dt} + f\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}$$

其中 a、b、c、f 为常数，试求 $\eta(t)$ 和 $\zeta(t)$ 的互关函数 $R_{\eta\zeta}(t_1, t_2)$。

28. 设有平稳随机过程 $\xi(t)$，它的均值为 0，相关函数为 $R_\xi(\tau)$；若 $\eta(t) = \int_0^t \xi(u)du$，求 $\eta(t)$ 的方差和自协方差函数。

29. 设有随机过程 $\xi(t)$，它的均值为 $\mu_\xi(t)$，相关函数为 $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$，协方差函数为 $C_{\xi\xi}(t_1, t_2)$，若

$$\eta(t) = a_0\xi(t) + a_1\frac{d\xi(t)}{dt} + b_1\int_0^t e^{-\lambda u}\xi(u)du + c$$

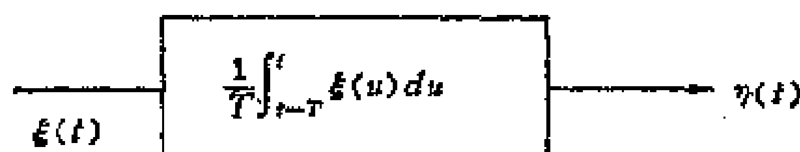
其中 a_0、a_1、b_1、c 均为实常数，求 $\eta(t)$ 的均值和自协方差函数。

30. 设有实随机过程 $\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$ 加入到一短时间的时间平均器上作为它的输入，它的输出为 $\eta(t)$，

$$\eta(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \xi(u)du,$$

式中 t 为输出信号的观测时刻，T 为平均器采用的积分时间间隔。若 $\xi(t) = \zeta\cos t$，其中 ζ 为 (0,1) 内均匀分布的随机变量，

（1）求输入过程的均值和相关函数，问输入过程是否平稳？



图题 4-29

（2）证明输出过程 $\eta(t)$ 的表示式为

$$\eta(t)=\xi\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

（3）证明输出的均值为

$$E\{\eta(t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

输出相关函数为 $R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2$

$$\cdot\cos\left(t_1-\frac{T}{2}\right)\cos\left(t_2-\frac{T}{2}\right)$$

问输出是否为平稳过程？

31．如果短时间平均器的输入信号为

$$\xi(t)=\sin(\omega t+\theta)\quad(-\infty<t<\infty)$$

其中 ω 为常数，$\omega>0$，θ 为随机相角，它是 $(0,2\pi)$ 内均匀分布的随机变量，试证明：

（1） $R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\cos\omega(t_1 - t_2)$

（2） 它的输出信号表示式为

$$\eta(t) = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\sin\left(\omega t - \frac{\omega T}{2} + \theta\right)$$

（3） 输出信号 $\eta(t)$的均值 $E\{\eta(t)\} = 0$,
输出信号相关函数为

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2\cos\omega(t_1 - t_2)$$

问 $\eta(t)$是否平稳?

32. 若短时间平均器的输入为宽平稳随机过程 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$，其均值为常数 μ_ξ，相关函数为 $R_\xi(\tau)$，试证明它的输出也是宽平稳随机过程，并计算出它的均值和相关函数。

33. 如果短时间平均器的输入为宽平稳随机过程 $\xi(t)$，它的均值为 μ_ξ，协方差函数为

$$C_{\xi\xi}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right) & (0 \leqslant |\tau| \leqslant \tau_0) \\ 0 & (|\tau| \geqslant \tau_0) \end{cases}$$

$\eta(t)$为其输出过程，试证

$$D\eta(t) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 - \frac{1}{3}\frac{T}{\tau_0}\right) & (0 \leqslant T \leqslant \tau_0) \\ \sigma^2\frac{\tau_0}{T}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\tau_0}{T}\right) & (\tau_0 < T) \end{cases}$$

34. 如果短时间平均器的输入为随机电报信号，它的均值为$\frac{1}{2}$，它的自协方差函数为 $C_\xi(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$，$\eta(t)$为平均器的输出过程，试证 $\eta(t)$的方差为

$$D\eta(t)=\frac{1}{4\lambda T}\left(1-\frac{1}{2\lambda T}+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T}\right)$$

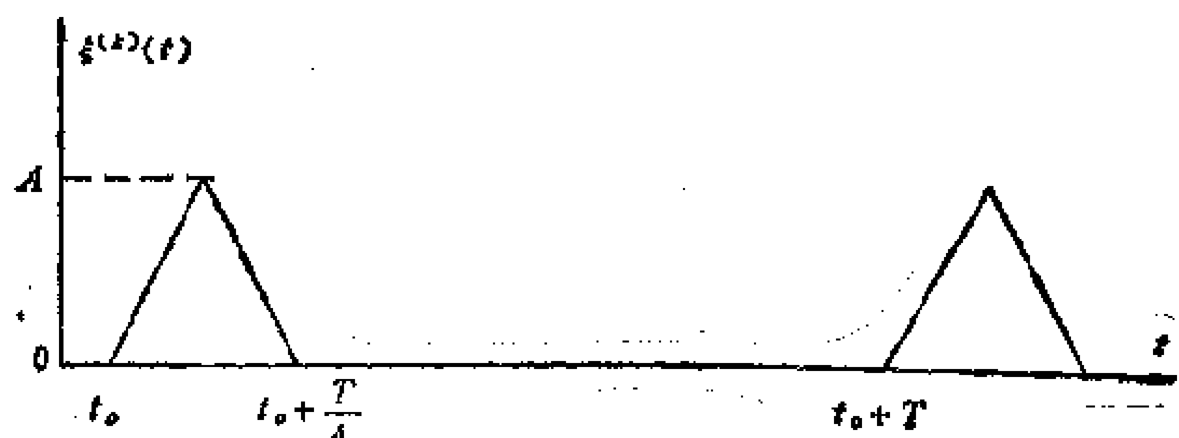
35. 设有随机过程$\xi(t)$ 和 $N(t)$，且$\xi(t)=b+N(t)$，其中 b 为常数，$E\{N(t)\}=0$，$N(t)$的相关函数为 $R_N(\tau)$，即$N(t)$为平稳随机过程。如果

$$\hat{b}=\frac{1}{T}\int_0^T\xi(u)du$$

证
$$E\{\hat{b}\}=b$$

且
$$D\hat{b}=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_N(\tau)d\tau$$

36. 设$\xi(t)$为一随机起始时间的周期过程，它的样本函数见图题4-36。图中A为幅度，T 为周期，A、T均为



图题 4-36

常数，t_0为起始时间，它是(0，T)上均匀分布的随机变量。

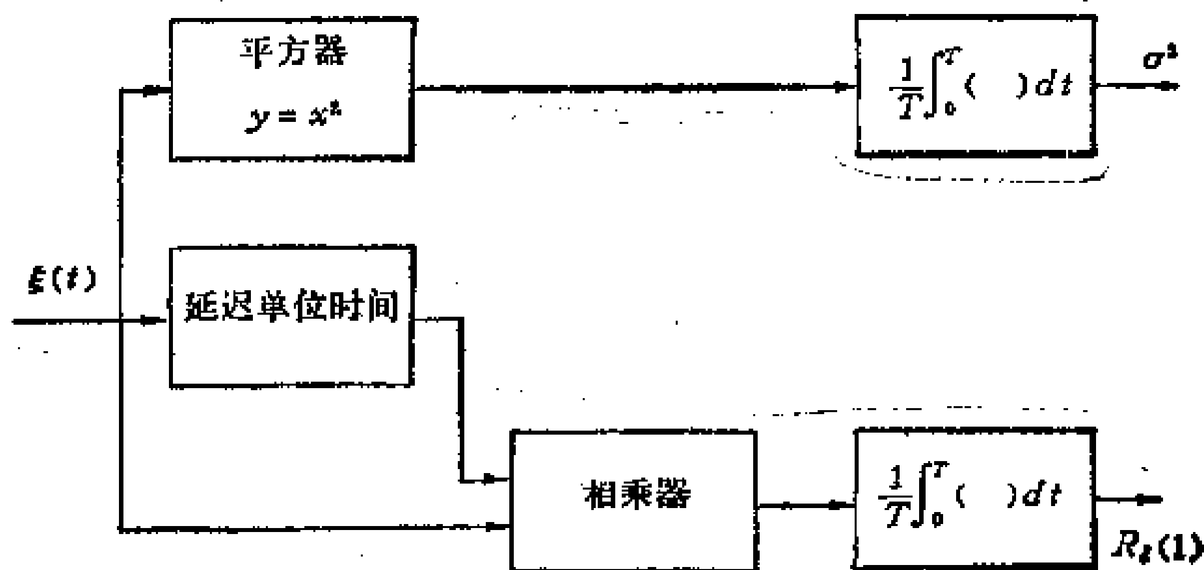
求：

（1）$\xi(t)$的均值$E\{\xi(t)\}$、均方值$E\{\xi^2(t)\}$和方差$D\xi(t)$；

（2）$\xi(t)$的时间平均值$\langle\xi(t)\rangle$和$\langle\xi^2(t)\rangle$，问$\xi(t)$是否具有各态历经性？

37．设有平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi=0$，相关函数为$R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$，$-\infty<\tau<\infty$，其中$\sigma^2$、$\alpha$为常数$\alpha>0$，试证明该过程满足均值各态历经定理（其实它也符合相关函数各态历经定理（不证））。

试说明：利用图题 4-37 所示的方块图可以用一个样本函数求得它的参数σ^2和$\alpha=\ln\left[\frac{\sigma^2}{R_\xi(1)}\right]$。



图题 4-37

第五章　平稳随机过程的谱分析及随机过程通过线性系统的分析

§1　谱　分　析

在电路分析中利用傅里叶变换这一有效工具以确立时域和频域的关系。但是，以往所讨论的问题是研究确定性函数的谱分析，现在要进一步讨论是否能利用傅里叶变换来研究平稳随机过程。为此，首先对确定性函数的傅氏变换作一些回顾，然后再研究平稳随机过程的谱分析。

（一）周期函数的傅氏级数表示

若 $x(t)$ 为实或复周期性函数，其周期为 T，且 $x(t)$ 在一个周期内绝对可积，即 $\int_0^T |x(t)|\,dt<\infty$，则 $x(t)$ 可用下列傅氏级数展开

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

其中　$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

而　$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{2}$$

a_n 称为傅里叶系数，一般说 a_n 是一个复数，即 a_n 包括振幅和相位两个部分。

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left[\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}}\right]dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \cdot \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

即
$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \qquad (3)$$

（3）式称为周期性函数的帕塞伐等式（或帕塞伐定理）。

由于（3）式的左边代表周期函数的功率，那末右边的各项 $|a_n|^2$ 代表该频率分量的功率，$|a_n|^2$，$n=0$，±1，±2，…组成一功率谱。

为了在今后讨论中采用一致的功率谱表示方法，一个周期函数可用一个功率谱来描述它。而当用功率谱表示时仅仅利用了振幅 $|a_n|$，而把 a_n 的相位信息丢失了。

设 $\mathscr{S}(f)$ 代表周期函数 $x(t)$ 的功率谱密度，则

$$\mathscr{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad \left(f_0 = \frac{1}{T}\right) \qquad (4)$$

$\mathscr{S}(f)$ 是一系列 δ-函数，它的强度 $|a_n|^2$ 是该频率分量的功率，故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{S}(f)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt \qquad (5)$$

由于 $\mathscr{S}(f)$ 的表示式中仅利用了 $|a_n|$，因而会产生下列情况：若有两个波形不同的周期函数，两者的振幅特性一致，仅仅相位不同，则它们具有相同的功率谱密度，而频谱是不同的。

如果 $x(t)$ 为实周期函数，则

$$a_{-n}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j(-n)\omega_0 t}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\overline{\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt}=\overline{a_n} \qquad (6)$$

即 a_n 和 a_{-n} 是共轭的，故$|a_n|^2=|a_{-n}|^2$，因此当 $x(t)$ 为实周期函数时 $\mathscr{S}(t)$ 为偶函数。

不论 $x(t)$ 是实的还是复的周期 函 数，$|a_n|^2>0$，因 而 $\mathscr{S}(t)$ 是非负函数。

周期函数 $x(t)$ 的时间相关函数为 $\mathscr{R}(\tau)$

$$\mathscr{R}(\tau)=\langle x(t+\tau)\overline{x(t)}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)\overline{x(t)}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0(t+\tau)}\overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{jm\omega_0 t}}\,dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a_n\bar{a}_m e^{jn\omega_0(t+\tau)}e^{-jm\omega_0 t}\,dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2 e^{jn\omega_0\tau} \qquad (7)$$

由（7）式可知周期函数的时间相关函数仍是周期性的。

对时间相关函数取傅氏变换得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{R}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-n\omega_0)\tau}d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \delta(f - nf_0) = \mathscr{S}(f)$$

故 $$\mathscr{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{R}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{8}$$

反之 $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{S}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \delta(f - nf_0) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{j2\pi n f_0 \tau} = \mathscr{R}(\tau) \tag{9}$$

(8)、(9)两式说明周期函数 $x(t)$的时间相关函数$\mathscr{R}(\tau)$和它的功率谱密度 $\mathscr{S}(f)$成为一对傅氏变换。

（二）设 $x(t)$是定义在时间 t 轴上的确定性非周期函数，且绝对可积，即$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$，则 $x(t)$ 的傅氏积分存在，或者说 $x(t)$具有频谱 $F_x(\omega)$

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{10}$$

一般说 $F_x(\omega)$是一 ω 的复函数，而

$$F_x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \overline{F_x(\omega)} \tag{11}$$

$F_x(\omega)$的反变换为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{12}$$

根据(12)、(10)式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\omega t}dt\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega)|^2d\omega$$

即
$$\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega)|^2d\omega \tag{13}$$

(13) 式为非周期函数时的帕塞伐等式。等式左边是$[x(t)]^2$在$(-\infty,\infty)$上的积分，它代表着$x(t)$在$(-\infty,\infty)$间的总能量，因此右边的被积函数$|F_x(\omega)|^2$相应地称为能谱密度。

由于$F_x(\omega)$是复数，$|F_x(\omega)|$代表其振幅，$\arg F_x(\omega)$代表其相位，因此采用频谱分析时既能说明它的振幅特性，又能说明它的相位特性。然而采用能谱分析时，仅利用了$|F_x(\omega)|^2$，因而丢失了相位信息。

由于非周期信号时其总能量是有限的，即$\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2dt<\infty$，在这种情况下它在无限长时间内的平均值为无限小，因此对于这类信号就不再求时间的平均，即不再求功率谱密度而直接研究能谱密度，不再采用时间相关函数而考虑

$$\Phi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x(t)dt \tag{14}$$

$$\Phi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega)e^{j\omega(t+\tau)}d\omega\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega)e^{j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\omega t}dt\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

即 $$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega \tag{15}$$

而 $$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x(t)e^{-j\omega\tau}dtd\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)e^{-j\omega(t+\tau)}x(t)e^{j\omega t}d\tau\, dt$$

设 $$t+\tau = u,\ t = t$$

则 $$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega u}x(t)e^{j\omega t}dudt$$

$$= |F_x(\omega)|^2 \tag{16}$$

从(15)、(16)两式可知$\Phi(\tau)$和$|F_x(\omega)|^2$是一对傅氏变换。$|F_x(\omega)|^2$代表能谱密度，而$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2dt$代表信号$x(t)$的能量。$\Phi(\tau)$是$\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x(t)dt$，它没有对时间取平均。时间相关函数是$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)x(t)dt\right\}_{T\to\infty}$，它是时间的平均值，由于总能量有限，$\Phi(\tau)$除以无限长时间是一无穷小值，因此在非周期信号时采用$\Phi(\tau)$和$|F_x(\omega)|^2$。

（一）、（二）两部分是对确定函数的分析，不过这里采用时间相关函数和功率谱密度、$\Phi(\tau)$和能谱密度$|F_x(\omega)|^2$。下面研究随机函数的分析。

（三）周期性平稳随机过程的谱分析

在第四章习题13中已指出，如果平稳随机过程的相关函数存在着周期性，即$R_\xi(T+\tau) = R_\xi(\tau)$，则$\xi(t+T)$与$\xi(t)$以概率1相等，即除了以概率为0的样本函数外，所有样本

函数是周期性的。

设$\xi(t)$是周期性平稳随机过程，且假定$E\{\xi(t)\}=0$，若$x(t)$是$\xi(t)$的一个样本函数，则它的周期为T。现把周期样本函数$x(t)$展开成傅氏级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{jn\omega_0 t}\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right) \tag{17}$$

其中
$$x_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{18}$$

不同的样本函数所得的傅氏系数是不同的，实际上x_n是一个随机变量。

(17) 式所示的各项具有双重正交性，即不但$e^{jn\omega_0 t}$和$e^{jm\omega_0 t}$在$n\neq m$时具有正交性，而且x_n和x_m在$n\neq m$时也是正交的，即$E\{x_n\bar{x}_m\}=0$；同时，因为$E\{\xi(t)\}=0$，则$E\{x_n\}=0$，$E\{x_m\}=0$，因此x_n和x_m在$n\neq m$时也是统计不相关的。

$$\begin{aligned}E\{x_n\bar{x}_m\}&=E\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\xi(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\int_0^T\overline{\xi(s)}e^{jm\omega_0 s}ds\right\}\\&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\xi(t-s)e^{-jn\omega_0 t}e^{jm\omega_0 s}dt\,ds\end{aligned} \tag{19}$$

据根$\xi(t)$是周期性平稳随机过程即相关函数$R_\xi(\tau)$是周期函数，$R_\xi(\tau)$可表示为

$$R_\xi(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\omega_0\tau}\quad\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right) \tag{20}$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_0^T R_\xi(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau \tag{21}$$

把(20)式代入(19)式得

$$E\{x_n\bar{x}_m\}=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\omega_0(t-s)}\cdot e^{-jn\omega_0 t}e^{jm\omega_0 s}dtds$$

$$=\frac{1}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\int_0^T\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}e^{-j(k-m)\omega_0 s}dtds$$

$$=\begin{cases}b_n & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases} \tag{22}$$

(22)式不仅指出了当 $n\neq m$ 时 x_n 和 x_m 是正交的、统计不相关的，而且指出了x_n的方差为b_n，即相关函数$R_\xi(\tau)$的第n个傅氏系数就是 x_n 的方差。

随机过程$\xi(t)$在一个周期内能量的统计平均值为

$$E\left\{\int_0^T|\xi(t)|^2dt\right\}=E\left\{\int_0^T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{jn\omega_0 t}\right)\cdot\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{x}_m e^{-jm\omega_0 t}\right)dt\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E\{x_n\bar{x}_m\}\int_0^T e^{j(n-m)\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tb_n=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}bn \tag{23}$$

即

$$E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T|\xi(t)|^2dt\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n \tag{24}$$

(24)式说明了周期性平稳随机过程$\xi(t)$的功率的统计平均值为$\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n$，其中 b_n 代表频率为 nf_0 的分量的功率。因此定

义$\xi(t)$的功率谱密度$S(f)$为

$$S(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\delta(f-nf_0)\quad\left(f_0=\frac{1}{T}\right)\tag{25}$$

其中
$$b_n=\frac{1}{T}\int_0^T R_\xi(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

$$b_n=E\{|x_n|^2\}$$

于是$R_\xi(\tau)$的傅氏变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{jn\omega_0\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-n\omega_0)\tau}d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\delta(f-nf_0)=S(f)$$

即
$$\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=S(f)\quad(\omega=2\pi f)\tag{26}$$

反之，
$$\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi f\tau}df=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\delta(f-nf_0)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{j2\pi nf_0\tau}=R_\xi(\tau)$$

即
$$\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi f\tau}df=R_\xi(\tau)\tag{27}$$

(26)、(27)两式说明了$R_\xi(\tau)$和$S(f)$是一对傅氏变换，即周期性平稳随机过程的相关函数的傅氏变换是它的功率谱密

度，而它的功率谱密度的反变换是相关函效。这一结果和（一）中分析的结果是一致的，不过（一）中所讨论的是确定性周期函数，采用的相关函数是时间相关函数，而本节所讨论的是周期性平稳随机过程，采用的相关函数是随机过程的统计相关函数。

（四）平稳随机过程的谱分析

设$\{\xi(t), t\in T\}$为平稳随机过程，$R_{\xi\xi}(\tau)$为其相关函数，其中τ可取离散值，也可取连续值。现分两种情况说明：①如T取0，±1，±2，…，则τ取离散值；②如T取实轴上任意值，则τ取连续值。在以下讨论中假定：

① 若τ取离散值，$R_{\xi\xi}(\tau)$满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|<\infty \tag{28}$$

② 若τ取连续值，$R_{\xi\xi}(\tau)$满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(\tau)|d\tau<\infty \tag{29}$$

（1）若τ取离散值，则当λ在$[-\pi、\pi]$上时

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda}$是绝对一致收敛的，并记

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda}\quad(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi) \tag{30}$$

$f_{\xi\xi}(\lambda)$在$[-\pi, \pi]$上是连续函数，而且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_{\xi\xi}(\lambda)|d\lambda\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|\int_{-\pi}^{\pi}|e^{-jk\lambda}|d\lambda<\infty$$

于是$\int_{-\pi}^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda$存在。根据(30)，$f_{\xi\xi}(\lambda)$的傅氏级数恰好是以

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda$$

$$(k=0,\ \pm1、\ \pm2,\cdots) \qquad (31)$$

为其傅氏系数。因此可得如下定义：

定义 设$\{\xi(k)。k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$为平稳随机序列，其相关函数满足公式(28)，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|<\infty$$

则称 $$f_{\xi\xi}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda} \quad (-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi)$$

为该序列的功率谱密度函数。

（2）若$\xi(t)$为连续型，$R_{\xi\xi}(\tau)$中的变量τ取连续值，并满足条件$\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(\tau)|d\tau<\infty$,则$\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$必存在，并记

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (-\infty<f<+\infty) \qquad (32)$$

(32)式定义了$R_{\xi\xi}(\tau)$的傅氏变换为$S(f)$。那么$S(f)$的反变换是否存在？研究这个问题可利用概率密度和特征函数的关系来说明。我们知道概率密度和特征函数间的关系是一对傅氏变换的关系，即

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}f(x)dx$$

而 $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)e^{-jtx}dt$$

而且概率密度应该满足

$$① \quad f(x) \geqslant 0$$

$$② \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

特征函数具有非负定性，且 $\Phi(0)=1$。

已知$R_{\xi\xi}(\tau)$是相关函数，它也具有非负定性，且$|R_{\xi\xi}(\tau)|\leqslant R_{\xi\xi}(0)$。对比 $\Phi(t)$ 和$\frac{R_{\xi\xi}(\tau)}{R_{\xi\xi}(0)}$可知两者具有相同的特性，因此如果 $R_{\xi\xi}(\tau)$的傅氏变换为$S(f)$，则$S(f)$ 必存在反变换，即

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad (33)$$

而且 $S(f)$是一个密度函数，它应该满足 $S(f)\geqslant 0$。设$\tau=0$，由(33)式得

$$R_{\xi\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df$$

该式左边是方差，如果该过程具有各态历经性，则 $R_{\xi\xi}(0)$代表该信号的功率，于是$S(f)$代表功率谱密度。因此对于平稳过程而言，它的相关函数和功率谱密度间成为一对傅氏变换关系(32式和33式)。这就是平稳随机过程相关函数的谱分解定理，称之为维纳-欣斤公式。

从上面(一)、(三)、(四)几类情况的分析得到了一种用广义谱分析研究各种类型信号的方法，它利用了组成一对傅氏变换的信号的相关函数和功率谱密度。

注　有人用 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\right\}$ 来定义平稳随机过程的功率谱密度 $S(f)$。

若对平稳过程$\xi(t)$的一个样本函数构造一个截尾函数

$$\xi_T(t)=\begin{cases}\xi(t) & (|t|\leqslant T)\\ 0 & (|t|>T)\end{cases}$$

它的傅氏变换为

$$F_\xi(\omega,\ T)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j\omega t}dt$$

利用帕塞伐等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\xi_T(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_\xi(\omega,T)|^2d\omega$$

即
$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}[\xi_T(t)]^2dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\xi(t)]^2dt$$

$$=\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|F_\xi(\omega,T)|^2d\omega$$

令 $T\to\infty$，得到$\xi(t)$在$(-\infty,\ \infty)$上的平均功率表示式

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\xi(t)]^2dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F_\xi(\omega,T)|^2d\omega$$

由于上式是从一个样本函数得到的，而$\xi(t)$是一个平稳随机过程，因此上式两边实际上均是一个随机变量。对上式取均值，则得到平稳随机过程的平均功率

$$\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\xi(t)]^2dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}E\{|F_\xi(\omega,T)|^2\}\right]d\omega$$

因此 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_\xi(\omega,T)|^2\}$是功率密度，即

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\right\} \tag{34}$$

对(34)式进行化简，因

$$\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2T}E\left\{\int_{-T}^{T}\xi(u)e^{-j\omega u}du\int_{-T}^{T}\overline{\xi(v)}e^{j\omega v}dv\right\}$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_{\xi}(u-v)e^{-j\omega(u-v)}dudv$$

设 $u-v=\tau$，$u+v=s$，于是

$$\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\right\}$$

$$=\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_{\xi}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

于是

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_{\xi}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{35}$$

在(35)式的推导过程中，要求$\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi}(\tau)|d\tau<\infty$，才能得到最后一步。

§2 平稳随机过程功率谱密度S(f)的性质及几种常见的功率谱密度

（一）S(f)是实值，且 S(f)≥0。 (36)

（二）根据(33)式，令 $\tau=0$，则 $R_{\xi\xi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s(f)df$，它说明功率谱密度曲线下的总面积（即全部功率）等于平稳随机过程的均方值。

根据(32)式，令 $f=0$，则

$$S(0)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)d\tau$$

它说明功率谱密度的零频率分量等于自相关函数曲线下的总面积。

（三）根据(32)式

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau-j\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\sin 2\pi f\tau d\tau$$

如果 $\xi(t)$为实平稳随机过程，$R_{\xi\xi}(\tau)$是偶函数即

$$R_{\xi\xi}(-\tau)=R_{\xi\xi}(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\sin 2\pi f\tau d\tau=0$$

则

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau$$

$$=2\int_{0}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau \tag{37}$$

从(37)式可知 $S(-f)=S(f)$

即实平稳随机过程的功率谱密度函数为偶函数。

根据(33)式，对于实平稳随机过程

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)[\cos 2\pi f\tau+j\sin 2\pi f\tau]df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\cos 2\pi f\tau\, df$$

$$=2\int_{0}^{\infty}S(f)\cos 2\pi f\tau\, df \tag{38}$$

(37)、(38)两式组成一对变换。

（四）实平稳随机序列$\{\xi(n),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}$的相关函数 $R_{\xi\xi}(k)=R_{\xi\xi}(-k)$，$k=0,1,2,\cdots$，且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|<\infty$$

于是有

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=R_{\xi\xi}(0)+2\sum_{k=1}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)\cos k\lambda \tag{39}$$

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)\cos k\lambda\, d\lambda \tag{40}$$

$$(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi)$$

且

$$f_{\xi\xi}(-\lambda)=f_{\xi\xi}(\lambda)$$

(32)、(33)式，(37)、(38)式，(30)、(31)式，(39)、(40)式统称为维纳-欣斤公式。

例一 随机电报信号的相关函数为

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}\ (\lambda\text{为常数},\ -\infty<\tau<\infty)$$

（此乃去掉了直流分量的随机电报信号），求其功率谱密度。

解 $\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(\tau)|d\tau=2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}d\lambda=\frac{1}{4\lambda}<\infty$

因此该过程的功率谱密度存在。

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4}e^{2\lambda\tau}e^{-j2\pi f\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{\lambda}{4(\lambda^2+\pi^2f^2)}$$

对于没有去掉直流分量的随机电报信号，其相关函数为

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}\right)$$

此时§1(29)式不再满足。如果采用δ-函数，则维纳-欣斤公式仍可应用。

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\delta(f)+\frac{\lambda}{4(\lambda^2+\pi^2f^2)}$$

式中第一项代表随机信号的直流分量。

例二 随机相位正弦波过程的相关函数为

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

求功率谱密度。

解 此时$\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(\tau)|d\tau$为非穷值，不能取$\cos\omega_0\tau$的傅氏变换。如果引入$\delta$-函数，仍可利用维纳-欣斤公式。

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp[j(\omega_0-2\pi f)\tau]d\tau\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-j(\omega_0+2\pi f)\tau]d\tau\Big\}$$

$$=\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \quad (\omega_0=2\pi f_0)$$

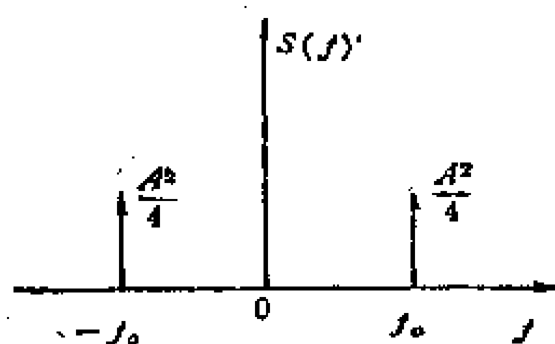


图 5-1

这表示它的功率集中在$\pm f_0$处，功率谱密度为$\pm f_0$处的两个δ-函数。

例三 设有平稳随机过程$\xi(t)$，其功率谱密度$S(f)$为

$$S(f)=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9}$$

求该过程的相关函数和均方值

解 若相关函数$R(\tau)$具有$\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$的形式，则功率谱密度为$\frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$。已知本题中

$$S(f)=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9}$$

$$=\frac{(2\pi f)^2+4}{[(2\pi f)^2+9][(2\pi f)^2+1]}$$

$$=\frac{5/8}{(2\pi f)^2+9}+\frac{3/8}{(2\pi f)^2+1}$$

$$=\frac{2\times3\times\frac{5}{48}}{(2\pi f)^2+9}+\frac{2\times1\times\frac{3}{16}}{(2\pi f)^2+1}$$

故 $$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{5}{48}e^{-3|\tau|}+\frac{3}{16}e^{-|\tau|}$$

$$E\{|\xi(t)|^2\}=R_{\xi\xi}(0)=\frac{5}{48}+\frac{3}{16}=\frac{7}{24}$$

例四 均值为零、功率谱密度为非零常数的平稳随机过程称为白噪声。求白噪声的相关函数。

解 本题中 $S(f)=S_0\ (-\infty<f<\infty)$

于是 $$R_{\xi\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0e^{j2\pi f\tau}df=S_0\delta(\tau)$$

由此可知，白噪声可定义为均值为零、相关函数为δ-函数的平稳随机过程。在$t_1\neq t_2$时$\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$是不相关的。

白噪声是一种理想化的数学模型，它的平均功率是无限的。实用上，如果某种随机信号在它所通过的实际系统的通频带范围内具有比较“平坦”的功率谱密度，就可把它近似地当作白噪声来处理。白噪声模型在数学处理上具有简单方便的优点。

例五 求温度限制二极管内散弹噪声电流的功率谱密度。

解 在第三章§6中已给出了温度限制二极管内散弹噪声电流的相关函数

$$E\{I_s(t+\tau)I_s(t)\}=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}i_s(t+\tau)i_s(t)dt+(q_e\lambda)^2$$

它的功率谱密度$S_{I_s}(f)$为

$$S_{I_s}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f\tau}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}i_s(t+\tau)i_s(t)dtd\tau$$

$$+(q_e\lambda)^2\delta(f)$$

而 $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f\tau}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}i_s(t+\tau)i_s(t)dtd\tau$$

$$=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}i_e(t+\tau)e^{j2\pi f(t+\tau)}i_e(t)e^{-j2\pi ft}d\tau dt$$

$$=\lambda\left|\int_{-\infty}^{\infty}i_e(t)e^{-j2\pi ft}dt\right|^2=\lambda|G(f)|^2$$

其中 $$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty}i_e(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

而 $$S_{I_e}(f)=\lambda|G(f)|^2+(q_e\lambda)^2\delta(f)$$

上式中第二项代表直流分量，第一项代表散弹效应引起的起伏噪声的功率谱密度。

由于电子的渡越时间很短，因此 $i_e(t)$的频带很宽，我们用散弹噪声低频部分的功率谱密度作为它的功率谱密度的近似。在低频部分的 $G(f)$可以近似为常数

$$G(f)\approx G(0)=\int_0^{\tau_a}\frac{2q_e}{\tau_a^2}t\,dt=q_e$$

故在低频部分的功率谱密度为 $\lambda q_e^2=q_e\overline{I}$，这就是肖特基公式。

实际上，对于温度限制的平板型二极管

$$G(f)=\int_0^{\tau_a}\frac{2q_e}{\tau_a^2}te^{-j2\pi ft}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{(2\pi f)^2}(1-e^{-j2\pi f\tau_a})\right.$$

$$\left.-\frac{\tau_a}{j2\pi f}e^{-j2\pi f\tau_a}\right]\frac{2q_e}{\tau_a^2}$$

$$S_{I_e}(f)=\lambda\frac{4q_e^2}{(2\pi f\tau_a)^4}[(2\pi f\tau_a)^2+2(1-\cos 2\pi f\tau_a$$

$$-2\pi f\tau_a\sin 2\pi f\tau_a)]+(q_e\lambda)^2\delta(f)$$

$$=\frac{4q_e\overline{I}}{(2\pi f\tau_a)^4}[(2\pi f\tau_a)^2+2(1-\cos 2\pi f\tau_a$$

$$-2\pi f\tau_a \sin 2\pi f\tau_a)] + (q_e\lambda)^2\delta(f)$$

下面列出了几种常见的平稳随机过程的相关函数及其相应的功率谱密度：

1.

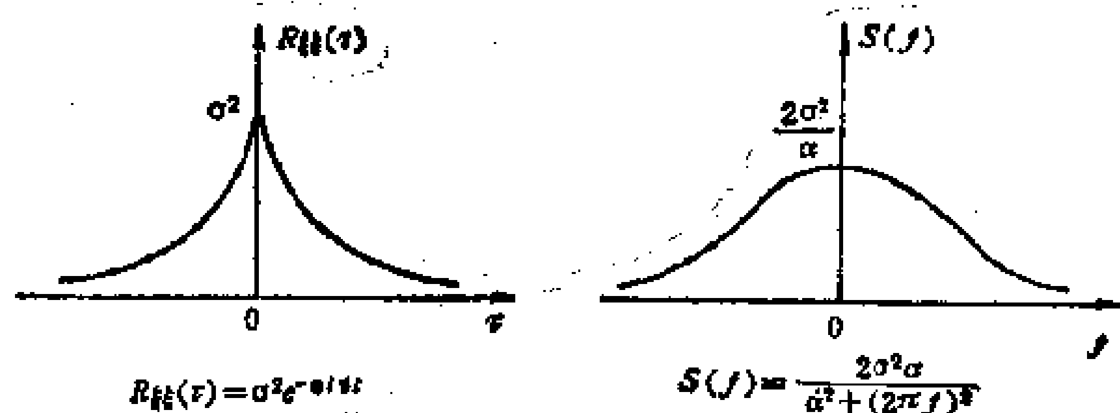


图 5-2

2.

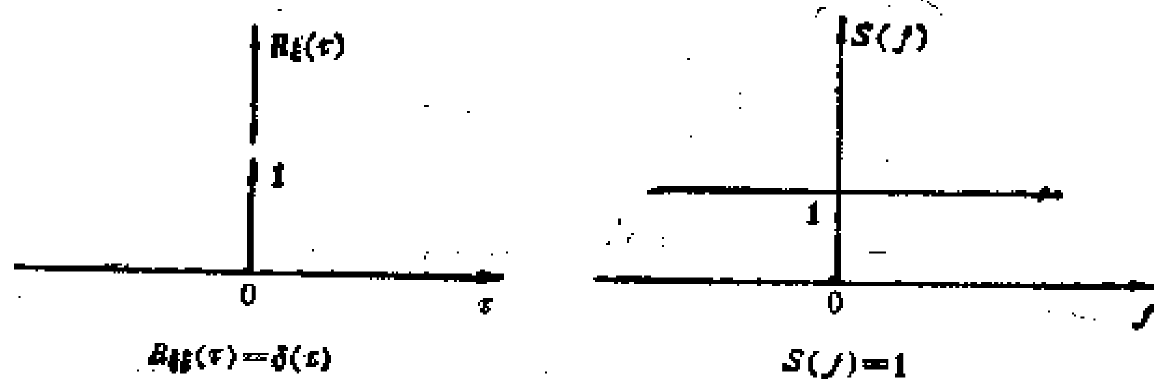
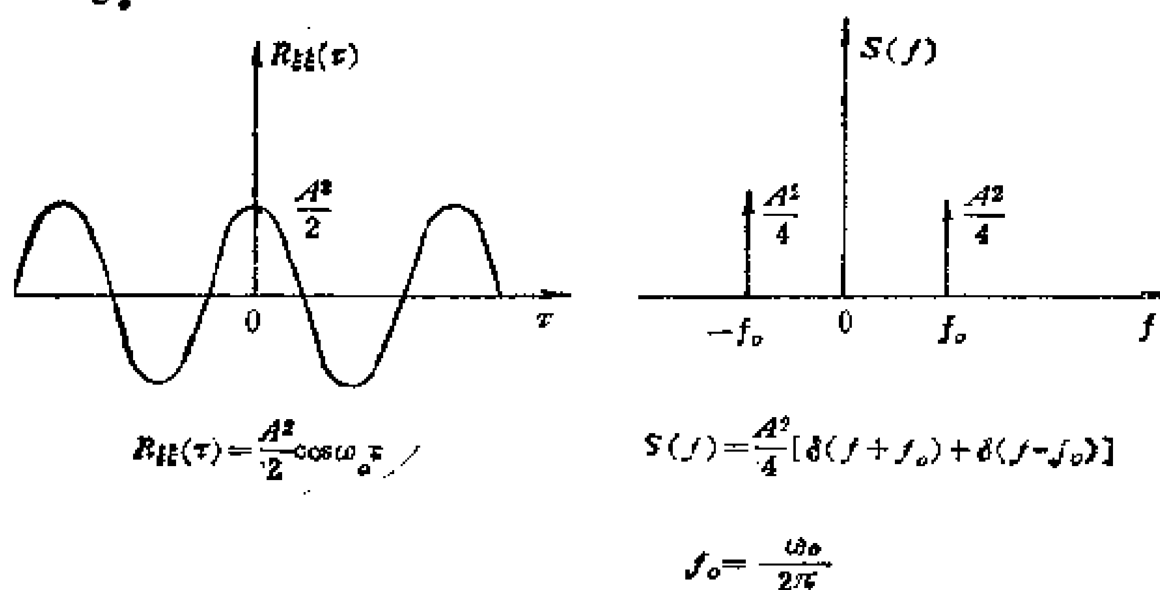


图 5-3

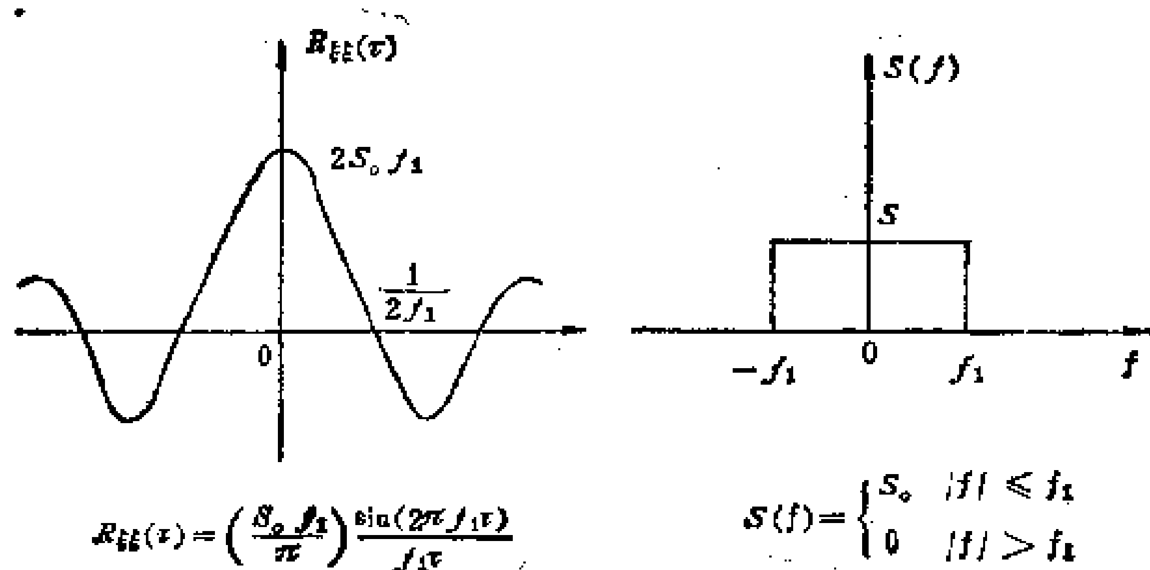
3.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
$\frac{A^2}{2}$
0
τ
$S(f)$
$\frac{A^2}{4}$
$\frac{A^2}{4}$
$-f_o$
0
f_o
f
$R_{\xi\xi}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_o\tau$
$S(f)=\frac{A^2}{4}[\delta(f+f_o)+\delta(f-f_o)]$
$f_o=\frac{\omega_o}{2\pi}$

图 5-4

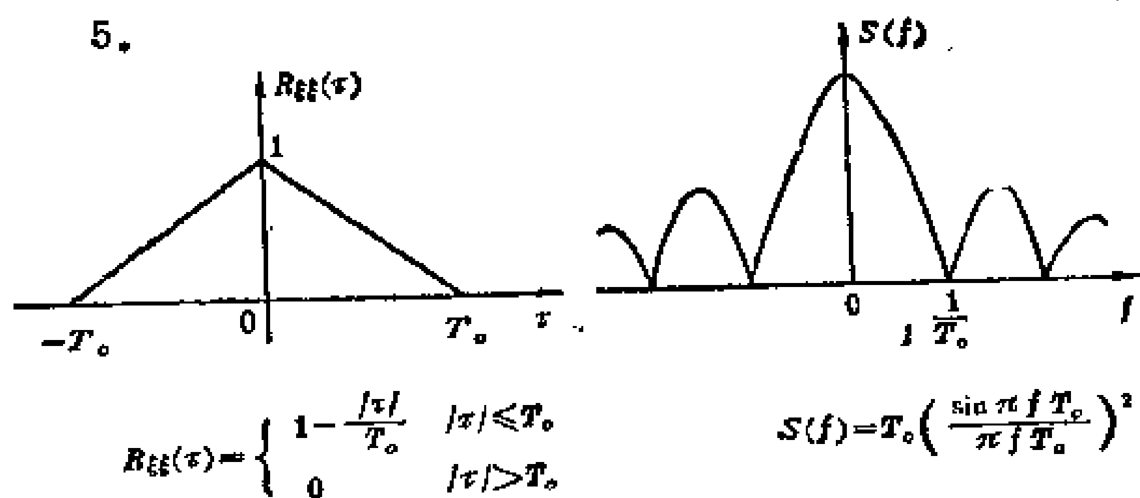
4.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
$2S_o f_1$
$\frac{1}{2f_1}$
0
$S(f)$
S
$-f_1$
0
f_1
f
$R_{\xi\xi}(\tau)=\left(\frac{S_o f_1}{\pi}\right)\frac{\sin(2\pi f_1\tau)}{f_1\tau}$
$S(f)=\begin{cases} S_o & |f|\leqslant f_1 \\ 0 & |f|>f_1 \end{cases}$

图 5-5

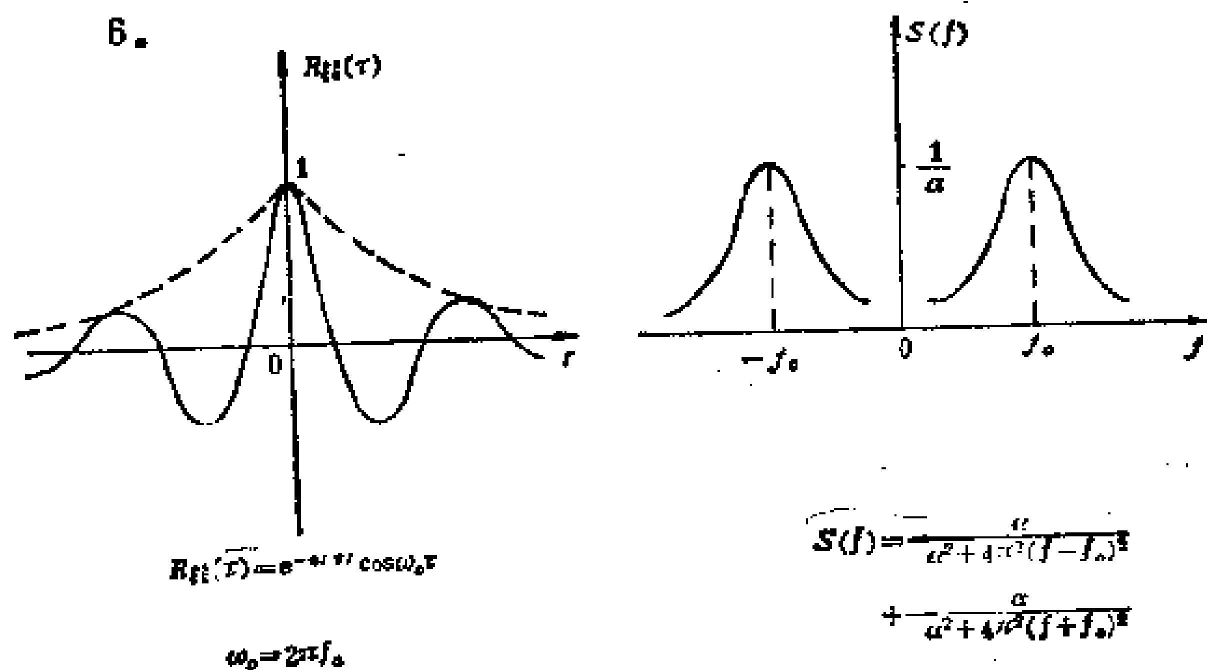
5.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
1
$-T_0$
0
T_0
τ
$S(f)$
0
$\frac{1}{T_0}$
f
$R_{\xi\xi}(\tau)=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T_0} & |\tau|\leqslant T_0\\ 0 & |\tau|>T_0\end{cases}$
$S(f)=T_0\left(\frac{\sin \pi f T_0}{\pi f T_0}\right)^2$

图 5-6

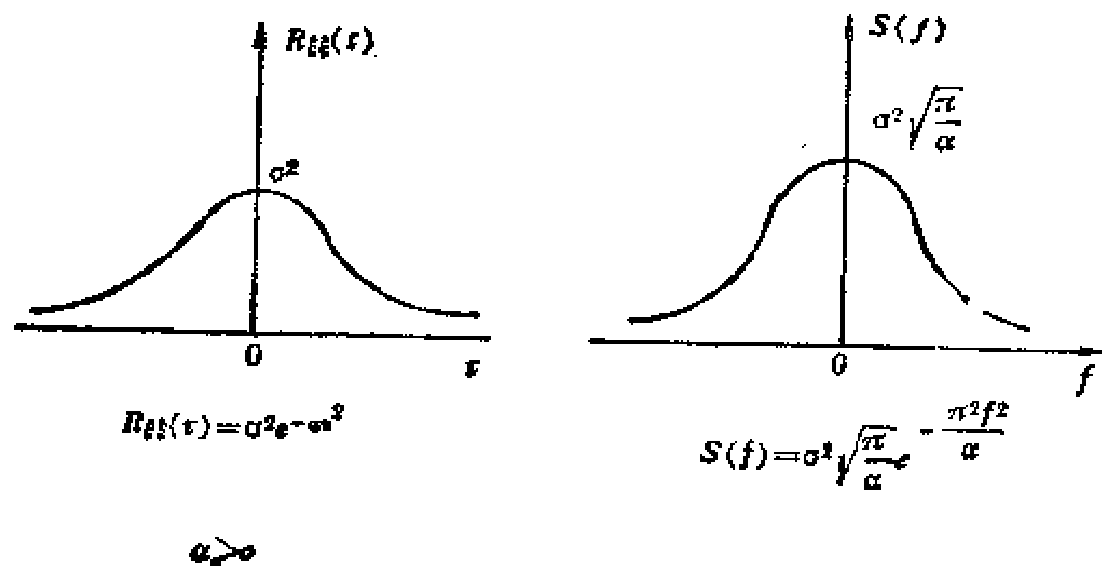
6.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
1
0
τ
$R_{\xi\xi}(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$
$\omega_0=2\pi f_0$
$S(f)$
$\frac{1}{a}$
$-f_0$
0
f_0
f
$S(f)=\frac{a}{a^2+4\pi^2(f-f_0)^2}+\frac{a}{a^2+4\pi^2(f+f_0)^2}$

图 5-7

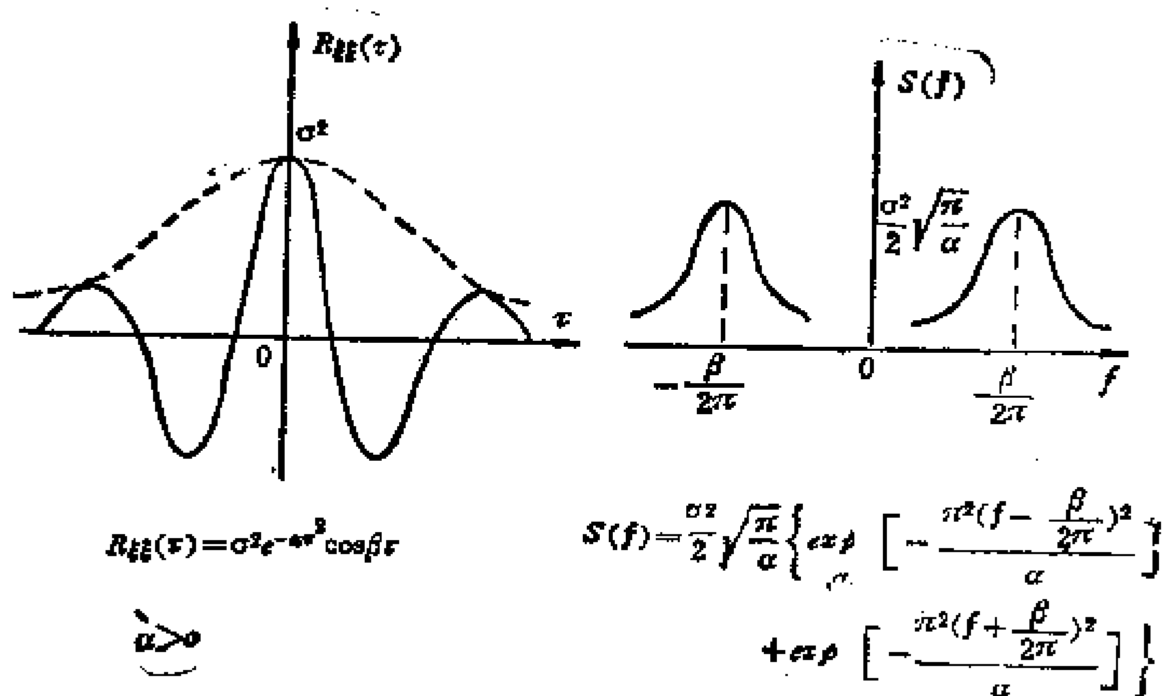
7.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
σ^2
0
τ
$S(f)$
$\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
0
f
$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$
$S(f)=\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$
$\alpha>0$

图 5-8

8.



$R_{\xi\xi}(\tau)$
σ^2
0
τ
$S(f)$
$\frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
$-\frac{\beta}{2\pi}$
0
$\frac{\beta}{2\pi}$
f
$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau$
$\alpha>0$
$S(f)=\frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{exp\left[-\frac{\pi^2(f-\frac{\beta}{2\pi})^2}{\alpha}\right]+exp\left[-\frac{\pi^2(f+\frac{\beta}{2\pi})^2}{\alpha}\right]\right\}$

图 5-9

9.

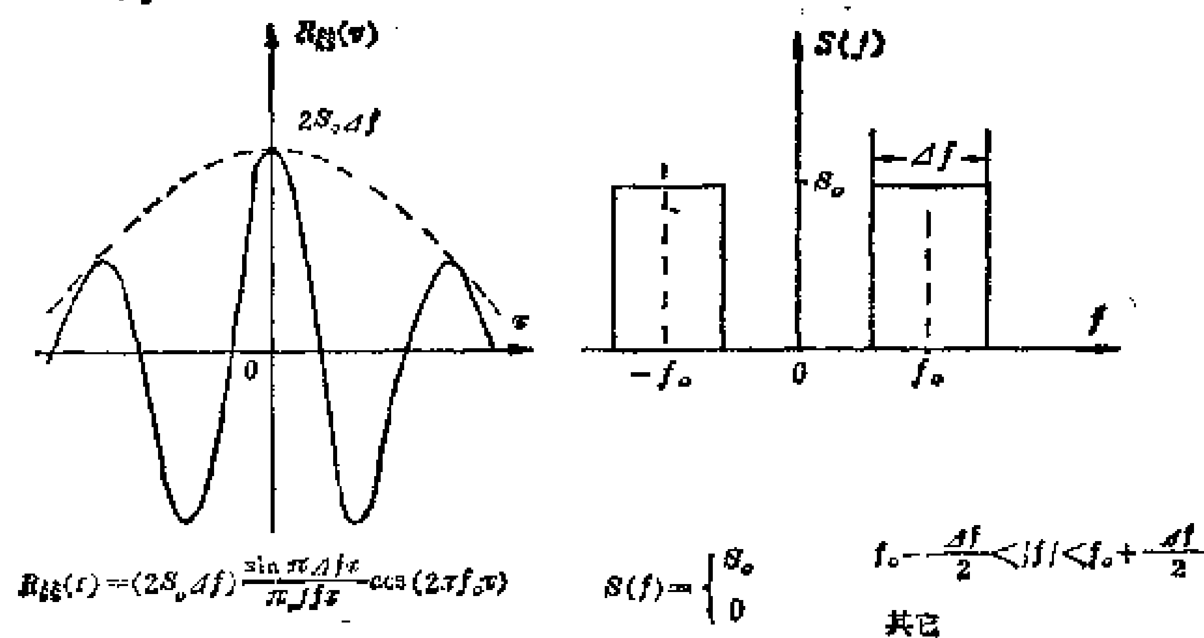


图 5-10

§3 线性系统

任意系统的输入和输出间的关系可以表示为

$$y(t)=L\{x(t)\}$$

x(t)代表输入，y(t)代表输出，L是一个算子。

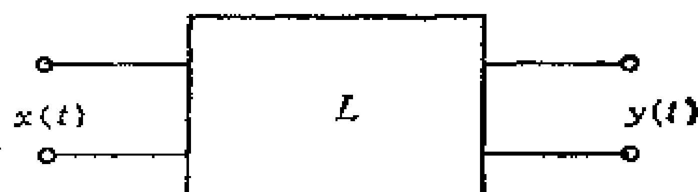


图 5-11

定义一 如果算子L是线性的，则称该系统为线性系统。

满足下列条件的算子称为线性算子：

1. $$L\{\alpha x(t)\}=\alpha L\{x(t)\} \quad (41)$$

其中 α 是任意常数，$x(t)$为任意函数。

2. $$L\{x_1(t)+x_2(t)\}=L\{x_1(t)\}+L\{x_2(t)\} \quad (42)$$

$x_1(t)$和 $x_2(t)$均为任意函数。

(41)、(42)两式可以合并成

$$L\{\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)\}=\alpha_1 L\{x_1(t)\}+\alpha_2 L\{x_2(t)\} \quad (43)$$

α_1、α_2 是任意常数。

例一 $$y(x)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}x(t)$$

本例中 $\frac{d}{\alpha t}=L$ 是一算子，它满足线性条件。

例二 $y(t)=[x(t)]^2=L\{x(t)\}$

因为 $L[\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)]=[\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)]^2$

$=\alpha_1^2[x_1(t)]^2+2\alpha_1\alpha_2 x_1(t)x_2(t)+\alpha_2^2[x_2(t)]^2$

$\neq\alpha_1 L\{x_1(t)\}+\alpha_2 L\{x_2(t)\}=\alpha_1[x_1(t)]^2$

$+\alpha_2[x_2(t)]^2$

故 $L=[\quad]^2$不是线性系统。

例三 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(u)du$，并假定 $y(-\infty)=0$，它相当于一电感电路，$x(t)$ 是其输入电压，$y(t)$ 是在电感量为 1 的线圈内的电流（见图 5-12）。$L=\int_{-\infty}^{t}(\quad)dt$称为积分算子，它是一线性算子。



图 5-12

定义二 如果输出 y在 t 时的值只决定于在 t 时的输入 $x(t)$的值，则称该系统为瞬时系统。

定义三 不是瞬时的系统称为动态系统。

例三是动态系统，而例二的平方器是瞬时系统。

定义四 一个系统在 t 时的输出完全决定于在[t－T, t]闭区间的输入值，其中 T≥0，则称该系统为记忆时间为T的记忆系统。

因此 T＝0 时它就是瞬时系统，T≠0 时记忆系统是一动态系统。例三所给出的积分电路是记忆时间为无限长的记忆系统。

定义五 在 t 时的输出 y(t)值仅与过去的（包括现在的）输入值有关，而和将来的输入值无关的系统称为可实现的系统，或称为具有因果性的系统。

定义六 一个动态系统如果它的输入、输出是连续时间函数，而且可以用一组常微分方程来描述，则称该系统为集总参数、连续时间的动态系统。如果输入、输出是离散时间函数，而且可以用一组差分方程来描述该系统，则称该系统为集总参数、离散时间的动态系统。

任何线性、集总参数的动态系统均可以用卷积函数来描述它的输出输入关系，即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau \quad (44)$$

其中 $h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$代表在 τ 时输入端加以冲激信号而在 t 时输出端的响应。

对于具有因果性的动态系统

$$h(t,\tau)=0 \quad (\tau>t) \quad (45)$$

否则输出 y(t)将和未来的输入值有关。因此对于具有因果性的动态系统，(44)式可以写成

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)x(\tau)d\tau \quad (46)$$

定义七 一个系统如果它的输入信号在时间轴上有一个平移，输出信号也有同样的时间平移，则称该系统为时不变系统，即如果

$$
\begin{aligned}
y(t) &= L\{x(t)\} \\
y(t-\tau) &= L\{x(t-\tau)\}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

则称该系统为时不变系统。

对于时不变的线性动态系统有

$$
L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau) \tag{48}
$$

也就是说，时不变、线性动态系统的冲激响应仅与时间差$(t-\tau)$有关，即它的冲激响应为时间差$(t-\tau)$的函数。

因此，对于线性、时不变、具有因果性的动态系统，有

$$
\begin{aligned}
y(t) = L\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{49}
$$

即输出为输入函数和系统冲激响应的卷积。

线性系统的输入为确定性函数的这类问题在信号与系统的书中已有详细的讨论，现在的任务是要研究线性系统的输入为随机函数时的输出问题。现举例说明。

例 在积分电路(RC 电路)的输入端送入一平稳随机过程$\xi(t)$，且$E\{\xi(t)\}=0$，$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\sigma^2 e^{-\beta|t_2-t_1|}$，若电路的初始条件为零初始条件，即$\eta(0^-)=0$，试研究电路输出过程$\eta(t)$的统计特性(见图5-13)。

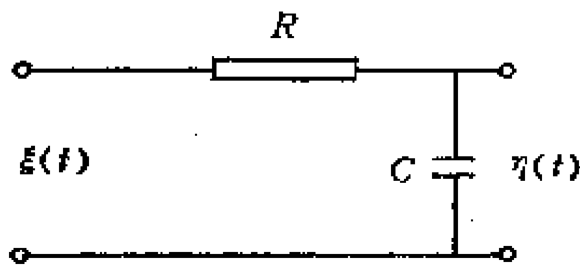


图 5-13

解 (1) 先用解微

分方程的办法研究$\eta(t)$的统计特性。因

$$C\frac{d\eta(t)}{dt}=\frac{1}{R}[\xi(t)-\eta(t)]$$

即
$$\frac{d\eta(t)}{dt}+\frac{1}{CR}\eta(t)=\frac{1}{CR}\xi(t)$$

设
$$\alpha=\frac{1}{CR} \tag{50}$$

则
$$\frac{d\eta(t)}{dt}+\alpha\eta(t)=\alpha\xi(t) \tag{51}$$

① (51)式两边取均值，设$E\{\eta(t)\}=\mu_\eta(t)$，得

$$\frac{d\mu_\eta(t)}{dt}+\alpha\mu_\eta(t)=\alpha E\{\xi(t)\}=0 \tag{52}$$

由于$\mu_\eta(t)$是$\eta(t)$的均值，它是一确定性函数，通过解方程式(52)得

$$\mu_\eta(t)=Ae^{-\alpha t}$$

考虑积分电路的初始条件，因$\eta(0^-)=0$，则

$$E\{\eta(0^-)\}=0=\mu_\eta(0^-)$$

所以
$$A=0$$

故
$$\mu_\eta(t)=0 \tag{53}$$

即输出随机过程的均值为0，

② 研究t_1、t_2两时刻ξ、η的互相关函数。

由(51)式
$$\frac{d\eta(t_2)}{dt_2}+\alpha\eta(t_2)=\alpha\xi(t_2) \tag{54}$$

将上式两边乘以$\xi(t_1)$，然后取平均值得

$$\frac{dR_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{dt_2}+\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\alpha R_{\xi\xi}(t_1,t_2) \tag{55}$$

如果$t_1\geqslant t_2$，t_1作为参量，则

$$\frac{dR_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{dt_2}+\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

$$=\alpha\sigma^2 e^{-\beta(t_1-t_2)}=\alpha\sigma^2 e^{-\beta t_1}e^{\beta t_2} \tag{56}$$

因$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$是一确定性函数，故可用解微分方程的办法解之，得

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2 e-\beta t_1}{\alpha+\beta}e^{\beta t_2}+De^{-\alpha t_2}$$

D为待定常数。

根据起始条件 $y(0^-)=0$，则 $R_{\xi\eta}(t_1,\ 0)=0$，于是

$$R_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=\frac{\alpha\sigma^2 e^{-\beta t_1}}{\alpha+\beta}(e^{\beta t_2}-e^{-\alpha t_2}) \tag{57}$$

$$R_{\xi\eta}(t_1,\ t_1)=\frac{\alpha\sigma^2 e^{-\beta t_1}}{\alpha+\beta}(e^{\beta t_1}-e^{-\alpha t_1}) \tag{58}$$

(58)式将作为解下一微分方程式的起始条件。

在上面解(56)式时利用了$t_1\geqslant t_2$的条件，即相当于图5-14中的情况(Ⅰ)。下面研究情况(Ⅱ)，$t_1\leqslant t_2$，这时(55)式成为



图 5-14

$$\frac{dR_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{dt_2}+\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

$$=\alpha\sigma^2 e^{-\beta(t_2-t_1)}$$

$$=\alpha\sigma^2 e^{\beta t_1} e^{-\beta t_2}$$

t_1 为参量。解上述微分方程得

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2 e^{\beta t_1}}{\alpha-\beta}e^{-\beta t_2}+D' e^{-\alpha t_2}$$

当 $t_2=t_1$ 时上式变为

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_1)=\frac{\alpha\sigma^2 e^{-\beta t_1}}{\alpha-\beta}e^{-\beta t_1}+D' e^{-\alpha t_1}$$

把(58)式的结果代入上式并解之得

$$D'=\alpha\sigma^2 e^{\alpha t_1}\left(-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t_1}\right)$$

故当 $t_2>t_1$，时

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha-\beta}e^{-\beta(t_2-t_1)}-\frac{2\alpha\beta\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}e^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

$$-\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha+\beta}e^{-\alpha t_2-\beta t_1} \tag{59}$$

③ 研究 t_1、t_2 两时刻 η 的相关函数。

$$\frac{d\eta(t_1)}{dt_1}+\alpha\eta(t_1)=\alpha\xi(t_1)$$

以 t_2 作参量，上式乘以 $\eta(t_2)$并取均值得

$$\frac{dR_{\eta\eta}(t_1,t_2)}{dt_1}+\alpha R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\alpha R_{\xi\eta}(t_1,t_2) \tag{60}$$

(60)式中的 $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$已从(59)式中得到，于是当 $t_2>t_1$时

$$\frac{dR_{\eta\eta}(t_1,t_2)}{dt_1}+\alpha R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha^2\sigma^2}{\alpha-\beta}e^{-\beta(t_2-t_1)}$$

$$-\frac{2\alpha^2\beta\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}e^{-\alpha(t_2-t_1)}-\frac{\alpha^2\sigma^2}{\alpha+\beta}e^{-\alpha t_2-\beta t_1} \tag{61}$$

解(61)式并利用$y(\bar{0})=0$，$R_{\eta\eta}(0,t_2)=0$，得

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\Big[\alpha e^{-\beta(t_2-t_1)}-\beta e^{-\alpha(t_2-t_1)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_2+\beta t_1)}+\beta e^{-(\alpha t_1+\alpha t_2)}+\alpha e^{-(\alpha t_1+\alpha t_2)}\Big]\quad (t_2>t_1) \tag{62}$$

同理可求得当 $t_1>t_2$ 时

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\Big[\alpha e^{-\beta(t_1-t_2)}-\beta e^{-\alpha(t_1-t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_2+\beta t_1)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big] \tag{63}$$

把(62)、(63)两式合并起来得

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\Big[\alpha e^{-\beta|t_1-t_2|}-\beta e^{-\alpha|t_1-t_2|}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_2+\beta t_1)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big] \tag{64}$$

上式结果表明 $R_{\eta\eta}(t_1,t_2)$是 t_1、t_2 的函数，故 $\eta(t)$ 是非平稳的。这是因为在 $t=0$ 时接入$\xi(t)$，故有一个瞬态过程，在瞬态情况下，输出是非平稳的。

当 $t_1\to\infty$，$t_2\to\infty$，而$(t_1-t_2)=\tau$，则上式变为

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\Big[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\Big] \tag{65}$$

这时$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)$仅是$t_1-t_2=\tau$的函数，故输出为平稳过程。因此，经过了瞬态电路到达稳态，此时输出也是平稳随机过程。

可以看到，即使是极为简单的一阶微分方程式，如果输入为随机信号，采用经典方法来解也是十分复杂的。因此，

今后利用冲激响应的卷积来处理。

（2）积分电路的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{66}$$

利用(49)式，如果输入为 $x(t)$，$t\geqslant 0$，初始条件为零起始条件，那么输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(u)x(t-u)du \tag{67}$$

现在系统的输入为随机信号 $\xi(t)$，于是它的随机输出应为

$$\eta(t)=\int_{0}^{t}h(t-u)\xi(u)du=\int_{0}^{t}h(u)\xi(t-u)du \tag{68}$$

(68)式将为今后处理问题的出发点。

如对(68)式取均值，则

$$E\{\eta(t)\}=\mu_{\eta}(t)=E\left[\int_{0}^{t}h(t-u)\xi(u)du\right]$$

$$=\int_{0}^{t}h(t-u)E\{\xi(u)\}du$$

$$=\int_{0}^{t}h(t-u)\mu_{\xi}(u)du \tag{69}$$

在本例中 $\qquad \mu_{\xi}(u)=E\{\xi(u)\}=0$

故 $\qquad \mu_{\eta}(t)=E\{\eta(t)\}=0$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$=E\left\{\int_{0}^{t_1}h(t_1-u)\xi(u)du\right.$$

$$\left.\cdot\int_{0}^{t_2}h(t_2-v)\xi(v)dv\right\}$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-u)h(t_2-v)E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-u)h(t_2-v)R_{\xi\xi}(u,v)dudv \tag{70}$$

由于输入为平稳随机过程，则

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-u)h(t_2-v)R_{\xi\xi}(u-v)dudv \tag{71}$$

现把 $R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ 代入(71)。设 $t_2>t_1$，故 $t_2\geqslant v>0$，$t_1\geqslant u>0$，见图 5-15。

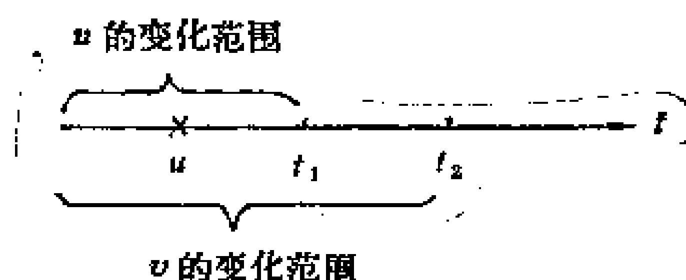


图 5-15

如果(71)式中先对 v 积分，则可把积分分为两个区域[0, u)和[u, t_2]进行：

$$R_{nn}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_0^{u}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2 e^{-\beta(u-v)}dvdu$$

$$+\int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_u^{t_2}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2 e^{-\beta(v-u)}dvdu$$

因在 [0, u) 内 v<u，在[u, t_2]内 v>u，故

$$R_{nn}(t_1,t_2) = \alpha^2\sigma^2\int_0^{t_1}\frac{1}{\beta+\alpha}e^{-\alpha t_1}e^{\alpha u}e^{-\alpha t_2}e^{-\beta u}$$

$$\cdot(e^{\beta u}e^{\alpha u}-1)du$$

$$+\alpha^2\sigma^2\frac{1}{\alpha-\beta}\int_0^{t_1} e^{-\alpha t_1}e^{\alpha u}e^{-\alpha t_2}e^{\beta u}\left(e^{(\alpha-\beta)t_2}-e^{(\alpha-\beta)u}\right)du$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_2-t_1)}-\beta e^{-\alpha(t_2-t_1)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}$$

同理可求得当 $t_1>t_2$ 时

$$R_{nn}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_1-t_2)}-\beta e^{-\alpha(t_1-t_2)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{(\alpha t_1+\beta t_2)}\}$$

把上两式合并得

$$R_{nn}(t_1,\ t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\alpha e^{-\beta|t_1-t_2|}-\beta e^{-\alpha|t_1-t_2|}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\right\}$$

当 $t_1\to\infty$，$t_2\to\infty$，而 $t_1-t_2=\tau$ 时

$$R_{nn}(t_1,\ t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\}$$

由此可见，采用冲激响应的卷积求输出相关函数的方法比解微分方程的方法容易一些。

由于输出相关函数是$\tau=t_1-t_2$的函数，故在稳态情况下输出是平稳的随机过程。

从上例解(2)中可以看到解一般线性、时不变、动态系统的方法。

如果动态系统的冲激响应为 $h(t)$，$(t>0)$，输入为随机过程，则系统的输出为

$$\eta(t)=\int_0^t h(t-u)\xi(u)du \tag{72}$$

对上式取均值得

$$\mu_\eta(t)=\int_0^t h(t-u)\mu_\xi(u)du \tag{73}$$

(73)式说明输出过程的均值为输入随机过程的均值函数和系统的冲激响应的卷积。

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}$$

$$=\int_0^{t_1} h(t_1-u)\int_0^{t_2}\overline{h(t_2-v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(u,v)dudv \tag{74}$$

因此求输出过程相关函数的方法为，用输入随机过程的相关函数连续两次对冲激响应进行卷积，每次卷积分别对一个参数进行，第二次卷积时，冲激响应应取共轭。

如果只研究系统进入稳态以后的情况，只要把输入信号在 $t=-\infty$时接入动态系统。那么在 $t>0$ 时系统已趋于稳态，此时

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^t h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\xi(t-u)du \tag{75}$$

下面的分析认为输入是复平稳随机过程，于是

$$\mu_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=\mu_\xi=\text{常数}$$

$$\mu_\eta(t)=E\{\eta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)E\{\xi(t-u)\}du$$

$$=\mu_\xi\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du$$

$$=\text{常数} \tag{76}$$

即输出过程的均值为常数。

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

由于$\xi(t)$是复平稳随机过程，$R_{\xi\xi}(u,v)=R_{\xi\xi}(u-v)$，

故 $$R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\overline{h(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(t_1-t_2-u+v)dudv$$

设$\tau=t_1-t_2$，则

$$R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\overline{h(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv \tag{77}$$

从(77)式可知$R_{\eta\eta}(t_1,\ t_2)=R_{\eta\eta}(\tau)$，它仅是时间差$\tau$的函数。同时因$\mu_\eta(t)=$常数，故输出过程是一复平稳随机过程。

求输出相关函数可以分两步进行：

（1）求$\eta(t_1)$和$\overline{\xi(t_2)}$的乘积平均值，即求$\eta(t)$和$\xi(t)$间的互关函数。

$$E\{\eta(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=R_{\eta\xi}(t_1,t_2)$$

$$=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)\xi(u)\overline{\xi(t_2)}du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u,t_2)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u-t_2)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_{\xi\xi}(\tau - u) du \tag{78}$$

(78)式表明 $R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$是时间差 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数，这说明 $\eta(t)$和$\xi(t)$间是联合平稳的，即经过动态系统后的输出与输入间是联合平稳的。

（2）求 $\eta(t)$的相关函数

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}$$

$$= E\left\{\eta(t_1)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - v)\xi(v) dv}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t_2 - v)} R_{\eta\xi}(t_1, v) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t_2 - v)} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - u) R_{\xi\xi}(u, v) du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(v)} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_{\xi\xi}(t_1 - u - t_2 + v) \cdot du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(v)} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_{\xi\xi}(\tau - u + v) du dv \tag{79-a}$$

设 $v = -v'$，则

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(-v')} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot R_{\xi\xi}(\tau - u - v') du dv'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(-v')} R_{\eta\xi}(\tau - v') dv' \tag{79-b}$$

(79-a,b)所得的结果就是（77）式，它表明输出相关函数是经过两次卷积得到的。第一次由输入相关函数和冲激响应 $h(t)$卷积，其结果是 $\eta(t)$和$\xi(t)$的互关函数 $R_{\eta\xi}(\tau)$；第二次是由 $R_{\eta\xi}(\tau)$ 与 $\overline{h(-t)}$进行卷积。

§4 用功率谱密度的方法研究线性系统输出随机过程的统计特性

设输入复平稳随机过程$\xi(t)$的相关函数为$R_{\xi\xi}(\tau)$，它相应的功率谱密度为$S_{\xi\xi}(f)$

$$S_{\xi\xi}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{80}$$

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\xi\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df \tag{81}$$

从上节分析知，当系统的输出到达稳态后，输出过程也是复平稳随机过程。输出相关函数$R_{\eta\eta}(\tau)$可用§3中式(77)表示之：

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)\cdot dudv \tag{82}$$

于是可得输出功率谱密度为

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

设$\tau-u+v=s$，则$\tau=s+u-v$

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(v)}h(u)\cdot R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi f(s+u-v)}dsdudv\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(v)}e^{j2\pi fv}dv\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{-j2\pi fu}du\int_{-\infty}^{\infty}\cdot R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi fs}ds\end{aligned}$$

$$= \overline{H(jf)}\,H(jf)\,S_{\xi\xi}(f) = |H(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f)$$

即
$$S_{\eta\eta}(f) = |H(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f) \tag{83}$$

其中
$$H(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{84}$$

$H(jf)$代表线性动态系统的转移函数。

(83)式说明了输出过程的功率谱密度等于系统的转移函数绝对值的平方乘以输入功率谱密度。根据动态系统的特性可以写出它的转移函数，因此利用（83）式可以得到输出过程的功率谱密度。再利用傅氏反变换可以求出输出过程的相关函数

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta\eta}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |H(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df \tag{85}$$

这一方法相当于在确定性信号时用频谱法来分析电路，不过在随机信号时均采用功率谱密度而不是用信号的频谱。

例一 用功率谱密度方法求§3中积分电路输出的相关函数。

解 因输入随机过程的相关函数为

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

输入过程的功率谱密度$S_{\xi\xi}(f)$为

$$S_{\xi\xi}(f) = \sigma^2 \frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

积分电路的转移函数$H(jf)$为

$$H(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi fCR} = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$$

其中 $\alpha=\frac{1}{CR}$，代入（83）式得输出过程的功率谱密度为

$$S_{\eta\eta}(f)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+(2\pi f)^2}\cdot\frac{2\beta\sigma^2}{\beta^2+(2\pi f)^2}$$

$$=\frac{2\sigma^2\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1}{\beta^2+(2\pi f)^2}-\frac{1}{\alpha^2+(2\pi f)^2}\right]$$

所以 $R_{\eta\eta}(\tau)=\frac{\sigma^2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}]$

从这个例子可以着到，采用功率谱密度方法是研究输出过程统计特性的一种比较简便的方法。

讨论 在积分电路的例子中，如果

（1）$\alpha\gg\beta$，则$\frac{1}{\alpha}\ll\frac{1}{\beta}$或$\tau_\alpha\ll\tau_\beta$，$\tau_\alpha$是电路的时间常数，$\tau_\beta$是输入信号相关函数的时间常数。此时，$R_{\eta\eta}(\tau)$的表示式中第一项起主要作用，故

$$R_{\eta\eta}(\tau)\approx\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$$

即输出随机过程的相关函数和输入过程的相关函数一样。从频域的角度分析，τ_α小说明电路的带宽很宽，τ_β大说明输入信号的功率谱密度的带宽很窄，即输入功率谱密度相对于系统的带宽十分集中，如图5-16所示，因此输出功率谱密度几乎与输入功率谱密度一致，即电路没有改变信号的功率谱密度，因此输出相关函数仍为$\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$。

（2）反之，$\alpha<<\beta$，即$\frac{1}{\alpha}>>\frac{1}{\beta}$，$\tau_\alpha>>\tau_\beta$，此时$R_{\eta\eta}(\tau)$中第二项起主要作用，故

$$R_{\eta\eta}(\tau)\approx\frac{\alpha}{\beta}\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$$

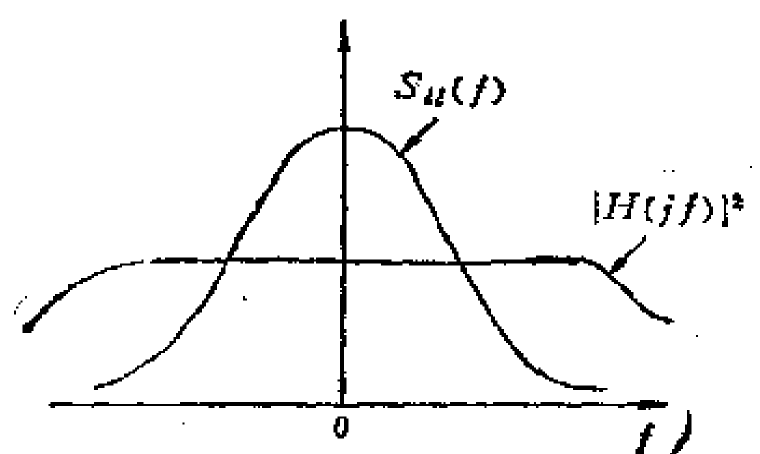


图 5-16

从频域的角度分析，电路的时间常数τ_0大说明电路的频带很窄，而输入信号的相关时间小说明输入信号的功率谱密度的带宽很宽，如图5-17所示。输入信号通过电路，高频分量衰减极大，能通过电路的仅仅是一些频率低的分量，电路使输出信号的功率密度不同于输入信号的功率密度，$S_{nn}(f)$决定于系统的带宽，因此输出的相关函数

$$R_{nn}(\tau)=\frac{\alpha}{\beta}\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

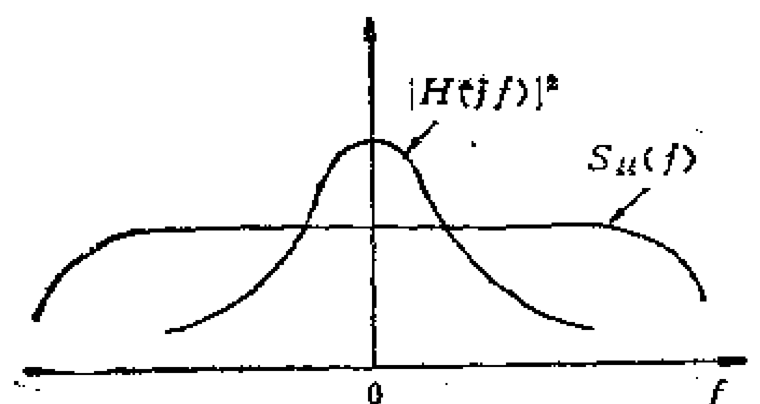


图 5-17

例二 研究白噪声通过理想低通滤波器后输出过程的统计特性。

解 白噪声通过理想低通滤波器后输出过程的功率谱密度为

$$S_{\eta\eta}(f)=\begin{cases}K_0 & (|f|<f_c)\\ 0 & (\text{其他频率区})\end{cases}$$

取傅氏反变换得输出过程的相关函数

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-f_c}^{f_c}K_0e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=K_0\frac{\sin 2\pi t_c\tau}{\pi\tau}$$

当 $\tau\to 0$时其极限为

$$R_{\eta\eta}(0)=\lim_{\tau\to 0}K_0\frac{\sin 2\pi f_c\tau}{\pi\tau}=2K_0f_c$$

故 $$R_{\eta\eta}(\tau)=R_{\eta\eta}(0)\frac{\sin 2\pi t_c\tau}{2\pi f_c\tau}$$

从上式可知 $R_{\eta\eta}\left(n\frac{1}{2f_c}\right)=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 这说明 $\eta(t)$ 和 $\eta\left(t+\frac{n}{2f_c}\right)$ 当 $n\neq 0$ 时是正交的，即相隔时间为 $\frac{n}{2f_c}$ $(n\neq 0)$的两个$\eta(t)$值是正交的。若输入过程的均值为零，则相隔时间为$\frac{n}{2f_c}$ $(n\neq 0)$的两个$\eta(t)$值是不相关的。

在(85)式中令 $\tau=0$，可得$\eta(t)$的均方值

$$R_{\eta\eta}(0)=E\{|\eta(t)|^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(f)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|H(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f)\,df \tag{86}$$

利用(83)、(86)式可以证明任何复平稳随机过程的功率密度$S_{\xi\xi}(f)\geqslant 0$。

可利用反证法证明，如果在$f=f_1$处$S_{\xi\xi}(f_1)<0$，则在f_1的δ邻区内 $(f_1-\delta f, f_1+\delta f)$ （δf很小）$S_{\xi\xi}(f)\leqslant 0$。设有一理想带通滤波器，它的频率特性为

$$H(jf)=\begin{cases}1 & (f_1-\delta f\leqslant f\leqslant f_1+\delta f)\\ 0 & (\text{其他频率区})\end{cases}$$

经过该理想滤波器的输出功率密度为

$$S_{\eta\eta}(f)=\begin{cases}S_{\xi\xi}(f)\leqslant 0 & (f_1-\delta f\leqslant f\leqslant f_1+\delta f)\\ 0 & (\text{其他频率区})\end{cases}$$

于是根据（86）式有

$$R_{\eta\eta}(0)=E\{|\eta(t)|^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(f)\,df$$

$$=\int_{f_1-\delta f}^{f_1+\delta f}S_{\eta\eta}(f)\,df$$

$$=\int_{f_1-\delta f}^{f_1+\delta f}S_{\xi\xi}(f)\,df<0$$

由于任何随机信号的均方值总是大于零的，因此上式不能成立，这说明$S_{\xi\xi}(f_1)<0$的假定不正确。故$S_{\xi\xi}(f)\geqslant 0$。

§5 联合平稳过程的互关函数与互谱密度

在四章§11中已经提到了两个或两个以上随机过程联合平稳的概念，在本章§3中也遇到了输出过程和输入过程间的互关函数，而且在§3中已经说明了如果线性动态系统输

入是平稳随机过程，则输入、输出两过程是联合平稳的。

平稳随机过程的自相关函数的傅氏变换为该随机过程的功率密度，那么，能否对联合平稳随机过程的互关函数取傅氏变换呢？

定义 联合平稳随机过程的互关函数的傅里叶变换称为互谱密度，即

$$S_{\eta\xi}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \tag{86}$$

上式中 $R_{\eta\xi}(\tau)=E\{\eta(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}$ $\quad(t_1-t_2=\tau)$

还有另一形式的互关函数

$$R_{\xi\eta}(\tau)=E\{\xi(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}$$

两种形式互关函数的关系为

$$R_{\eta\xi}(\tau)=\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)} \tag{87}$$

于是也有另一种形式的互谱密度

$$S_{\xi\eta}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \tag{88}$$

故

$$S_{\xi\eta}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{R_{\eta\xi}(-\tau)}e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{R_{\eta\xi}(-\tau)e^{j2\pi f\tau}}\,d\tau$$

设 $-\tau=s$，则

$$S_{\xi\eta}(f)=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\xi}(s)e^{-j2\pi fs}}\,ds=\overline{S_{\eta\xi}(f)} \tag{89}$$

(86)、(88) 两式的反变换为

$$R_{\eta\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df \tag{90}$$

$$R_{\xi\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\xi\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}df \tag{91}$$

(90) 式令 $\tau=0$，则

$$R_{\eta\xi}(0)=E\{\eta(t)\overline{\xi(t)}\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\xi}(f)df \tag{92}$$

(92) 式中如果 $\S(\tau)$ 是两端元件的输入电压，$\eta(\tau)$ 是其输入电流，且 $\eta(t)$、$\S(t)$ 是各态历经的，则 (92) 式左边代表进入该两端器件的功率，那么等式右边也代表功率，故 $S_{\eta\xi}(f)$ 代表它的功率谱密度。

定义了互谱密度就可以研究两个联合平稳随机过程 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 之和 $\zeta(t)$ 的相关函数及其功率谱密度了。

$$\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$$

$$\begin{aligned}R_{\zeta\zeta}(\tau)&=E\{\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}\}\\&=E\{[\xi(t+\tau)+\eta(t+\tau)][\overline{\xi(t)+\eta(t)}]\}\\&=R_{\xi\xi}(\tau)+R_{\eta\eta}(\tau)+R_{\xi\eta}(\tau)+R_{\eta\xi}(\tau)\end{aligned}$$

于是 $\quad S_{\zeta\zeta}(f)=S_{\xi\xi}(f)+S_{\eta\eta}(f)+S_{\xi\eta}(f)+S_{\eta\xi}(f)$

根据(89)式 $\quad S_{\xi\eta}(f)=\overline{S_{\eta\xi}(f)}$

这就保证了 $S_{\xi\xi}(f)+S_{\eta\eta}(f)+S_{\xi\eta}(f)+S_{\eta\xi}(f)$ 是实数。而 $S_{\zeta\zeta}(f)$ 是实数是它为功率谱密度的必要条件。

如果 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 的均值均为零，且 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 是正交的，则根据正交的定义

$$R_{\xi\eta}(\tau)=E\{\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\}=0$$

此时 $S_{\xi\eta}(f)=S_{\eta\xi}(f)=0$

于是 $S_{\zeta\zeta}(f)=S_{\xi\xi}(f)+S_{\eta\eta}(f)$

$$R_{\zeta\zeta}(\tau)=R_{\xi\xi}(\tau)+R_{\eta\eta}(\tau)$$

再回到研究线性时不变动态系统。$\xi(t)$ 为其输入过程，$\eta(t)$ 为其输出过程。根据 (78) 式

$$R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du=R_{\eta\xi}(\tau)$$

对上式取付氏变换得

$$\begin{aligned}S_{\eta\xi}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)R_{\xi\xi}(v)e^{-j2\pi f(u+v)}dudv\\&=H(jf)S_{\xi\xi}(f)\end{aligned}\tag{93}$$

根据（79-b）式

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(-v)}R_{\eta\xi}(\tau-v)dv$$

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(-v)}R_{\eta\xi}(\tau-v)e^{-j2\pi f\tau}dvd\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(-v)}R_{\eta\xi}(s)e^{-j2\pi f(v+s)}dsdv\\&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\xi}(s)e^{-j2\pi fs}ds\,\overline{\int_{-\infty}^{\infty}h(-v)e^{j2\pi fv}dv}\\&=S_{\eta\xi}(f)\cdot\overline{H(jf)}=H(jf)\,\overline{H(jf)}S_{\xi\xi}(f)\\&=|H(jf)|^2S_{\xi\xi}(f)\end{aligned}\tag{94}$$

于是，根据(72)、(73)、(77)、(78)、(79)、(93)、(94)式可画出输入随机过程统计特性和输出随机过程统计特性间的关系方框图（图5-18)。

例一 设有电路如图5-19所示，输入过程$\xi(t)$为平稳随机过程，且$E\{\xi(t)\}=0$，$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-3|\tau|}$求$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$的功率谱密度和两者的互谱密度。

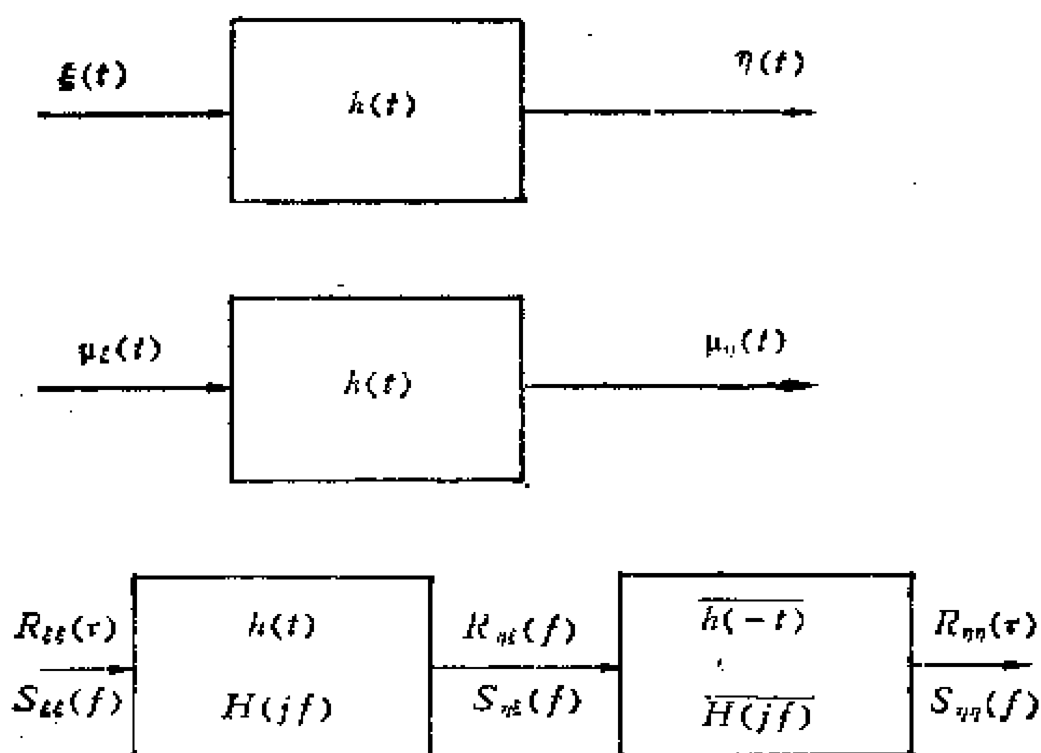


图 5-18

解

$$H_1(jf)=\frac{R}{R+\dfrac{R\dfrac{1}{j2\pi fC}}{R+\dfrac{1}{j2\pi fC}}}=\frac{j2\pi f+\alpha}{j2\pi f+2\alpha}$$

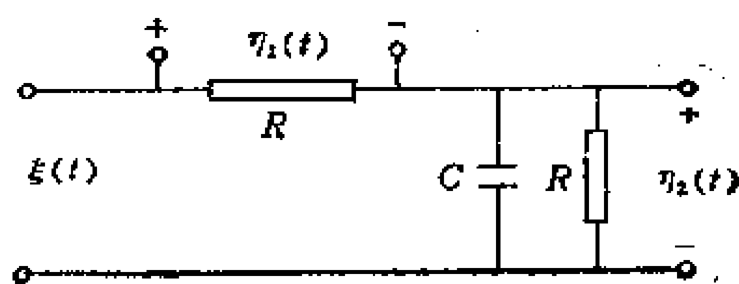


图 5-19

其中
$$\alpha=\frac{1}{CR}$$

$$H_2(jf)=\left(\frac{R\frac{1}{j2\pi fC}}{R+\frac{1}{j2\pi fC}}\right)\Bigg/\left(R+\frac{R\frac{1}{j2\pi fC}}{R+\frac{1}{j2\pi fC}}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{j2\pi f+2\alpha}$$

因
$$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$$

故
$$S_{\xi\xi}(f)=\frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}$$

$$\eta_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(t-u)\xi(u)du$$

$$\eta_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_2(t-v)\xi(v)dv$$

$$R_{\eta_1\eta_2}(t_1,t_2)=E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\}$$

$$=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h_1(t_1-u)\xi(u)du\right.$$

$$\left.\cdot\overline{\int_{-\infty}^{\infty}h_2(t_2-v)\xi(v)dv}\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(t_1-u)\overline{h_2(t_2-v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2+v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

$R_{\eta_1\eta_2}(t_1,t_2)$仅是时间差$\tau=t_1-t_2$的函数，

即 $$R_{\eta_1\eta_2}(t_1,t_2)=R_{\eta_1\eta_2}(\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

对$R_{\eta_1\eta_2}(\tau)$取付氏变换得

$$S_{\eta_1\eta_2}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta_1\eta_2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau-u+v)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dudv$$

$$=H_1(jf)\overline{H_2(jf)}S_{\xi\xi}(f)$$

故 $$S_{\eta_1\eta_2}(f)=\left(\frac{j2\pi f+\alpha}{j2\pi f+2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{2\alpha-j2\pi f}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}\right)$$

$$S_{\eta_1\eta_1}(f)=|H_1(jf)|^2S_{\xi\xi}(f)$$

$$=\frac{\alpha^2+(2\pi f)^2}{(2\alpha)^2+(2\pi f)^2}\ \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}$$

$$S_{\eta_2\eta_2}(f)=|H_2(jf)|^2S_{\xi\xi}(f)$$

$$=\frac{\alpha^2}{(2\alpha)^2+(2\pi f)^2}\ \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}$$

例二 设有两个线性时不变动态系统，它们的转移函数分别为$H_1(jf)$、$H_2(jf)$。如用同一平稳随机过程$\xi(t)$送到二个动态系统，$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$分别为两个系统的输出。若$\xi(t)$的均值为零，问如何设计$H_1(jf)$、$H_2(jf)$才能保证

$\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$是统计不相关的（见图 5-20）。

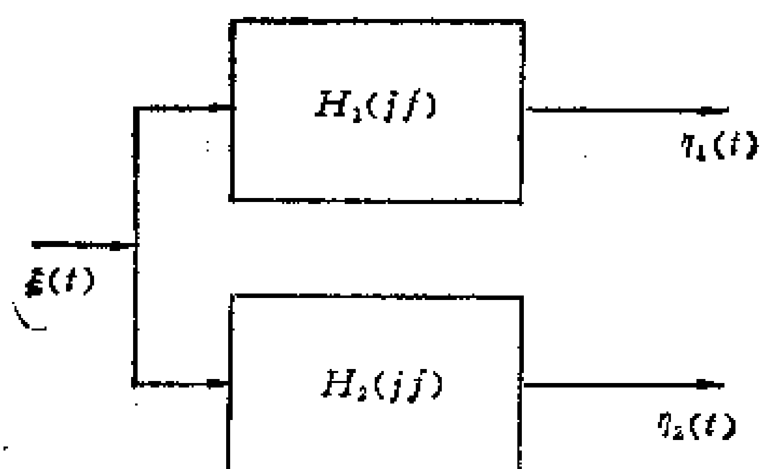


图 5-20

解 $\eta_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-u)\xi(u)du$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\xi(t-u)du$$

$$\eta_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-v)\xi(v)dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h_2(v)\xi(t-v)dv$$

$$E\{\eta_1(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-u)E\{\xi(u)\}du=0$$

$$E\{\eta_2(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-v)E\{\xi(v)\}dv=0$$

$$E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}\cdot\xi(t_1-u)\overline{\xi(t_2-v)}\,dudv\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(t_1 - t_2 - u + v)dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau - u + v)dudv$$

其中 $\tau = t_1 - t_2$。上式说明 $\eta_1(t)\eta_2(t)$ 的互关函数是时间差 τ 的函数，即

$$R_{\eta_1\eta_2}(\tau) = E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\ \overline{h_2(v)}$$

$$\cdot R_{\xi\xi}(\tau - u + v)dudv$$

故 $\eta_1(t)\eta_2(t)$ 的互谱密度为

$$S_{\eta_1\eta_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta_1\eta_2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= H_1(jf)\overline{H_2(jf)}S_{\xi\xi}(f)$$

根据上式可知，如果设计两动态系统转移函数的振幅频率特性是没有交叠的，即通带没有交叠，如图5-21所示，则

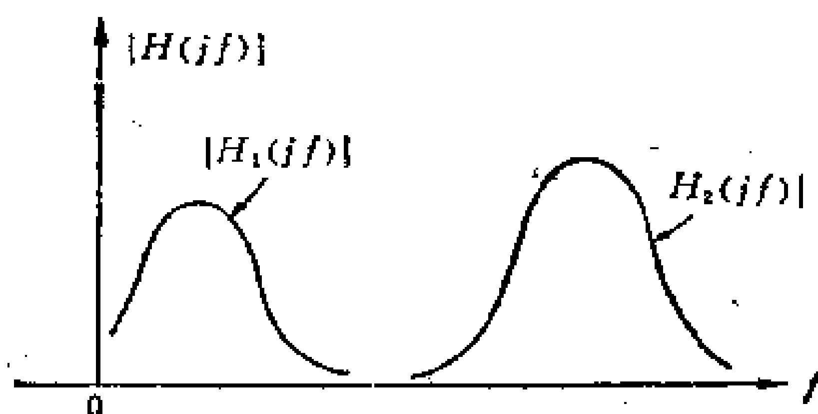


图 5-12

$S_{\eta_1\eta_2}(f)=0$，于是 $R_{\eta_1\eta_2}(\tau)=0$，即 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 是统计不相关的。

如果 $\xi(t)$ 为一正态过程，第六章内将证明 $\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$ 均为正态分布的过程，且 $\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$ 是联合正态分布的过程；而当 $|H_1(jf)|\,|H_2(jf)|=0$ 时 $\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$ 是不相关的，因此 $\eta_1(t)$、$\eta_2(t)$ 是两个彼此统计独立的正态分布的随机过程。虽然两系统由同一随机信号源所驱动，只要两系统的通带不相交叠，就可以得到两个相互统计独立的过程。

§6 线性离散时间动态系统

对任何线性、离散时间动态系统可建立一差分方程作为描述该动态系统的数学模型，也可以采用单位样值响应 $\{h_n\}$ 以描述该系统的特性，也可以采用单位样值响应的 Z 变换即线性离散时间动态系统的转移函数描述该系统的特性，即

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} \tag{95}$$

其中 z 为复变数，H(z) 在离散时间动态系统中的作用相当于连续时间动态系统中转移函数 H(jf) 的作用。对于具有因果性的线性离散时间动态系统，其单位样值响应具有下列性质：当 $k<0$ 时 $h_k=0$，此时

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \tag{96}$$

如果离散时间动态系统是线性、时不变、因果性系统，它的激励为序列为 $x(k)=x_k$，$k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，则系统的零状态响应为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} x(k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \tag{97}$$

因系统具有因果性，故

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h_{n-k} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} \tag{98}$$

即系统的零状态响可以用激励与单位样值响应的卷积表示。

(97) 式两边取Z变换得

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{99}$$

式中

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} \tag{100}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{101}$$

即 $X(z)$，$Y(z)$ 代表输入序列 $x(n)$ 及输出序列 $y(n)$ 的Z变换。

例 设系统的单位样值响应 $\{h_k\}$ 为

$$h_k = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k \geqslant 0) \end{cases}$$

求它的转移函数。

解

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

该式在 $|z|>1$ 时存在。

例 设有序列 $\{x_k\}$，它定义为

$$x_k = \begin{cases} 1 & (k < 0) \\ 0 & (k \geqslant 0) \end{cases}$$

求它的Z变换 $X(z)$。

解 $X(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{-k}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}=\frac{z}{1-z}$

该式仅在 $|z|<1$ 时才成立。

上面简单地回顾了在确定性时间序列激励下研究离散时间动态系统的方法。现在的任务是当激励信号为离散参数的平稳的随机过程时研究零状态响应的统计特性。

设系统的激励信号是存在于所有整数集上的离散平稳随机过程 $\{\xi_n=\xi(t_n),\ t_n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ 系统的输出为 η_n，

$$\eta_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{n-k}\xi_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\xi_{n-k} \tag{102}$$

η_n是随机过程，取它的均值得

$$E\{\eta_n\}=E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\xi_{n-k}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_kE\{\xi_{n-k}\}$$

由于输入为平稳过程，$E\{\xi_{n-k}\}=\mu_\xi=$ 常数，

故 $$E\{\eta_n\}=\mu_\xi\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k=\mu_\xi J=\text{常数} \tag{103}$$

其中 J 为一常数。

η_n的相关函数为

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(m+n,n)&=E\{\eta_{n+m}\eta_n\}\\&=E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\xi_{n+m-k}\right.\\&\quad\left.\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_l\xi_{n-l}\right\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_kh_lE\{\xi_{n+m-k}\xi_{n-l}\}\end{aligned}$$

由于输入过程为宽平稳过程

$$E\{\xi_{n+m-k}\xi_{n-i}\} = R_{\xi\xi}(m-k+i)$$

于是

$$R_{\eta\eta}(m+n,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_k h_i R_{\xi\xi}(m-k+i) \quad (104)$$

(104) 式的结果仅是 m的函数，即

$$R_{\eta\eta}(m+n,n) = R_{\eta\eta}(m)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_k h_i R_{\xi\xi}(m-k+i) \quad (105)$$

根据(103)、(105)式，$E\{\eta_n\}$ = 常数，$\eta(t)$的相关函数仅是时间差 m的函数，可知输出过程η_n也是平稳随机过程。

根据§1 公式(30)、(31)已知离散平稳随机过程相关函数和功率谱密度间的关系为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda} = f_{\xi\xi}(\lambda) \quad (-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi) \qquad (106)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda = R_{\xi\xi}(k) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$(107)$$

取 $e^{j\lambda}=z$， (106) 式变为序列 $R_{\xi\xi}(k)$的Z变换，即

$$\Phi_{\xi\xi}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(k)z^{-k} \qquad (108)$$

于是
$$\frac{1}{2\pi j}\oint \Phi_{\xi\xi}(z)z^{k-1}dz = R_{\xi\xi}(k) \qquad (109)$$

(109) 式为 z 平面上一个合适的闭路积分。(108)、(109) 两式成为一对 Z 变换。

设输入随机序列$\{\xi_n\}$的相关函数为$R_{\xi\xi}(n)$，其相应的Z变换为$\Phi_{\xi\xi}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(k)z^{-k}$

求输出过程$\eta(n)$的功率谱密度。对（105）式两边取Z变换

$$\Phi_{\eta\eta}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(m)z^{-m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_k h_i R_{\xi\xi}(m-k+i)\right]z^{-m}$$

令上式中 $m-k+i=n$，并改变其求和次序，得

$$\Phi_{\eta\eta}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(n)z^{-n}$$

$$= H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)\Phi_{\xi\xi}(z) \tag{110}$$

（110）式给出了输出过程的功率谱密度。对该式取反变换即可得输出过程的相关函数

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \Phi_{\eta\eta}(z)z^{k-1}\,dz = R_{\eta\eta}(k) \tag{111}$$

例 设有线性离散时间动态系统，它的单位样值响应为$\{h_k\}$，h_k的定义为

$$h_k = \begin{cases} 0 & (k<0) \\ e^{-\alpha k} & (k\geq 0 \quad \alpha>0) \end{cases}$$

即该系统为因果性的，它是一低通滤波器。又设该系统的激励信号是一平稳随机序列，它的均值为0，相关函数为

$$R_{\xi\xi}(n) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & (n=0) \\ 0 & (n\neq 0) \end{cases}$$

即输入为白噪声的抽样序列。求输出过程的均值和相关函数。

解 （1）动态系统的转移函数

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{\alpha}z)^{-k}$$

$$= \frac{1}{1-(e^a z)^{-1}} = \frac{e^a}{e^a - z^{-1}}$$

（2）因 $E\{\xi_n\} = 0$，则根据（103）式有

$$E\{\eta_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k E\{\xi_{n-k}\} = 0$$

（3）输入过程的相关函数为

$$R_{\xi\xi}(n) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

故其相应的Z变换为

$$\Phi_{\xi\xi}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(n) z^{-n} = \frac{N_0}{2}$$

（4）根据（110）式得

$$\Phi_{\eta\eta}(z) = \frac{e^a}{e^a - z^{-1}} \cdot \frac{e^a}{e^a - z} \cdot \frac{N_0}{2}$$

$$= \frac{e^{2a} N_0}{2(e^a - z^{-1})(e^a - z)}$$

（5）求 $\Phi_{\eta\eta}(z)$ 的反变换：

因为 $$\Phi_{\eta\eta}(z) = \frac{N_0}{2}\left[\frac{e^{2a}(e^{3a}-1)^{-1} z}{e^a - z} + \frac{e^{3a}(e^{2a}-1)^{-1}}{e^a - z^{-1}}\right]$$

于是 $$\Phi_{\eta\eta}(z) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{e^{2a}}{e^{2a}-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{an} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n}\right]$$

故它的相关函数为

$$R_{\eta\eta}(n)=\frac{N_0}{2}\,\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1}e^{-\alpha|n|}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

见图5-22。

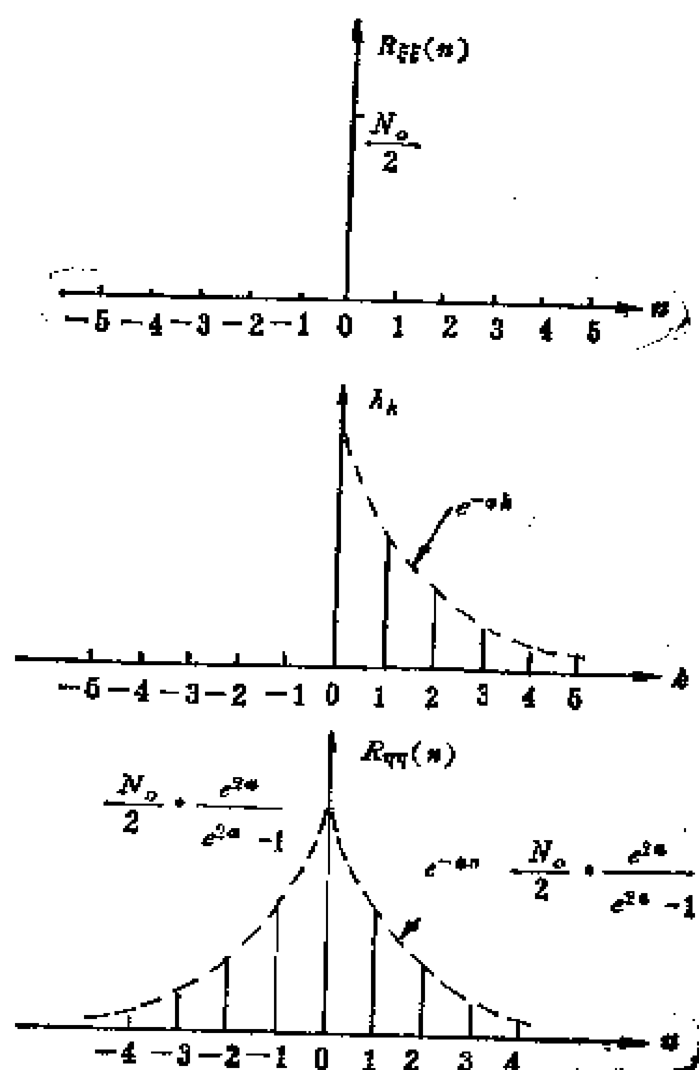


图 5-22

§7 平稳随机过程的谱分解定理*

一个确定性的时间函数（周期的或非周期的）可以看作无数个简谐振动的叠加，对于随机过程是否也有类似的结论呢？例如：

（1）随机过程$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{i\omega_n t}$，其中$\{\eta_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$为复随机变量序列，且$E\{\eta_n\}=0$，$E\{\eta_n\overline{\eta_m}\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$，

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2<\infty$，$\{\omega_n\}$为任意一列实数，则$E\{\xi(t)\}=0$

$$E\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{i\omega_n(t-s)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{i\omega_n\tau}$$

其中$\tau=t-s$。因此，随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散功率谱，谱线位于ω_n处。所以这个过程可以看作具有随机振幅的简谐振动的叠加。

（2）随机过程$\xi(t)=\sum_{n=1}^{N}\{\xi_n\cos w_n t+\eta_n\sin\omega_n t\}$，$-\infty<t<\infty$，其中$\{\xi_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$、$\{\eta_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$为互不相关的实随机变量序列，$E\{\xi_n\}=0$，$E\{\eta_n\}=0$，$E\{\xi_n\eta_m\}=0$，$1\leqslant n$，$m\leqslant N$，$E\{\xi_n\xi_m\}=E\{\eta_n\eta_m\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$为任意正实数，则

$E\{\xi(t)\}=0$

$$E\{\xi(t)\xi(s)\} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 \cos\omega_n(t-s)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 \cos\omega_n \tau$$

其中 $\tau = t - s$。因此随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散的功率谱，谱线位于ω_n处，在ω_n处的功率为σ_n^2。因此这个过程可以看作具有随机振幅的简谐振动的叠加。

从上述两个例子可以看到对于离散谱的平稳随机过程来说，可以把它看作具有随机振幅的简谐振动的叠加。那末，对于任何平稳过程是否都可以分解为随机振幅的简谐振动的叠加呢？平稳过程的谱分解定理回答了这个问题。

先从物理上来分析。让随机信号$\xi(t)$通过一列窄带带通滤波器，如图 5-23(a)所示。

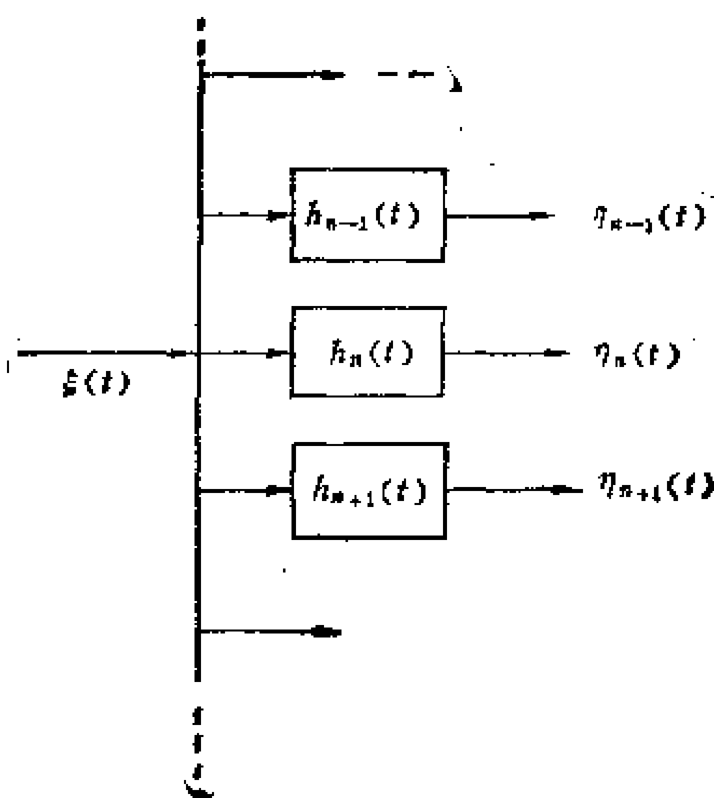


图 5-23(a)

各带通滤波器的通频带分配如图5-23(b)所示，各通频带

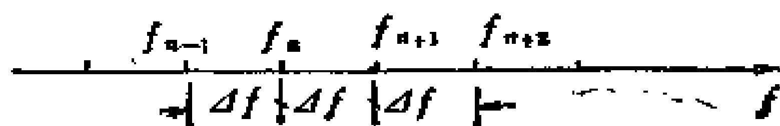


图 5-23(b)

为 $I_n=(f_n,f_{n+1})$，$n=\cdots,-1,0,1,\cdots$，且彼此不相互交叠，于是各带通滤波器的输出为

$$\eta_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_n(t-\tau)\xi(\tau)d\tau \quad (n=\cdots,-1,0,1,\cdots)$$

若 $\xi(t)$ 为零均值的平稳随机过程，则各滤波器输出 $\eta_n(t)$ 也是零均值平稳过程。由于各滤波器的通频带均不相互交叠，则各滤波器的输出均互不相关。若每个滤波器的通频带带宽 Δf 均非常小，$\Delta f\to df$，以致可以认为各滤波器仅允许一个单一频率 (f_n) 的分量通过，因此可以认为 $\eta_n(t)$ 具有如下形式：

$$\eta_n(t)=dZ(f_n)e^{j\omega_n t} \qquad (\omega_n=2\pi f_n)$$

其中 $dz(f_n)$ 为一复随机振幅。这就说明了随机过程 $\xi(t)$ 可以近似地表示为

$$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}dZ(f_n)e^{j\omega_n t}$$

当 $df\to 0$ 时

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dz(f) \qquad (\omega=2\pi f)$$

$z(f)$ 是频域上的复随机过程，$-\infty<f<\infty$，上述积分应该理解为均方意义下的积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dz(f)=\underset{df\to 0}{l.i.m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}dZ(f_n)e^{j\omega_n t}$$

而 $\qquad dZ(f_n)=Z(f_n+df)-Z(f_n)$

综合上面的讨论，可归纳成平稳随机过程的谱分解定理。

定理 设$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$为均方连续、零均值平稳随机过程，则$\xi(t)$可表示为

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(f) \qquad (\omega=2\pi f) \tag{112}$$

其中 $$Z(f)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt \tag{113}$$

且 $Z(f)$有如下性质：

(1) $$E\{Z(f)\}=0 \tag{114}$$

(2) 若区间$(f_1, f_1+\Delta f_1)$与$(f_2, f_2+\Delta f_2)$不相重叠则

$$E\{[Z(f_1+\Delta f_1)-Z(f_1)]\overline{[Z(f_2+\Delta f_2)-Z(f_2)]}\}=0 \tag{115}$$

(3) $$E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}=F(f_2)-F(f_1) \tag{116}$$

其中 $F(f)$为$\xi(t)$的功率谱函数。称$Z(f)$为$\xi(t)$的随机谱函数。

在证明谱分解定理前先证明几个引理：

引理一 对于每一个具有正交增量的过程$Z(f)$必存在着非降函数，$F(f)$，使

$$E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}=F(f_2)-F(f_1) \qquad (f_2\geq f_1)$$

证 任意固定一个数f_0，且定义$F(f)$为

$$F(f)=\begin{cases}E\{|Z(f)-Z(f_0)|^2\} & (f\geq f_0)\\ -E\{|Z(f)-Z(f_0)|^2\} & (f<f_0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}&=E\{|[Z(f_2)-Z(f_0)]\\&\quad-[Z(f_1)-Z(f_0)]|^2\}\\&=E\{|Z(f_2)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad+E\{|Z(f_1)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad-E\{[Z(f_2)-Z(f_0)]\overline{[Z(f_1)-Z(f_0)]}\}\end{aligned}$$

$$-E\{\overline{[Z(f_2)-Z(f_0)]}[Z(f_1)-Z(f_0)]\}$$

利用 Z(f)的正交增量性质，（1）当 $f_2\geqslant f_1\geqslant f_0$ 时

$$\begin{aligned}E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}&=E\{|Z(f_2)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad-E\{|Z(f_1)-Z(f_0)|^2\}\\&=F(f_2)-F(f_1)\end{aligned}$$

（2）当 $f_2\geqslant f_0\geqslant f_1$ 时

$$\begin{aligned}E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}&=E\{|Z(f_2)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad+E\{|Z(f_1)-Z(f_0)|^2\}\\&=F(f_2)-F(f_1)\end{aligned}$$

（3）当 $f_0\geqslant f_2\geqslant f_1$ 时

$$\begin{aligned}E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}&=E\{|Z(f_2)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad+E\{|Z(f_1)-Z(f_0)|^2\}\\&\quad-2E\{|Z(f_2)-Z(f_0)|^2\}\\&=-F(f_2)-F(f_1)+2F(f_2)=F(f_2)-F(f_1)\end{aligned}$$

因此当 $f_2\geqslant f_1$ 时

$$F(f_2)-F(f_1)=E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}\geqslant 0$$

即 F(f)为非降函数。引理得证。

引理二 设 Z(f)是正交增量过程，且 F(f) 有界，则积分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dZ(f)$ 存在。

证 在实频轴上取两类分点如下：

$$-\infty<\bar{s}_1<\bar{s}_2<\cdots<\bar{s}_{n+1}<\infty$$

$$-\infty<\tilde{s}_1<\tilde{s}_2<\cdots<\tilde{s}_{m+1}<\infty$$

其中 $\bar{s}_1=\tilde{s}_1,\cdots,\bar{s}_{n+1}=\tilde{s}_{m+1}$，现在把上述两类分点叠加在一起得到分点

$$-\infty<s_1<s_2<\cdots<s_{r+1}<\infty$$

令
$$A=\left|\sum_{i=1}^{m} e^{j2\pi\tilde{s}_i t}[Z(\tilde{s}_{i+1})-Z(\tilde{s}_i)]\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n} e^{j2\pi\bar{s}_k t}[Z(\bar{s}_{k+1})-Z(\bar{s}_k)]\right|$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{r}(e^{j2\pi\lambda_k t}-e^{j2\pi\mu_k t})\right.$$
$$\left.\cdot[Z(s_{k+1})-Z(s_k)]\right|$$

其中 λ_k、μ_k 是某一个 s_i，故

$$E|A|^2\leqslant\sum_{k=1}^{r}|e^{j2\pi\lambda_k t}-e^{j2\pi\mu_k t}|^2$$
$$\cdot[F(s_{k+1})-F(s_k)]\leqslant\sum_{k=1}^{r}\max|e^{j2\pi\lambda_k t}$$
$$-e^{j2\pi\mu_k t}|^2[F(s_{k+1})-F(s_k)]$$
$$=\max_{1\leqslant k\leqslant r}|e^{j2\pi\lambda_k t}-e^{j2\pi\mu_k t}|^2$$
$$\cdot[F(s_{r+1})-F(s_1)]$$

由于 $|\lambda_k-\mu_k|\leqslant\max\limits_{1\leqslant i<m}|\tilde{s}_{i+1}-\tilde{s}_i|+\max\limits_{1\leqslant k<n}|\bar{s}_{k+1}-\bar{s}_k|$

当 $n\to\infty$, $m\to\infty$, $r\to\infty$ 时

$$E|A|^2\to 0$$

根据均方收敛的充要条件可知该积分存在。

引理三 设 $\xi(t)$ 为均方连续的平稳过程，且其谱函数 $F(f)$（它是功率密度 $S(f)$ 在 $(-\infty,f)$ 上的积分）连续，则

$$Z(f)=\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt\quad(\omega=2\pi f)\ 存在。$$

证 设 $T_2>T_1$

$$E\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T_2}^{T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1}^{T_1}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt\right|^2\right\}$$

$$=E\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt\right|^2\right\}$$

$$=\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}\int_{T_1<|s|\leqslant T_2}E\left\{\left[\frac{e^{-j\omega t}-1}{-j2\pi t}\xi(t)\right]\right.$$

$$\left.\cdot\left[\overline{\frac{e^{-j\omega s}-1}{-j2\pi s}\xi(s)}\right]\right\}dtds=\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}$$

$$\int_{T_1<|s|\leqslant T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-j2\pi t}\ \frac{e^{j\omega s}-1}{j2\pi s}E\{\xi(t)$$

$$\cdot\overline{\xi(s)}\}dtds=\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}\int_{T_1<|s|\leqslant T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-j2\pi t}$$

$$\cdot\frac{e^{j\omega s}-1}{j2\pi s}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi\mu(t-s)}dF(\mu)dtds$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}\int_{T_1<|s|\leqslant T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-j2\pi t}e^{j2\pi\mu t}$$

$$\cdot\frac{e^{j\omega s}-1}{j2\pi s}e^{-j2\pi\mu s}dtdsdF(\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{T_1<|t|\leqslant T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-j2\pi t}e^{j2\pi\mu t}dt\right|^2dF(\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T_2}^{T_2}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}e^{j2\pi\mu t}dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1}^{T_1}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}e^{j2\pi\mu t}dt\right|^2dF(\mu)$$

因此，欲证明本引理只需证明

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\mu,\omega)-\Phi_T(\mu,\omega)|^2 dF(\mu)=0$$

其中 $$\Phi_T(\mu,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi\mu t}-e^{j(2\pi\mu-\omega)t}}{jt}dt$$

$$\Phi(\mu,\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi\mu t}-e^{j(2\pi\mu-\omega)t}}{jt}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{T}\frac{e^{j2\pi\mu t}-e^{j(2\pi\mu-\omega)t}}{jt}dt\right.$$

$$\left.+\int_{-T}^{0}\frac{e^{j2\pi\mu t}-e^{j(2\pi\mu-\omega)t}}{jt}dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{T}\frac{\sin 2\pi\mu t}{t}dt\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{T}\frac{\sin(2\pi\mu-\omega)t}{t}dt\right]$$

从数学分析中知

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2} & (\lambda>0)\\ 0 & (\lambda=0)\\ -\frac{1}{2} & (\lambda<0)\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\lambda$$

因此

$$\begin{cases}1 & \left(0<\mu<\frac{\omega}{2\pi}\right)\\ \frac{1}{2} & \left(\mu=\frac{\omega}{2\pi}=t>0\text{或}\mu=0,\ t>0\right)\end{cases}$$

$$\Phi(\mu,\omega)=\begin{cases}0 & \left(\mu>0,\mu>f \text{ 或 } \mu=f=\dfrac{\omega}{2\pi}=0\right. \\ & \quad\left.\text{或}\quad \mu<0,\ \mu<f\right) \\ -\dfrac{1}{2} & (\mu=f<0 \quad \text{或 } \mu=0 \quad f<0) \\ -1 & (\mu<0,\ 0>\mu>f,\ \omega=2\pi f)\end{cases}$$

由 $F(\mu)$ 的连续性和$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t}dt$ 对λ在区域 $|\lambda|\geqslant\delta>0$ 上是一致收敛的，并且在 $|\lambda|<\delta$ 上 $\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|<K$，因此

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\mu,\omega)-\Phi_T(\mu,\omega)|^2 dF(\mu)=0$$

故引理得证。

下面证明谱分解定理：

1. 利用引理三所定义的Z(f)证明它满足性质（1），

因 $$Z(f)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt \qquad (\omega=2\pi f)$$

且 $E\{\xi(t)\}=0$

故 $E\{Z(f)\}=0$

2. 设f轴上有两点s_2，s_1，$s_2>s_1$，则

$$E\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\xi(t)\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}\overline{\xi(u)}du\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}e^{j2\pi f(t-u)}dudF(f)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi ft}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^T\frac{\sin2\pi(s_2-f)u}{u}du\right.$$

$$-\int_0^T \frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\Big]dF(f)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t}\Big[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi(s_2-f)u}{u}du$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\Big]dF(f) \;=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t}$$

$$\cdot[\mathrm{sgn}(s_2-f)-\mathrm{sgn}(s_1-f)]dF(f)$$

$$=\int_{s_1}^{s_2} e^{j2\pi f t}dF(f)$$

再设 f轴上另有两点 s_3、s_4，且 $s_4>s_3$，则

$$E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}$$

$$E\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}dt$$

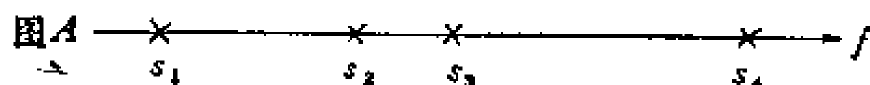
$$=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}e^{j2\pi f t}dtdF(f)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\Big[\frac{1}{\pi}\int_0^{T}\frac{\sin 2\pi(s_4-f)t}{t}dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{T}\frac{\sin 2\pi(s_3-f)t}{t}dt\Big]dF(f)$$

$$=\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(s_4-f)-\mathrm{sgn}(s_3-f)]dF(f)$$

从图5-24可看出，如果 $s_1<s_2\leqslant s_3<s_4$或 $s_3<s_4\leqslant s_1<s_2$，则 $E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}=0$



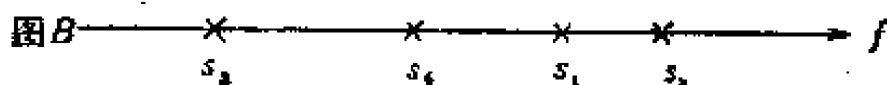


图 5-24

如果 $s_3=s_1$, $s_4=s_2$, 则 $E\{|Z(s_2)-Z(s_1)|^2\}=F(s_2)-F(s_1)$ 因此 $Z(t)$ 满足性质(2)、(3)。

3. 最后证明

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dZ(f) \qquad (\omega=2\pi f)$$

即要求证明 $\lim\limits_{A\to\infty} E\left\{\left|\xi(t)-\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)\right|^2\right\}=0$

因为
$$E\left\{\left|\xi(t)-\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)\right|^2\right\}$$
$$=E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\right\}+E\left\{\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)\cdot\overline{\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)}\right\}-E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)}\right\}$$
$$-E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)\right\}$$

$$E\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\}=R_\xi(0)$$

$$E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{i\omega t}dZ(f)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-i\omega_k' t}E\left\{\xi(t)\overline{\left[Z(f_{k+1})-Z(f_k)\right]}\right\}$$

其中 $\omega_k\leqslant\omega_k'\leqslant\omega_{k-1}$, $-A=f_1<f_2<\cdots<f_n=A, \omega_k=2\pi f_k$, 上式取极限时，要求 $n\to\infty$, $\max|f_{k+1}-f_k|\to 0$。

利用（2）内的结论

$$E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t}\int_{f_k}^{f_{k+1}} e^{j\omega t}dF(f)$$

故 $\lim\limits_{A\to\infty} E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} dF(f)=R_\xi(0)$

同理可证 $\lim\limits_{A\to\infty}\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)\right\}=R_\xi(0)$

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)}\right\}$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n-1} e^{j\omega_k' t}[Z(f_{k+1})-Z(f_k)]\right]\right.$$

$$\left.\cdot\overline{\left[\sum_{i=1}^{n-1} e^{j\omega_i' t}[Z(f_{i+1})-Z(f_i)]\right]}\right\}=\lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}[F(f_{k+1})-F(f_k)]=\int_{-\infty}^{\infty} dF(f)=R_\xi(0)$$

故 $\lim\limits_{A\to\infty} E\left\{\left|\xi(t)-\int_{-A}^{A} e^{j\omega t}dZ(f)\right|^2\right\}$

$$=R_\xi(0)+R_\xi(0)-R_\xi(0)-R_\xi(0)=0$$

从而证明了在 F(f) 为连续时 $\xi(t)$ 的谱分解定理。如果 F(f) 有不连续点，则在 F(f) 的连续点上仍以

$$Z(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\xi(t)dt$$

定义 Z(f)，而在 F(f) 的间断点令 $Z(f)=\frac{1}{2}[Z(f-0)+Z(f+0)]$，其中 $Z(f-0)$ 和 $Z(f+0)$ 分别表示 $Z(f-\varepsilon)$ 和 $Z(f+\varepsilon)$

当$\varepsilon\to 0$时的均方极限，这时定理中的三个性质均满足。这就完全的证明了平稳随机过程的谱分解定理。

注(1)　$Z(f)$代表一个谱过程。如果$\xi(t)$为正态分布的平稳随机过程，那么$Z(f)$也是正态分布的过程（见第六章）。

注(2)　平稳过程的谱分解定理说明，可以把每一个零均值均方连续的平稳随机过程看作许多元谐波振荡的叠加，它的元谐波振荡为$dZ(f)e^{j\omega t}$，这些振荡覆盖在整个频率轴上，它的复振幅为随机的$dZ(f)$，不同频率的复振幅是不相关的，复振幅的均值为0，复振幅的方差为$dF(f)$，即该频率的功率。

当$\xi(t)$为零均值均方连续的实平稳过程时，$Z(f)$是一个复随机过程。设　　$Z(f)=Z_1(f)+jZ_2(f)$

$Z_1(f)$和$Z_2(f)$分别为$Z(f)$的实部和虚部，于是

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}dZ(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega t + j\sin\omega t) \\
&\cdot [dZ_1(f) + jdZ_2(f)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t dZ_1(f) \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega t dZ_2(f) + j\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t dZ_2(f)\right. \\
&\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega t dZ_1(f)\right]
\end{aligned}
$$

由于$\xi(t)$为实过程，上式中虚部必需为0，因此$Z_1(f)$为偶函数，即$Z_1(f)=Z_1(-f)$，$Z_2(f)$为奇函数，即$Z_2(f)=-Z_2(-f)$，故

$$Z(-f)=Z_1(-f)+jZ_2(-f)=Z_1(f)-jZ_2(f)=\overline{Z(f)}$$

设有两个微分频率区df、$-df$配置于$+f$、$-f$的邻区，如图5-25所示，由于这两个微分频率区不相交叠，故

$$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=0$$

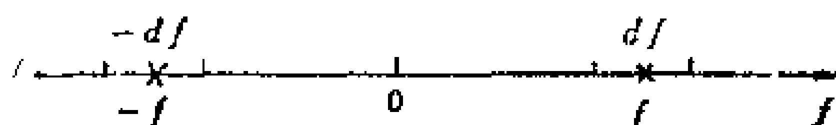


图 5-25

而 $$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=E\{[dZ(f)]^2\}$$
$$=E\{[dZ_1(f)+jdZ_2(f)]^2\}=E\{[dZ_1(f)]^2\}$$
$$+2jE\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}-E\{[dZ_2(f)]^2\}=0$$

因此 $$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}$$
$$E\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}=0$$

这就说明 $Z_1(f)$ 和 $Z_2(f)$ 是不相关的。而
$$dF(f)=E\{|dZ(f)|^2\}$$
$$=E\{[dZ_1(f)]^2\}+E\{[dZ_2(f)]^2\}$$

故 $$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}=\frac{1}{2}dF(f)$$

§8 抽 样 定 理

山农提出的抽样定理对于通信、控制理论都起着十分重要的作用。但是在信号与系统的有关书籍中所讨论的是关于确定性信号抽样定理的证明及其应用。本节将讨论随机信号时的抽样定理。研究确定性信号的抽样定理时要求该信号为有限带宽，即在带宽有限的条件下可以应用抽样定理；推广到随机信号时要求它的功率谱密度为有限带宽。

设 $\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$ 为零均值的平稳随机过程，它的功率谱密度限于 $(-f_c,\ f_c)$ 之间，即当 $|f|>f_c$ 时功率密度 $S(f)=0$。根据谱分解定理，$\xi(t)$ 可以表示成

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}dZ(f)=\int_{-f_c}^{f_c} e^{j\omega t}dZ(f) \qquad (1)$$

其中 $\omega=2\pi f$，$-\infty<t<\infty$。

设有一频率函数

$$g(f)=\begin{cases} e^{j\omega t} & (|f|<f_c) \\ 0 & (|f|\geqslant f_c) \end{cases}$$

设 $2f_c=\frac{1}{t_0}>0$，或 $t_0=\frac{1}{2f_c}$，t_0为一常数，把上述函数$g(f)$用傅氏级数展开

$$g(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt_0\omega} \qquad (|f|<f_c)$$

其中 $c_n=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} g(f)e^{-jnt_0\omega}df$

$$=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} e^{j\omega t}e^{-jnt_0\omega}df=\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}$$

即 $g(f)=e^{j\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}e^{jnt_0\omega}$

$$(|f|<f_c,\ \omega=2\pi f,\ -\infty<t<\infty) \qquad (2)$$

（2）式代入（1）式得

$$\xi(t)=\int_{-f_c}^{f_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}e^{jnt_0\omega}dZ(f)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)}\cdot\int_{-f_c}^{f_c} e^{jnt_0\omega}dZ(f)\right\} \qquad (3)$$

从（1）式知 $\xi(nt_0)=\int_{-f_c}^{f_c} e^{j\omega nt_0}dZ(f)$

故 $$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(nt_0)\frac{\sin 2\pi f_c(t-nt_0)}{2\pi f_c(t-nt_0)} \qquad (4)$$

（4）式代表了随机信号时的抽样定理。由于谱分解定理 $\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}dZ(f)$ 是在均方意义下的相等，因此(4)式所代表的等式也是在均方意义下的相等。这就说明了在有限带宽的功率谱密度的条件下，抽样定理也适用于平稳随机信号。

§9 线性微分方程的进一步讨论*

第四章 §9中研究了随机微分方程解的最简单的例子。本章 §3、§4中研究线性系统时假定了零初始条件。本节要研究在随机输入和初始值是随机变量时线性微分方程的解。

首先回顾一下在确定性函数作为激励的情况下线性微分方程的解。

设有微分方程

$$a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=x(t) \qquad (1)$$

其中 $x(t)$ 为激励函数。又设 $y(0)$，$y^{(1)}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$ 为其初始条件。（1）式的解为

$$y(t)=y_0(t)+\int_0^t h(t,u)x(u)du \qquad (2)$$

（2）式中 $y_0(t)$ 为零输入响应，即 $y_0(t)$ 为齐次方程

$$a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=0 \qquad (3)$$

以及 $y(0)$，$y^{(1)}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$ 为系统的初始值时的解。同时根据零输入线性，$y_0(t)$ 可表示成

$$y_0(t) = y(0)z_0(t) + y^{(1)}(0)z_1(t) + \cdots + y^{(n-1)}(0)z_{(n-1)}(t) \qquad (4)$$

其中 $z_k(t)$， $k=0, 1, \cdots, (n-1)$是齐次方程(3)， 初始值为 $y^{(k)}(0)=1$，其余初始值为零时的解。

（2） 式中$\int_u^t h(t,u)x(u)du$代表系统的零状态响应，$h(t,u)$代表冲激响应，即 $h(t,u)$代表在 u时输入一个δ函数、方程(1)的零状态解。因此 $h(t,u)$ 是齐次方程(3)，初始条件为

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} h(t,u)\right]_{t=u} = \begin{cases} 0 & (k=0,1,2,\cdots,n-2) \\ \dfrac{1}{a_0(t)} & (k=n-1) \end{cases} \qquad (5)$$

的解。

下面考虑线性微分方程的激励 $x(t)$是一随机过程，初始条件$(y^{(0)}(0),\ y^{(1)}(0),\ y^{(2)}(0),\cdots,y^{(n-1)}(0))'$是一组随机变量的情况。可利用前面的结果研究其解。此时解是一随机过程

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)z_k(t) + \int_0^t h(t,u)x(u)du = y_s(t) + y_r(t) \qquad (6)$$

其中

$$y_s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)z_k(t) \qquad (7)$$

$$y_r(t) = \int_0^t h(t,u)x(u)du \qquad (8)$$

即 $y(t)$可分为两个组成部分：①$y_s(t)$代表零输入解，也称奇分量；②$y_r(t)$代表零状态解，也称规则分量。

奇分量具有确定性的性质，它的样本函数被初始值矢量$(y^{0}(0), y^{(1)}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0))^{T}$所确定。

若激励 $x(t)$是均值为$\mu_x(t)$的二阶矩随机过程，它的初始值随机矢量具有均值$(\mu_y^{(0)}\ \mu_y^{(1)}\ \cdots \mu_y^{(n-1)})^{T}$。

由于 $y(t)$是线性微分方程（1）的解，故

$$\mu_y(t)=E\{y(t)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_y^{(k)}z_k(t)+\int_0^t h(t,u)\mu_x(u)du \qquad (9)$$

如果初始值矢量和输入过程是相互统计独立的，且$\mu_a(t)=0$，则 $y(t)$的相关函数是$y_a(t)$的相关函数$E\{y_a(t_1)y_a(t_2)\}=R_{y_a}(t_1, t_2)$和 $y_r(t)$ 的相关函数 $E\{y_r(t_1)\ y_r(t_2)\}=R_{y_r}(t_1,t_2)$之和，即

$$R_y(t_1,t_2)=E\{y(t_1)y(t_2)\}=R_{y_a}(t_1,t_2)+R_{y_r}(t_1,t_2) \qquad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}R_{y_a}(t_1,t_2)&=E\{y_a(t_1)y_a(t_2)\}\\&=E\left\{\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(0)z_k(t_1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}y^{(i)}(0)z_i(t_2)\right\}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}z_k(t_1)z_i(t_2)E\{y^{(k)}(0)y^{(i)}(0)\}\\&=[z(t_1)]^{T}R_{[y(0)]}z(t_2)\text{①}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$R_{[y(0)]}=E\left\{\begin{pmatrix}y^{(0)}(0)\\y^{(1)}(0)\\\vdots\\y^{(n-1)}(0)\end{pmatrix}(y^{(0)}(0),y^{(1)}(0),\cdots,y^{(n-1)}(0))\right\} \qquad (12)$$

---

① 凡下标带[ ]者均代表矢量。

$$z(t_1)=\begin{pmatrix} z_0(t_1)\\ z_1(t_1)\\ \vdots \\ z_{(n-1)}(t_1)\end{pmatrix} \quad z(t_2)=\begin{pmatrix} z_0(t_2)\\ z_1(t_2)\\ \vdots \\ z_{(n-1)}(t_2)\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R_{y_r}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,u) \cdot h(t_2,v)R_x(u,v)\,du\,dv \tag{14}$$

如果初始值矢量是正态分布的，输入过程 x(t) 也是正态分布的，则 y(t) 也是正态过程（见第六章），此时它的分布就由 $\mu_y(t)$ 和 $R_y(t_1,t_2)$ 所确定。

例一 设图 5-26的电路中 x(t)是电路内电阻的热噪

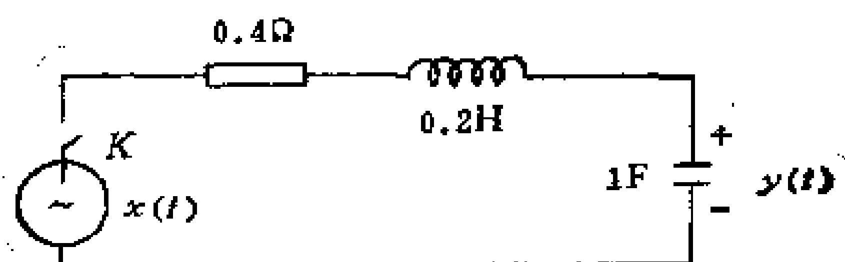


图 5-26

声，y(t)为电容C上的电压，在 t=0 时合上开关K。设 (y(0),y'(0))为正态分布随机矢量，其均值为

$$E\left\{\begin{pmatrix} y(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

其协方差为

$$C_{y(0)}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

由于C＝1F，故y(0)代表电容C上的起始电荷，y′(0)代表电容C上的初始电流。设x(t)为零均值正态过程，协方差函数为

$$R_x(t_1,t_2)=\begin{cases}\sigma_x(1-\frac{1}{\tau_0}|t_1-t_2|) & (|t_1-t_2|\leqslant\tau_0)\\ 0 & (|t_1-t_2|>\tau_0)\end{cases}$$

其中σ、τ_0为常数。求输出过程y(t)的统计特性。

解 （1）根据回路定理列出微分方程

$$y(t)+RC\frac{dy(t)}{dt}+LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)$$

即
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=5x(t)$$

其相应的齐次方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=0$$

它的一般解为

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}\qquad(t\geqslant0)$$

$$\lambda_1,\lambda_2=-1\pm j2$$

（2）$z_0(t)$、$z_1(t)$均具有$c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$的形式。

（3）求$z_0(t)$中的c_1、c_2：

$$y^{(0)}(0)=z_0(0)=1=c_1+c_2$$

$$y^{(1)}(0)=z_0'(0)=0=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2$$

故
$$c_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{j4}$$

$$c_2=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{j4}$$

$$z_0(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{j4}\right)e^{-t+j2t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j4}\right)e^{-t-j2t}$$

$$=e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) \qquad (t\geqslant 0)$$

（4）求 $z_1(t)$ 中的 c_1、c_2

$$y^{(0)}(0)=z_1(0)=0=c_1+c_2$$

$$y^{(1)}(0)=z_1'(0)=1=\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2$$

故

$$c_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{j4}$$

$$c_2=-c_1=-\frac{1}{j4}$$

$$z_1(t)=\frac{1}{j4}e^{-t+j2t}-\frac{1}{j4}e^{-t-j2t}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \qquad (t\geqslant 0)$$

（5）求冲激响应 $h(t,u)$，$0\leqslant u\leqslant t$，

$h(t,u)$为 t 的函数它满足齐次方程式，且其初始条件为

$$[h(t,u)]_{t=u}=h(u,u)=0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}h(t,u)\right]_{t=u}=1$$

这意味着 $h(t,u)=z_1(t-u) \qquad (0\leqslant u\leqslant t)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(t-u)}\sin 2(t-u) & (0\leqslant u\leqslant t)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

（6）输出 $y(t)$ 可表示为

$$y(t)=y(0)\,e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$$

$$+y'(0)\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t+\int_0^t\frac{1}{2}e^{-(t-u)}$$

$$[\sin 2(t-u)]5x(u)du \qquad (t\geq 0)$$

（7）因 $E\{x(t)\}=\mu_x(t)=0$，$E\{y(0)\}=1$，$E\{y'(0)\}=0$，故 $E\{y(t)\}=\mu_y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$

（8）根据 $y(t)-\mu_y(t)$ 求输出 $y(t)$ 中奇分量 $y_s(t)$ 的协方差函数：

$C_{ys}(t_1,t_2)$

$$=(z_0(t_1),z_1(t_1))\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0(t_2)\\ z_1(t_2)\end{pmatrix}$$

$$=\left(z_0(t_1)-\frac{1}{2}z_1(t_1),-\frac{1}{2}z_0(t_1)+z_1(t_1)\right)$$

$$\cdot\begin{pmatrix}z_0(t_2)\\ z_1(t_2)\end{pmatrix}=z_0(t_1)z_0(t_2)-\frac{1}{2}z_1(t_1)z_0(t_2)$$

$$-\frac{1}{2}z_0(t_1)z_1(t_2)+z_1(t_1)z_1(t_2)$$

$$=e^{-(t_1+t_2)}\left(\cos 2t_1+\frac{1}{2}\sin 2t_1\right)\left(\cos 2t_2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin 2t_2\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-(t_1+t_2)}\sin 2t_1$$

$$\cdot\left(\cos 2t_2+\frac{1}{2}\sin 2t_2\right)-\frac{1}{2}e^{-(t_1+t_2)}\left(\cos 2t_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin 2t_1\right)\frac{1}{2}\sin 2t_2+\frac{1}{4}e^{-(t_1+t_2)}\sin 2t_1$$

$$\cdot \sin 2t_2 = e^{-(t_1+t_2)}\left[\frac{3}{4}\cos 2t_1\cos 2t_2 + \frac{1}{2}\sin\left(2t_1 + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2t_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0)$$

当 $t_1 = t_2 = t \geqslant 0$ 时

$$\sigma^2_{y_s}(t) = e^{-2t}\left[\frac{3}{4}\cos^2 2t + \frac{1}{2}\sin^2\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

输出 $y(t)$ 中奇分量 $y_s(t)$ 的表示式为

$$y_s(t) = y(0)e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + y'(0)\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \qquad (t \geqslant 0)$$

（9） $y(t)$ 中规则分量 $y_r(t)$ 的表示式为

$$y_r(t) = \int_0^t \frac{1}{2}e^{-(t-u)}[\sin 2(t-u)]5x(u)du \quad (t \geqslant 0)$$

该分量系系统的零状态解，它完全由输入 $x(t)$ 所确定。

$$E\{y_r(t)\} = 0$$

$$R_{y_r}(t_1, t_2) = C_{y_r}(t_1, t_2)$$

$$= \frac{25}{4}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-(t_1-u)}\sin 2(t_1-u) \cdot R_x(u,v)e^{-(t_2-v)}\sin 2(t_2-v)dudv$$

其中 $$R_x(u,v) = \begin{cases}\sigma^2\left[1 - \frac{1}{\tau_0}|u-v|\right] & (|u-v| \leqslant \tau_0) \\ 0 & (|u-v| > \tau_0)\end{cases}$$

由于上述积分比较繁，现仅计算它的方差，即在上式中

使 $t_1 = t_2 = t$，则

$$R_{y_r}(t,t) = \sigma^2_{y_r}(t)$$

$$= \frac{25}{4}\int_0^t \int_0^t e^{-2t+(u+v)} \sin 2(t-u)$$

$$\cdot \sin 2(t-v) R_x(u,v)\,du\,dv$$

如果 $R_x(u,v)$ 中的常数 τ_0 远小于 t，这时它的积分区间实际

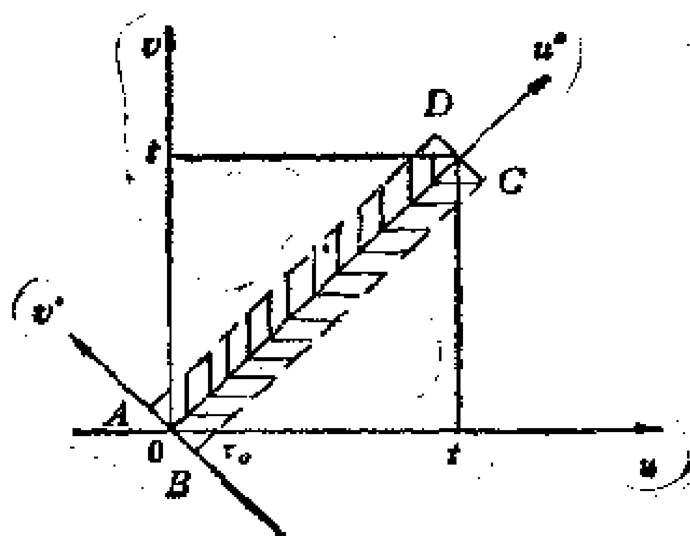


图 5-27

上就在 $u = v$ 附近的一条狭窄的条形域（图5-27中虚线所示），故这条狭窄的积分域可以用窄条矩形域ABCD所代替。进行坐标变换，把坐标轴旋转45°，即设

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-u+v) \end{cases}$$

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u'v')}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=1$$

则上述积分可以近似地表示成

$$R_{y_r}(t,t)=\sigma^2_{y_r}(t)$$

$$=\frac{25}{4}\sigma^2 e^{-2t}\int_0^{\sqrt{2}t}\int_{-\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}^{\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}u'}$$

$$\cdot\sin 2\left[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(u'+v')\right]\sin 2\left[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(u'-v')\right]$$

$$\cdot x\left[1-\frac{\sqrt{2}}{\tau_0}|v'|\right]du'dv'$$

由于假定了$\tau_0<<t$，且对v'的积分是限在$\left(-\frac{\tau_0}{\sqrt{2}},\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}\right)$之间，因此在正弦函数内可以忽略$v'$这一项，于是上述积分可化简为

$$R_{y_r}(t,t)=\sigma^2_{y_r}(t)=\frac{25}{4}\sigma^2 e^{-2t}\int_0^{\sqrt{2}t'} e^{\sqrt{2}u'}$$

$$\cdot\sin^2\left[2\left(t-\frac{u'}{\sqrt{2}}\right)\right]\int_{-\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}^{\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{\tau_0}|v'|\right]dv'du'$$

而
$$\int_{-\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}^{\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{\tau_0}|v'|\right]dv'$$

$$=2\int_0^{\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\tau_0}v'\right)dv'=\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}u'}\sin^2\left[2\left(t-\frac{u'}{\sqrt{2}}\right)\right]du'$$

$$=\int_0^{2t} e^{2t}\frac{e^{-s}}{\sqrt{2}}\sin^2 s ds$$

$$=\frac{e^{2t}}{2\sqrt{2}}\left[\frac{4}{5}-e^{-2t}\left(1-\frac{1}{5}\cos 4t+\frac{2}{5}\sin 4t\right)\right]$$

故
$$R_{y_r}(t,t)=\sigma_{y_r}^2=\frac{25}{16}\sigma^2\tau_0\left[\frac{4}{5}-e^{-2t}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1-\frac{1}{5}\cos 4t+\frac{2}{5}\sin 4t\right)\right]$$

而
$$\sigma_y^2=\sigma_{y_s}^2+\sigma_{y_r}^2$$

上面用了一个例子来说明在随机输入和初始值是随机变量时解线性微分方程的一般方法。在工程技术领域中常常采用状态变量来描述线性微分方程。采用状态变量时、它的求解步骤叙述如下：此时线性系统用下列状态方程表示之：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=a(t)x(t)+b(t)u(t)\\ y(t)=c(t)x(t) \qquad (t_0<t)\end{cases} \tag{15}$$

式中 t_0为初始时间，$x(t)$、$y(t)$、$u(t)$均为矢量函数，$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$均为时间函数的矩阵，$u(t)$为输入即激励函数，$x(t)$为线性系统的状态变量，$y(t)$为其输出。

要求解上述微分方程组，需要知道状态变量的初始值，即需要给定 $x(t_0)$。

如适当地选择系统的状态变量，任何线性微分方程均可

用(15)式表示之，因此(15)式是一个规范的表示方式。(15)式的唯一解是

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{b}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{16}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{c}(t)\mathbf{x}(t) \qquad (t\geqslant t_0)$$

(16)式中 $\boldsymbol{\phi}(t_1,t_2)$ 是零输入状态转移函数，它是一矩阵。当固定 t_2时 $t_0\leqslant t_2$，它满足下列微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\boldsymbol{\phi}(t_1,t_2)=\mathbf{a}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1,t_2) \quad (t_1\geqslant t_2) \tag{17}$$

$\phi(t_1,t_2)$的初始条件为

$$\boldsymbol{\phi}(t_1,t_2)|_{t_1=t_2}=\boldsymbol{\phi}(t_2,t_2)=\mathbf{I} \tag{18}$$

I为单位矩阵。如果输入函数 $\mathbf{u}(t)$是一矢量形式的随机过程，状态变量的初始值为一随机矢量 $\mathbf{x}(t_0)$，那么状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 和输出 $\mathbf{y}(t)$ 均为随机过程，且可用以下形式表示之：

$$\begin{cases}\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_s(t)+\mathbf{x}_r(t)\\ \mathbf{x}_s(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)\\ \mathbf{x}_r(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{b}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (t_0\leqslant t)\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_s(t)+\mathbf{y}_r(t)\\ \mathbf{y}_s(t)=\mathbf{c}(t)\mathbf{x}_s(t)\\ \mathbf{y}_r(t)=\mathbf{c}(t)\mathbf{x}_r(t)\end{cases} \tag{20}$$

(19)、(20)式中注以脚标 r的代表规则分量，注以脚标 s的代表奇分量。

设输入过程$\mathbf{u}(t)$的均值为$\boldsymbol{\mu}_{[u]}(t)$，$E\{\mathbf{x}(t_0)\}=\boldsymbol{\mu}_{[x]}(t_0)$，对(15)、(19)、(20)三式取均值，则

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\mu}}_{[x]}(t)=\mathbf{a}(t)\boldsymbol{\mu}_{[x]}(t)+\mathbf{b}(t)\boldsymbol{\mu}_{[u]}(t)\\ \boldsymbol{\mu}_{[y]}(t)=\mathbf{c}(t)\boldsymbol{\mu}_{[x]}(t)\end{cases} \tag{21}$$

(21) 式的解是

$$\mu_{[x]}(t) = \phi(t,t_0)\mu_{[x]}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)b(\tau)\mu_{[u]}(\tau)d\tau$$

$$\mu_{[y]}(t) = c(t)\mu_{[x]}(t) \qquad (t \geqslant t_0) \tag{22}$$

如果 $E\{x(t_0)\} = \mu_{[x]}(t_0) = 0$

$$\mu_{[u]}(t) = 0$$

且 $u(t)$ 和 $x(t_0)$ 是相互统计独立的，则可求出其状态变量 $x(t)$ 的相关函数、自协方差函数和方差，以及输出的相关函数。

$$R_{[x]}(t_1,t_2) = \operatorname{cov}(x(t_1)x(t_2)) = R_{[x]_r}(t_1,t_2) + R_{[x]_s}(t_1,t_2) \tag{23}$$

$$R_{[x]_s}(t_1,t_2) = \phi(t_1,t_0)\sigma^2_{[x]}(t_0)\phi^{\tau}(t_2,t_0) \tag{24}$$

其中 $\sigma^2_{[x]}(t_0) = E\{x(t_0)x^{\tau}(t_0)\}$

$$R_{[x]_\tau}(t_1,t_2) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \phi(t_1,\tau_1)b(\tau_1)R_{[u]}(\tau_1,\tau_2)b^{\tau}(\tau_2)\phi^{\tau}(t_2,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

而 $R_{[y]}(t_1 t_2) = c(t_1)R_{[x]}(t_1,t_2)c^{\tau}(t_2) \quad (t_1 \geqslant t_0,\ t_2 \geqslant t_0)$

例二 设有并联谐振电路如图5-28所示，i_N 代表噪声电

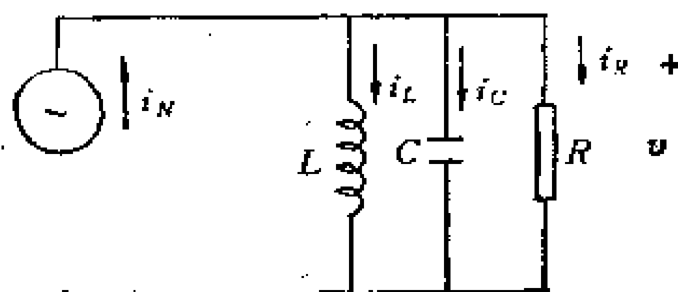


图 5-28

流，它是白噪声，其功率谱密度为 s_0，$R_{i_N}(\tau) = s_0\delta(\tau)$，其均值为零 $E\{i_N\} = 0$。若在 $t = 0$ 时电路开始工作，其初始条

件为 $i_L(0)=0$，$v(0)=0$，研究在t时 i_R 和 i_L 的统计特性。

解（1）列方程

$$v=L\frac{di_L}{dt}=i_R R$$

$$i_C=C\frac{dv}{dt}=CR\frac{di_R}{dt}$$

$$i_N=i_L+i_C+i_R$$

于是得到一组一阶线性微分方程组：

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{R}{L}i_R$$

$$\frac{di_R}{dt}=\frac{1}{CR}i_C=\frac{1}{CR}(i_N-i_L-i_R)$$

设 $\alpha=\frac{R}{L}$，$\beta=\frac{1}{CR}$，$x_1=i_L$，$x_2=i_R$，$x_1(t)$、$x_2(t)$ 为二个状态变量，$u(t)=i_N$，于是得到状态方程

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\beta & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}u(t)$$

初始条件为

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

（2）根据（16）式，状态方程的解为

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\int_0^t \phi(t,\tau)\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}u(\tau)d\tau$$

其中 $$a(t)=A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\beta & -\beta\end{pmatrix}$$

（3）求 $\phi(t,\tau)$

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -\alpha \\ \beta & s+\beta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s^2 + s\beta + \alpha\beta}\begin{pmatrix} s+\beta & \alpha \\ -\beta & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{s+\beta}{s^2+s\beta+\alpha\beta} & \dfrac{\alpha}{s^2+s\beta+\alpha\beta} \\ \dfrac{-\beta}{s^2+s\beta+\alpha\beta} & \dfrac{s}{s^2+s\beta+\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

假定 $\beta^2 - 4\alpha\beta < 0$ 或 $4\alpha > \beta$，即假定 $\frac{4R}{L} > \frac{1}{CR}$ 或 $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$，设

$$\omega = \frac{\sqrt{4\alpha\beta - \beta^2}}{2} = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{4\alpha}{\beta} - 1}$$

$$= \frac{1}{2CR}\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}$$

此时 $s^2 + s\beta + \alpha\beta = 0$ 的根为 $-\frac{\beta}{2} + j\omega$ 和 $-\frac{\beta}{2} - j\omega$，故

$$s^2 + s\beta + \alpha\beta = \left(s + \frac{\beta}{2} - j\omega\right)\left(s + \frac{\beta}{2} + j\omega\right)$$

$$= \left(s + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+\beta}{s^2+s\beta+\alpha\beta}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s + \frac{\beta}{2}}{\left(s + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2}\right.$$

$$+\frac{\frac{\beta}{2}}{\left(s+\frac{\beta}{2}\right)^{2}+\omega^{2}}\Bigg\} = e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos\omega t+\frac{\beta}{2\omega}e^{-\frac{\beta}{2}t}\sin\omega t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^{2}+s\beta+\alpha\beta}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{\left(s+\frac{\beta}{2}\right)^{2}+\omega^{2}}\right\}$$

$$=\frac{\alpha}{\omega}e^{-\frac{\beta}{2}t}\sin\omega t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-\beta}{s^{2}+s\beta+\alpha\beta}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-\beta}{\left(s+\frac{\beta}{2}\right)^{2}+\omega^{2}}\right\}$$

$$=-\frac{\beta}{\omega}e^{-\frac{\beta}{2}t}\sin\omega t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{2}+s\beta+\alpha\beta}\right\}=L^{-1}\Bigg\{\frac{s+\frac{\beta}{2}}{\left(s+\frac{\beta}{2}\right)^{2}+\omega^{2}}$$

$$-\frac{\frac{\beta}{2}}{\left(s+\frac{\beta}{2}\right)^{2}+\omega^{2}}\Bigg\}=e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos\omega t-\frac{\beta}{2\omega}e^{-\frac{\beta}{2}t}\sin\omega t$$

故 $\boldsymbol{\phi}(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\omega(t-\tau)+\frac{\beta}{2\omega}\sin\omega(t-\tau) & \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega(t-\tau)\\ -\frac{\beta}{\omega}\sin\omega(t-\tau) & \cos\omega(t-\tau)\ \frac{\beta}{2\omega}\sin\omega(t-\tau)\end{bmatrix}$$

$$\times e^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)}$$

4. $$E\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \phi(t,\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} E\{u(\tau)\}d\tau = 0$$

设 $t_2 \geqslant t_1$，则

$$\mathrm{cov}\{x(t_1), x'(t_2)\} = E\left\{\int_0^{t_1} \phi(t_1,v)\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} u(v)dv\right.$$

$$\left.\int_0^{t_2} u(\omega)(0,\beta)\phi'(t_2,\omega)\,d\omega\right\} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \phi(t_1,v)$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} s_0\delta(v-\omega)(0,\beta)\phi'(t_2,\omega)dvd\omega$$

$$= s_0\int_0^{t_1} \phi(t_1,v)\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}(0,\beta)\phi'(t_2,v)dv$$

$$= s_0\int_0^{t_1} \phi)t_1,v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}\phi'(t_2,v)dv$$

5. 设 $t_1 = t_2 = t$，得 $x(t)$ 在 t 时的方差矩阵

$$\sigma^2_{[x]}(t) = s_0\int_0^t \phi(t,v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}\phi'(t,v)dv$$

故 $$\sigma^2_{x_1}(t) = \sigma^2_{t_1}(t) = s_0\int_0^t \frac{\alpha^2\beta^2}{\omega^2}\sin^2\omega(t-v)$$

$$\cdot e^{-\beta(t-v)}dv = \frac{\alpha s_0}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta}{\omega}\right)^2 s_0\left[\frac{1}{\beta}\right.$$

$$\left.- \frac{\beta}{\beta^2+4\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{2\omega}{\beta^2+4\omega^2}\sin 2\omega t\right]e^{-\beta t}$$

$$\sigma_{x_2}^2(t)=\sigma_{1_R}^2=s_0\int_0^t\beta^2\Big[\cos\omega(t-v)$$

$$-\frac{\beta}{2\omega}\sin\omega(t-v)\Big]^2 e^{-\beta(t-v)}dv=s_0\int_0^t\beta^2\Big[\cos\omega y$$

$$-\frac{\beta}{2\omega}\ \sin\omega y\Big]^2\ e^{-\beta y}dy=\frac{s_0\beta}{2}+s_0\beta^2e^{-\beta t}$$

$$\cdot\Big\{\frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{2(\beta^2+4\omega^2)}+\frac{\beta}{2\omega}\ \frac{\beta\sin2\omega t-2\omega\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}$$

$$-\frac{\beta^2}{8\omega^2}\ \frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}-\frac{1}{2\beta}-\frac{\beta}{8\omega^2}\Big\}$$

$$E\{x_1(t)x_2(t)\}=s_0\int_0^t\frac{\alpha\beta^2}{\omega}\sin\omega(t-v)\Big[\cos\omega(t-v)$$

$$-\frac{\beta}{2\omega}\sin\omega(t-v)\Big]e^{-\beta(t-v)}dv$$

$$=\frac{\alpha\beta^2}{\omega}s_0\int_0^t\ \sin\omega y\Big[\ \cos\omega y-\ \frac{\beta}{2\omega}\ \sin\omega y\Big]e^{-\beta y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta^2}{\omega}s_0e^{-\beta t}\Big[\frac{1}{4\omega}+\frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}$$

$$-\frac{\beta\sin2\omega t+2\omega\cos2\omega t}{2(\beta^2+4\omega^2)}\Big]$$

当 $t\to\infty$ 时

$$\sigma_{[x]}^2(\infty)=\begin{pmatrix}\frac{\alpha s_0}{2} & 0\\ 0 & \frac{\beta s_0}{2}\end{pmatrix}$$

上述结果说明当系统到达稳定状态时 i_L 和 i_R 是不相关的。上述结果也给出了在 $t\to\infty$ 时 i_L 和 i_R 的方差为 $\frac{\alpha s_0}{2}$ 和 $\frac{\beta s_0}{2}$。

从上例可以看到 $\sigma^2_{[x]}(t)$ 的计算过程是十分复杂的。要计算 $\mathrm{cov}\{x(t_1), x'(t_2)\}$ 那就更加复杂了。但如果输入噪声为白噪声，我们可以采用另一种方法计算 $\sigma^2_{[x]}(t)$ 和 $R_{[x]}(t_1, t_2)$。

由（16）式

$$x(t)=\phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau \tag{25}$$

现在假定 $u(t)$ 是白噪声，即

$$E\{u(t_1)u'(t_2)\}=s_0 I\delta(t_1-t_2),\quad E\{u(t)\}=0$$

（25）式右乘以 $[u(v)]'$，其中 $v>t$，即

$$x(t)u'(v)=\phi(t,t_0)x(t_0)u'(v)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)b(\tau)u(\tau)u'(v)d\tau$$

由于假定了 $x(t_0)$ 和 $u(t)$ 是相互独立的，故

$$E\{x(t_0)u'(v)\}=E\{x(t_0)\}E\{u'(v)\}=0$$

由此

$$E\{x(t)u'(v)\}=\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)b(\tau)E\{u(\tau)u'(v)\}d\tau$$

$$=s_0\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)b(\tau)I\delta(\tau-v)d\tau=0 \tag{26}$$

（26）式说明了 $x(t)$ 与未来的输入噪声 $u(v)$ $(v>t)$ 是不相关的。

当 $v=t$ 时按照 δ 函数的定义

$$E\{x(t)u'(t)\}=\frac{S_0}{2}\phi(t,t)b(t)$$

当 $t_0\leqslant t_1\leqslant t_2$ 时

$$x(t_2)=\phi(t_2,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\phi(t_2,v)b(v)u(v)dv$$

对上式乘以 $x'(t_1)$，然后取均值得

$$E\{x(t_2)x'(t_1)\}=\phi(t_2,t_1)R_{[x]}(t_1,t_1)$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\phi(t_2,v)b(v)E\{u(v)x'(t_1)\}dv$$

由于 $v>t_1$ 时 $E\{u(v)x'(t_1)\}=0$，只有 $v=t_1$ 的一点有值，$v=t_1$ 是一个不连续点，故上式的积分部分为 0，故

$$R_{[x]}(t_2,t_1)=\phi(t_2,t_1)R_{[x]}(t_1,t_1) \tag{27}$$

因为 $R_{[x]}(t_1,t_2)=E\{x(t_1)x'(t_2)\}$

$$=[E\{x(t_2)x'(t_1)\}]'=R_{[x]}'(t_2,t_1)$$

并设 $R_{[x]}(t,t)=\sigma_{[x]}^2(t)$

则 $$R_{[x]}(t_1,t_2)=\sigma_{[x]}^2(t_1)\phi'(t_2,t_1)\quad(t_1\leqslant t_2) \tag{28}$$

反之当 $t_1\geqslant t_2$ 时

$$R_{[x]}(t_1,t_2)=\phi(t_1,t_2)\sigma_{[x]}^2(t_2) \tag{29}$$

(28)、(29) 两式说明了可以从方差出发求得相关函数。

从 (24) 式知

$$R_{[x]}(t_1,t_2)=R_{[x]_s}(t_1,t_2)+R_{[x]_t}(t_1,t_2) \tag{30}$$

$$R_{[x]_s}(t_1,t_2)=\phi(t_1,t_0)\sigma_{[x]}^2(t_0)\phi'(t_2,t_0) \tag{31}$$

$$R_{[x]_t}(t_1,t_2)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\phi(t_1,\tau_1)b(\tau_1)R_{[u]}(\tau_1,\tau_2)$$
$$\cdot b'(\tau_2)\phi'(t_2,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1$$
$$=S_0\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\phi(t_1,\tau_1)b(\tau_1)\delta(\tau_1$$
$$-\tau_2)]b'(\tau_2)\phi'(t_2,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1$$

$$= s_0 \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \phi(t_1, \tau) b(\tau) \cdot b^{\tau}(\tau) \phi^{\tau}(t_2, \tau) d\tau \tag{32}$$

故 $$R_{[X]_r}(t, t) = s_0 \int_{t_0}^{t} \phi(t, v) b(v) b^{\tau}(v) \phi^{\tau}(t, v) dv \tag{33}$$

从 (17) $$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \tau) = a(t)\phi(t, \tau) \qquad (t \geqslant \tau)$$

$$\phi(t, t) = I$$

故 $$\frac{d}{dt}R_{[X]_r}(t, t) = s_0 \phi(t, t) b(t) b^{\tau}(t) \phi^{\tau}(t, t)$$
$$+ s_0 \int_{t_0}^{t} a(t) \phi(t, v) b(v) b^{\tau}(v) \phi^{\tau}(t, v) dv$$
$$+ s_0 \int_{t_0}^{t} \phi(t, v) b(v) b^{\tau}(v) \phi^{\tau}(t, v) a^{\tau}(t) dv$$
$$= s_0 b(t) b^{\tau}(t) + a(t) R_{[X]_r}(t, t) + R_{[X]_r}(t, t) a^{\tau}(t) \tag{34}$$

在 (31) 式中设 $t_1 = t_2 = t$，则

$$R_{[X]_s}(t, t) = \phi(t, t_0) \sigma^2_{[X]}(t_0) \phi^{\tau}(t, t_0)$$

故 $$\frac{d}{dt}R_{[X]_s}(t, t) = a(t) \phi(t, t_0) \sigma^2_{[X]}(t_0) \phi^{\tau}(t, t_0)$$
$$+ \phi(t, t_0) \sigma^2_{[X]}(t_0) \phi^{\tau}(t, t_0) a^{\tau}(t)$$
$$= a(t) R_{[X]_s}(t, t) + R_{[X]_s}(t, t) a^{\tau}(t) \tag{35}$$

而 $$\sigma^2_{[X]}(t) = R_{[X]}(t, t) = R_{[X]_s}(t, t) + R_{[X]_r}(t, t)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma^2_{[X]}(t) = \frac{d}{dt}R_{[X]_s}(t, t) + \frac{d}{dt}R_{[X]_r}(t, t)$$
$$= a(t) R_{[X]_s}(t, t) + R_{[X]_s}(t, t) a^{\tau}(t)$$
$$+ s_0 b(t) b^{\tau}(t) + a(t) R_{[X]_r}(t, t) + R_{[X]_r}(t, t) a^{\tau}(t)$$
$$= a(t) \sigma^2_{[X]}(t) + \sigma^2_{[X]}(t) a^{\tau}(t) + s_0 b(t) b^{\tau}(t)$$

即
$$\frac{d}{dt}\sigma_{[X]}^{2}(t)=a(t)\sigma_{[X]}^{2}(t)+\sigma_{[X]}^{2}(t)a'(t)$$
$$+s_0 b(t)b'(t) \qquad (36)$$

(36)式给出了方差函数应该满足的微分方程，其初始条件为
$$\sigma_{[X]}^{2}(t_0)=E\{x(t_0)x'(t_0)\} \qquad (37)$$

利用(36)、(37)、(28)、(29) 式可以求出系统状态变量的相关函数。

例三 利用(36)、(37)、(28)、(29) 式求例二中状态变量的方差矩阵和其相关函数矩阵。

解 本题中
$$a(t)=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\beta & -\beta\end{pmatrix} \qquad b(t)=\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}$$

设
$$\sigma_{[X]}^{2}(t)=\begin{pmatrix}b_{11}(t) & b_{12}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t)\end{pmatrix}$$

从 (36) 式得
$$\frac{d}{dt}\sigma_{[X]}^{2}(t)=\begin{pmatrix}\dot b_{11}(t) & \dot b_{12}(t)\\ \dot b_{21}(t) & \dot b_{22}(t)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & d\\ -\beta & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}(t) & b_{12}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t)\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}b_{11}(t) & b_{12}(t)\\ b_{21}(t) & b_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\beta\\ \alpha & -\beta\end{pmatrix}+s_0\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}(0,\beta)$$

其中 $$b_{12}(t)=E\{x_1(t)x_2(t)\}=b_{21}(t)$$

其初始条件为
$$\sigma_{[X]}^{2}(0)=E\{x(0)x'(0)\}=0$$

于是
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}b_{11}(t)=2\alpha b_{12}(t)\\[2ex]\dfrac{d}{dt}b_{12}(t)=\alpha b_{22}(t)-\beta b_{11}(t)-\beta b_{12}(t)\\[2ex]\dfrac{d}{dt}b_{22}(t)=-2\beta b_{12}(t)-2\beta b_{22}(t)+s_0\beta^2\end{cases}$$

$$b_{11}(0)=0,\quad b_{12}(0)=0,\quad b_{22}(0)=0$$

解上述方程组可以获得$b_{11}(t)$、$b_{12}(t)$、$b_{22}(t)$。我们最感兴趣的是当$t\to\infty$时$\sigma_{[\dot{x}_1]}(t)$的值，即希望求得$\sigma_{[\dot{x}_1]}(t)$的稳态解。从物理上分析或从例二中用积分方法求$\sigma_{[\dot{x}_1]}(t)$的结果中知道当$t\to\infty$时$\sigma_{[\dot{x}_1]}(t)$趋于常数，因此可以使上述微分方程中的$\frac{d}{dt}b_{11}(t)$、$\frac{d}{dt}b_{12}(t)$、$\frac{d}{dt}b_{22}(t)$均为0，即可直接获得在$t\to\infty$时的$b_{11}(\infty)$、$b_{12}(\infty)$、$b_{22}(\infty)$之值，即

$$b_{12}(\infty)=0$$

$$b_{22}(\infty)=\frac{s_0\beta^2}{2\beta}=\frac{s_0\beta}{2}$$

$$b_{11}(\infty)=\frac{s_0\alpha}{2}$$

即
$$\sigma_{[\dot{x}_1]}(\infty)=\begin{pmatrix}\dfrac{s_0\alpha}{2} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{s_0\beta}{2}\end{pmatrix}$$

根据（28）式，当$t_1\to\infty$，$t_2\to\infty$，$t_2\geqslant t_1$，$t_2-t_1=\tau$时

$$R_{\dot{x}_1}(\tau)=\begin{pmatrix}\dfrac{s_0\alpha}{2} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{s_0\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega\tau+\frac{\beta}{2\omega}\sin\omega\tau & -\frac{\beta}{\omega}\sin\omega\tau\\ \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\tau & \cos\omega\tau-\frac{\beta}{2\omega}\sin\omega\tau\end{pmatrix}e^{-\frac{\beta}{2}\tau}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cos\omega\tau+\frac{\alpha\beta}{2\omega}\sin\omega\tau & -\frac{\alpha\beta}{\omega}\sin\omega\tau\\ \frac{\alpha\beta}{2\omega}\sin\omega\tau & \beta\cos\omega\tau-\frac{\beta^2}{2\omega}\sin\omega\tau\end{pmatrix}\frac{S_0}{2}e^{-\frac{\beta}{2}\tau}$$

比较例二、例三中采用的两种方法可知采用例三中使用的方法比较简单，但是在采用这种方法时输入噪声必须为白噪声，否则不能使用。

§10　线性离散时间动态系统的进一步讨论*

§6　中讨论了用单位样值响应研究离散时间动态系统。采用单位样值响应方法时利用了零状态的条件。本节将研究更一般的条件，即研究初始值不为零而是一组随机变量时的动态系统。

§9　中讨论了用状态变量法研究随机输入线性微分方程的解，本节将讨论用状态变量法研究随机输入的线性离散时间动态系统。

设$U(n)$为系统的输入，它是一离散的时间序列，$Z(n)$为系统的输出，它是一离散的时间序列。若$X(n)$代表系统的状态变量，则该线性离散时间动态系统可以表示为

$$\begin{cases} X(n+1)=a(n)X(n)+b(n)U(n) & (1a) \\ Z(n)=c(n)X(n) \quad (n=0,1,2,\cdots) & (1b) \end{cases} \quad (1)$$

其中$a(n)$、$b(n)$、$c(n)$为矩阵。采用递推法解（1）式得

$$\begin{aligned} X(n+1) &= a(n)X(n)+b(n)U(n) \\ &= a(n)[a(n-1)X(n-1)+b(n-1)u(n-1)] \\ &\quad +b(n)U(n)=a(n)a(n-1)X(n-1) \\ &\quad +a(n)b(n-1)U(n-1)+b(n)U(n)=\cdots \\ &= a(n)a(n-1)\cdots a(k)X(k) \\ &\quad +a(n)a(n-1)\cdots a(k+1)b(k)U(k) \\ &\quad +a(n)\cdots a(k+2)b(k+1)U(k+1) \\ &\quad +\cdots+a(n)b(n-1)U(n-1)+b(n)u(n) \end{aligned}$$

引入系统转移矩阵$\Phi(n,k)$

$$\Phi(n+1,k)=a(n)a(n-1)\cdots a(k) \quad (0\leqslant k\leqslant n)$$

于是

$$\Phi(n+1,k)=a(n)\Phi(n,k) \quad (2)$$

$$\Phi(n,n)=I \quad (3)$$

则

$$X(n)=\Phi(n,k)X(k)+\sum_{i=k}^{n-1}\Phi(n,i+1)b(i)U(i) \quad (4)$$

当$k=0$时

$$X(n)=\Phi(n,0)X(0)+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(n,i+1)b(i)U(i) \quad (5)$$

$X(0)$为系统状态变量的初始值，（5）式代表该系统的解，即（1）式的解。

（1b）式说明状态变量和输出的关系是一线性无记忆的变换。

现在要研究的问题是输入是随机过程、系统初始值 $X(0)$ 为随机矢量时（1）式的解。此时 $X(n)$、$Z(n)$ 均为随机矢量序列，故要计算 $X(n)$、$Z(n)$ 的一些统计特性。

如果离散时间动态系统的随机输入 $U(n)$ 为白噪声序列，它的均值 $E\{U(n)\}=0$，方差函数为 $\sigma^2_{[U]}(n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，它与系统的初始值随机矢量 $X(0)$ 是相互统计独立的，于是

$$\mu_{[x]}(n) = E\{X(n)\} = a(n-1)\mu_{[x]}(n-1)$$
$$= \Phi(n,0)\mu_{[x]}(0) \qquad (6)$$

其中 $\mu_{[x]}(0)=E\{x(0)\}$ 即初始值的均值，设

$$\tilde{X}(n) = x(n) - \mu_{[x]}(n) = \Phi(n,0)(X(0)-\mu_{[x]}(0))$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(n,i+1)b(i)U(i) \qquad (7)$$

则
$$E\{\tilde{X}(n)\}=0$$
$$\operatorname{cov}\{X(n_1)X'(n_2)\} = E\{\tilde{X}(n_1)\tilde{X}'(n_2)\} \qquad (8)$$
$$= R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)$$
$$E\{U(n)\tilde{x}'(k)\}$$
$$= E\{U(n)[\Phi(k,0)(X(0)-\mu_{[x]}(0))]'$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}U(n)[\Phi(k,i+1)b(i)U(i)]'\}$$
$$=0 \qquad (0\leqslant k\leqslant n) \qquad (9)$$

现利用（9）式求方差函数 $\sigma^2_{[\tilde{x}]}(n)$ 的递推公式：

$$\sigma^2_{[\tilde{x}]}(n) = E\{\tilde{X}(n)\tilde{X}'(n)\} = E\{[a(n-1)\tilde{X}(n-1)$$
$$+b(n-1)U(n-1)][a(n-1)\tilde{X}(n-1)$$
$$+b(n-1)U(n-1)]'\}$$
$$= a(n-1)E\{\tilde{X}(n-1)\tilde{X}'(n-1)\}a'(n-1)$$
$$+a(n-1)E\{\tilde{X}(n-1)U'(n-1)\}b'(n-1)$$

$$+b(n-1)E\{U(n-1)\tilde{X}'(n-1)\}a'(n-1)$$

$$+b(n-1)E\{U(n-1)U'(n-1)\}b'(n-1)$$

$$=a(n-1)\sigma^2_{[x]}(n-1)a'(n-1)$$

$$+b(n-1)\sigma^2_{[U]}(n-1)b'(n-1)$$

即

$$\sigma^2_{[x]}(n)=a(n-1)\sigma^2_{[x]}(n-1)a'(n-1)$$

$$+b(n-1)\sigma^2_{[U]}(n-1)b'(n-1) \quad (10)$$

而初始条件为

$$\sigma^2_{[x]}(0)=E\{[X(0)-\mu_{[x]}(0)][X(0)-\mu_{[x]}(0)]'\} \quad (11)$$

上式中$\sigma^2_{[x]}(0)$代表状态变量方差矩阵的初始值。通过递推公式(10)可以求得任何时刻状态变量的方差函数。而状态变量的协方差函数矩阵为

$$\operatorname{cov}\{X(n_1)X'(n_2)\}$$

$$=E\{\tilde{X}(n_1)\tilde{X}'(n_2)\}=R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)$$

若$0\leqslant n_2<n_1$，则上式为

$$R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)=E\{\Phi(n_1,n_2)\tilde{X}(n_2)\tilde{X}'(n_2)$$

$$+\sum_{i=n_2}^{n_1-1}\Phi(n_1,i+1)b(i)U(i)\tilde{X}'(n_2)\}$$

$$=\Phi(n_1,n_2)\sigma^2_{[x]}(n_2)$$

$$+\sum_{i=n_2}^{n_1-1}\Phi(n_1,i+1)b(i)E\{U(i)\tilde{X}'(n_2)\}$$

根据(9)式，上式中第二项为0，故当$0\leqslant n_2<n_1$时

$$R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)=\Phi(n_1,n_2)\sigma^2_{[x]}(n_2) \quad (12)$$

因此，知道了方差矩阵后，利用（12）式可得到状态变量的协方差函数矩阵。

根据（1b）式可得

$$E\{Z(n)\}=\mu_{[Z]}(n)=c(n)E\{X(n)\}$$
$$=c(n)\mu_{[X]}(n) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{13}$$
$$R_{[Z]}(n_1,n_2)=c(n_1)R_{[X]}(n_1,n_2)c'(n_2)$$
$$(n_1,n_2=0,1,2,\cdots) \tag{14}$$
$$R_{[ZX]}(n_1,n_2)=c(n_1)R_{[X]}(n_1,n_2)$$
$$(n_1,n_2=0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

利用(13)、(14)式可求输出过程的统计特性，利用(15)式可求输出状态变量间的互关函数。注意(9)—(15)式的推导过程利用了输入为白噪声序列的条件，只有在白噪声序列的条件下(9)—(15)式的结果才是正确的。

例 设有图 5-29 所示的电路。图中$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$为状态变

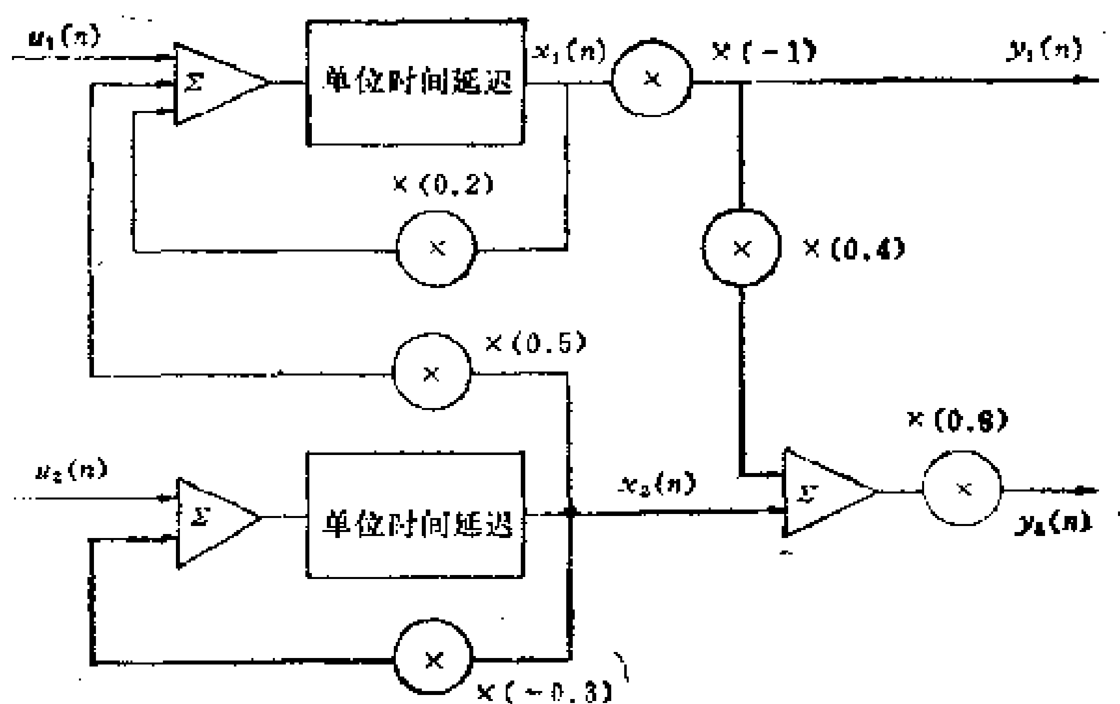


图 5-29

量，它的初始值是正态分布的随机矢量，均值为 0 ，即 $E\left\{\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}\right\}=0$，它的方差矩阵为$\sigma_{[x]}^2(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；输入随机序列为$U(n)=\begin{pmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\end{pmatrix}$，$n=0,1,2,\cdots$，它是一平稳白噪声序列，其方差函数矩阵为

$$\sigma_{[u]}^2(n)=\begin{pmatrix}1.2&0.7\\0.7&0.8\end{pmatrix}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

噪声均值$E\{U(n)\}=0$。求状态变量的协方差函数矩阵和输出过程的协方差函数矩阵。

解（1）根据图 5-29 所示的电路列出状态方程

$$\begin{cases}x_1(n+1)=0.2x_1(n)+0.5x_2(n)+u_1(n)\\x_2(n+1)=-0.3x_2(n)+u_2(n)\\y_1(n)=-x_1(n)\\y_2(n)=0.6[-0.4x_1(n)+x_2(n)]\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1(n+1)\\x_2(n+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2&0.5\\0&-0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1(n)\\y_2(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-0.24&0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\end{pmatrix}$$

故
$$a(n)=\begin{pmatrix}0.2&0.5\\0&-0.3\end{pmatrix}\quad b(n)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

（2）根据（10）式得状态变量方差函数的递推公式

$$\sigma_{[x]}^2(n+1)=\begin{pmatrix}0.2&0.5\\0&-0.3\end{pmatrix}\sigma_{[x]}^2(n)\begin{pmatrix}0.2&0\\0.5&-0.3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.2&0.7\\0.7&0.8\end{pmatrix}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

而
$$\sigma^2_{[x]}(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以
$$\sigma^2_{[x]}(1)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0.5 & -0.3\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1.2 & 0.7\\ 0.7 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.45 & 0.55\\ 0.55 & 0.89\end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{[x]}(2)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.45 & 0.55\\ 0.55 & 0.89\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0.5 & -0.3\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1.2 & 0.7\\ 0.7 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.59 & 0.53\\ 0.53 & 0.88\end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{[x]}(3)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.59 & 0.53\\ 0.53 & 0.88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0.5 & -0.3\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1.2 & 0.7\\ 0.7 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.59 & 0.54\\ 0.54 & 0.88\end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{[x]}(4)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.59 & 0.54\\ 0.54 & 0.88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0.5 & -0.3\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1.2 & 0.7\\ 0.7 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.59 & 0.54\\ 0.54 & 0.88\end{pmatrix}$$

（3）得到了状态变量方差矩阵的序列后再利用（12）式可算出状态变量的协方差函数矩阵

$$R_{[x]}(n_1,n_2)=\Phi(n_1,n_2)\sigma^2_{[x]}(n_2)\qquad(n_1>n_2\geqslant 0)$$

在本例中状态转移矩阵$\Phi(n,k)$为矩阵$a(n)$的$(n-k)$次自乘，即

$$\Phi(n,k)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0 & -0.3\end{pmatrix}^{n-k}\qquad(0\leqslant k<n)$$

下面首先计算矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \gamma\end{pmatrix}^m = \mathbf{A}^m \qquad (\alpha \neq \gamma)$$

$\mathbf{A}$ 矩阵的特征根为下列特征方程的解

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)=0$$

其特征根为 $\lambda=\alpha$，γ。当 $\lambda=\alpha$时其特征矢量为$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，当

$\lambda=\gamma$时其特征矢 量为$\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\\ 1\end{pmatrix}$，故

$$\mathbf{A}^m=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^m & 0\\ 0 & \gamma^m\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^m & \beta\dfrac{\alpha^m-\gamma^m}{\alpha-\gamma}\\ 0 & \gamma^m\end{pmatrix}$$

因此 $\mathbf{R}_{[\tilde{x}]}(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)=\begin{pmatrix}\alpha^{n_1-n_2} & \beta\dfrac{\alpha^{n_1-n_2}-\gamma^{n_1-n_2}}{\alpha-\gamma}\\ 0 & \gamma^{n_1-n_2}\end{pmatrix}\sigma^2_{[\tilde{x}]}(\mathbf{n}_2)$

$$=\begin{pmatrix}0.2^{n_1-n_2} & 0.5\dfrac{(0.2)^{n_1-n_2}-(-0.3)^{n_1-n_2}}{0.2-(-0.3)}\\ 0 & (-0.3)^{n_1-n_2}\end{pmatrix}\sigma^2_{[\tilde{x}]}(n_2)$$

如 $n_1=5$，$n_2=2$，则

$$\mathbf{R}_{[\tilde{x}]}(5,2)=\begin{pmatrix}0.2^3 & (0.2)^3-(-0.3)^3\\ 0 & (-0.3)^3\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1.59 & 0.53\\ 0.53 & 0.88\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.03 & 0.04\\ -0.01 & -0.02\end{pmatrix}$$

（4）输出过程 Y(n)的均值为

$$E\left\{\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}\right\}=0$$

输出过程 Y(n)的协方差函数矩阵为

$$R_{[y]}(n_1,n_2)=c(n_1)R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)c^*(n_2)$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0.24 & 0.6 \end{pmatrix} R_{[\tilde{x}]}(n_1,n_2)\begin{pmatrix} -1 & -0.24 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$R_{[y]}(5,2)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0.24 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.03 & 0.04 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} -1 & -0.24 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.03 & -0.017 \\ 0.013 & -0.01 \end{pmatrix}$$

§11 窄带随机过程的表示方法

（一）首先回顾一下确定性的窄带信号。

一个确定性信号 x(t)的频谱是

$$F(jf)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

如果此频谱 F(jf)只有在窄的频率范围内异于 0，这异于零的频带的中心位置在 $\pm f_0$，频谱分量异于零的带宽为 Δf，且 $\Delta f \ll f_0$，则满足上述这些条件的信号称为窄带信号。窄带信号的典型频谱如图 5-30 所示。如果在示波器上观察这种窄带信号，它的波形或多或少地有点像正弦波，但是它的振幅是一个慢变化的时间函数，它的相位也是一个慢变化的时间函数。图 5-31 显示了典型的窄带信号在示波器上的波形图。

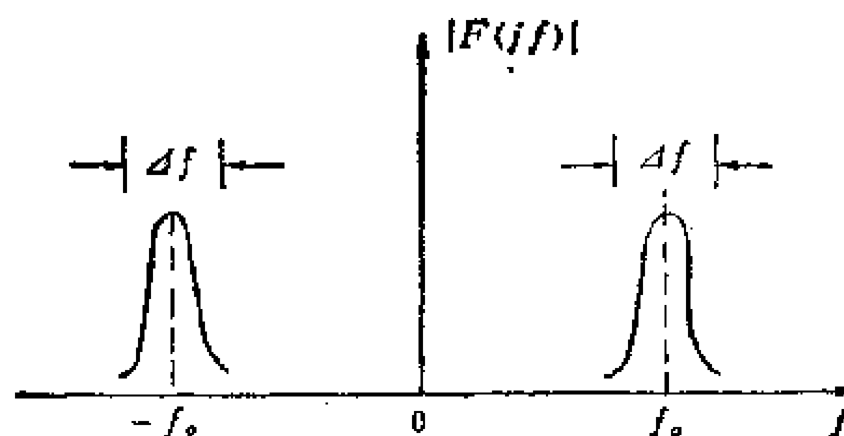


图 5-30

这类窄带信号x(t)可以表示为

$$x(t)=v(t)\cos(\omega_0 t+\phi(t)) \quad (1)$$

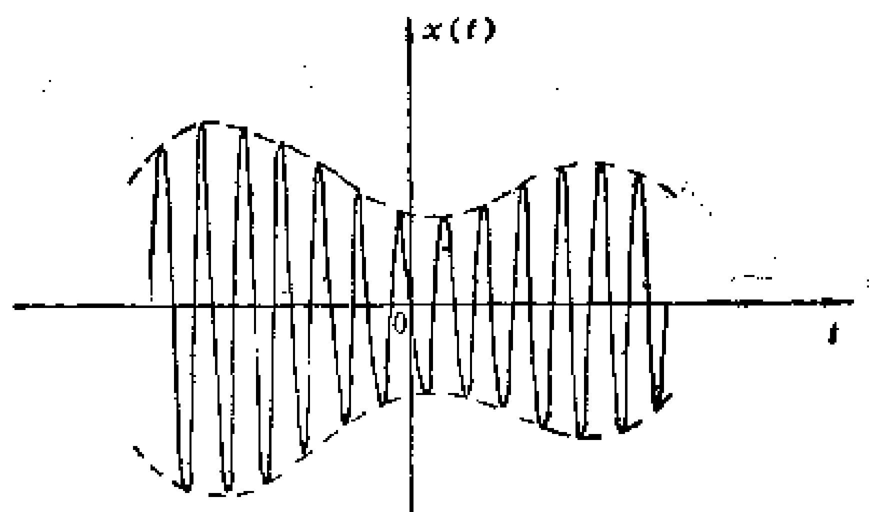


图 5-31

式中 v(t)是慢变化的时间函数，称为包络函数，它是非负的；$\phi(t)$是慢变化的时间函数，它代表相位函数，$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$为 x(t)的频谱中心位置，称为载频。这里所谓"慢变化"

指的是它对时间的变化比 $\cos\omega_0 t$ 对时间的变化要缓慢得多。把窄带信号送入包络检波器，则它的输出波形是输入信号的包络 $v(t)$。如果把窄带信号送入理想带通限幅器，则它的输出为 $\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]$，见图5-32。

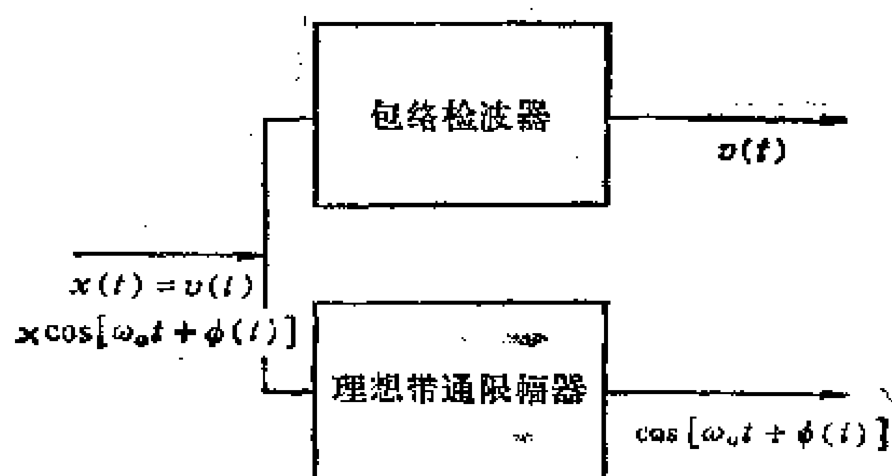


图 5-32

展开（1）式得

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)] \\
&= v(t)\cos\phi(t)\cos\omega_0 t - v(t)\sin\phi(t)\sin\omega_0 t \\
&= x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式中

$$x_c(t) \triangleq v(t)\cos\phi(t) \qquad (3)$$

$$x_s(t) \triangleq v(t)\sin\phi(t) \qquad (4)$$

$x_c(t)$称为 $x(t)$的余弦分量，$x_s(t)$称为 $x(t)$ 的正弦分量。从(3)、(4)两式可得

$$v(t)=\sqrt{x_c^2(t)+x_s^2(t)} \qquad (5)$$

$$\phi(t)=\tan^{-1}\frac{x_s(t)}{x_c(t)} \qquad (6)$$

采用图 5-33所示的方块图可以获得 $x_c(t)$、$x_s(t)$两个

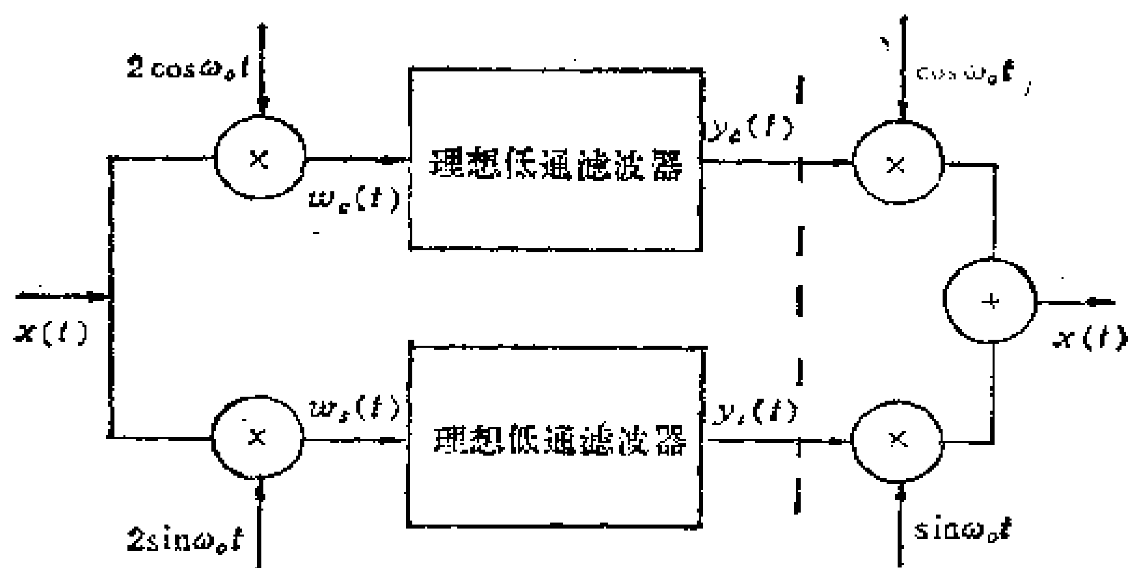


图 5-33

分量，因此 $x_c(t)$、$x_s(t)$是有实际意义的。以$2\cos\omega_0 t$和$x(t)$相乘得

$$
\begin{aligned}
w_c(t) &= x(t)2\cos\omega_0 t \\
&= v(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]2\cos\omega_0 t \\
&= v(t)\cos\phi(t)+v(t)\cos[2\omega_0 t+\phi(t)] \\
&= x_c(t)+v(t)\cos[2\omega_0 t+\phi(t)] \qquad (7)
\end{aligned}
$$

由于 $x_c(t)=v(t)\cos\phi(t)$，$v(t)$、$\phi(t)$均为慢变化的时间函数，$x_c(t)$也是慢变化的时间函数。乘法器输出 $w_c(t)$有二个分量，一个分量是中心频率为$2f_0$的窄带信号，一个分量即为 $x_c(t)$。如把乘法器的输出送到一低通滤波器，则它的输出就只有一个低频分量 $y_c(t)=x_c(t)$。

同理，用 $2\sin\omega_0 t$和 $x(t)$相乘得

$$
\begin{aligned}
w_s(t) &= x(t)2\sin\omega_0 t \\
&= v(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]2\sin\omega_0 t \\
&= -v(t)\sin\phi(t)+v(t)\sin[2\omega_0 t+\phi(t)]
\end{aligned}
$$

$$= -x_s(t) + v(t)\sin[2\omega_0 t + \phi(t)] \qquad (8)$$

即乘法器的输出 $w_s(t)$ 包括两个分量，一个为低频分量 $[-x_s(t)]$，另一个为中心频率是 $2f_c$ 的窄带信号。如果把 $w_s(t)$ 送入一低通滤波器，则得输出为 $y_s(t) = -x_s(t)$。

图 5-33中虚线的右部代表从 $y_c(t)$、$y_s(t)$ 恢复为 $x(t)$ 的原理图，它由两个相乘器和一个相加器组成。

（二）窄带实平稳随机信号的表示方法

上面讨论了确定性的窄带信号可以用(2)式表示之。现在的问题是对于窄带实平稳随机信号是否能用相类似的表示方法。

窄带实平稳随机信号的**定义** 一个实平稳随机过程的功率谱密度 $S(f)$ 限于 $f_0 - f_c < |f| < f_0 + f_c$ 之内，在这个频率范围以外它的功率谱密度为零，称它为窄带实平稳随机信号，称 f_0 为它的中心频率，$2f_c$ 为它的带宽。

图 5-34给出了窄带实平稳随机过程的功率谱密度图。

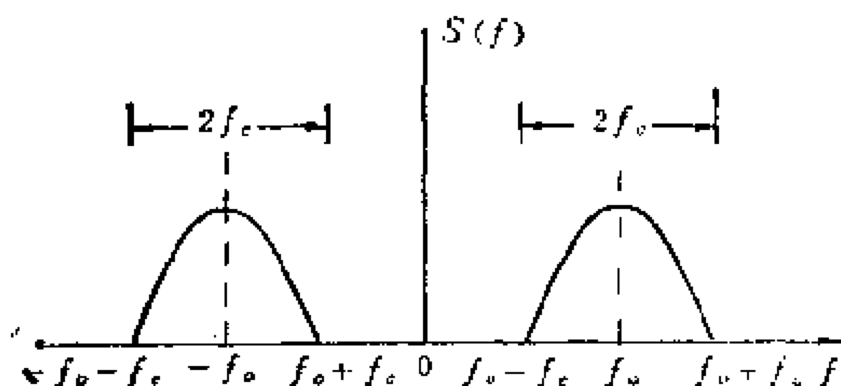


图 5-34

定理 若 $\xi(t)$ 是窄带实平稳随机过程，它的功率谱密度为 $S_\xi(f)$，在频率范围 $f_0 - f_c < |f| < f_0 + f_c$ 内，$S_\xi(f)$ 异于

零，在其他频率 $S_\xi(f)=0$，则 $\xi(t)$ 可以表示为

$$\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_0 t+x_s(t)\sin 2\pi f_0 t \quad (9)$$

其中 $x_c(t)$、$x_s(t)$ 均为宽平稳随机过程，且

$$S_{x_s}(f)=S_{x_c}(f)=\begin{cases}S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0) & (|f|<f_c)\\ 0 & (|f|>f_c)\end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}S_{x_cx_s}(f)&=-S_{x_sx_c}(f)\\&=\begin{cases}j[S_\xi(f-f_0)-S_\xi(f+f_0)] & (|f|<f_c)\\ 0 & (|f|>f_c)\end{cases}\end{aligned} \quad (11)$$

（注意：$R_{x_cx_s}(\tau)$ 并没有非负定性，$S_{x_cx_s}(f)$ 不一定为非负的），并且

$$E\{[\xi(t)]^2\}=E\{[x_c(t)]^2\}=E\{[x_s(t)]^2\} \quad (12)$$

证 ①设有一随机过程 $\eta(t)$，它的功率谱密度 $S_\eta(f)$ 为

$$S_\eta(f)=\begin{cases}4S_\xi(f) & (f>0)\\ 0 & (f<0)\end{cases}$$

即

$$S_\eta(f)=4S_\xi(f)U(f) \quad (13)$$

$U(f)$ 为阶跃函数。(13) 式代表了一个线性系统 $H_1(jf)$ 输入和输出间的功率谱密度间的关系式。该线性系统的转移函数 $H_1(jf)$ 为

$$H_1(jf)=2U(f)=1+\operatorname{sgn} f \quad (14)$$

其中 sgnf 代表频率的符号函数，即

$$\operatorname{sgn} f=\begin{cases}+1 & (f>0)\\ -1 & (f<0)\end{cases}$$

既然 $\eta(t)$ 可以视为线性系统 $H_1(jf)$ 的输出，而 $H_1(jf)$ 又可表示成(14)式，则 $\eta(t)$ 可以表示成

$$\eta(t)=\xi(t)+j\hat{\xi}(t) \quad (15)$$

从(14)、(15)式可知，$\hat{\xi}(t)$ 可定义为：如果一线性系统的转

移函数 $H(jf)=-j\mathrm{sgn}f$，输入为$\xi(t)$，则它的输出为$\hat{\xi}(t)$。

线性系统的转移函数为 $H(jf)=-j\mathrm{sgn}f$时，它相应的冲激响应为$h(t)=\frac{1}{\pi t}$。因此

$$\hat{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)\xi(u)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(u)}{t-u}du=\frac{1}{\pi t}*\xi(t) \tag{16}$$

即$\hat{\xi}(t)$为$\xi(t)$的希尔伯特变换。(15)式所表示的$\eta(t)$称为与$\xi(t)$相连系的解析信号。图 5-35给出了$H_1(jf)$的框图。

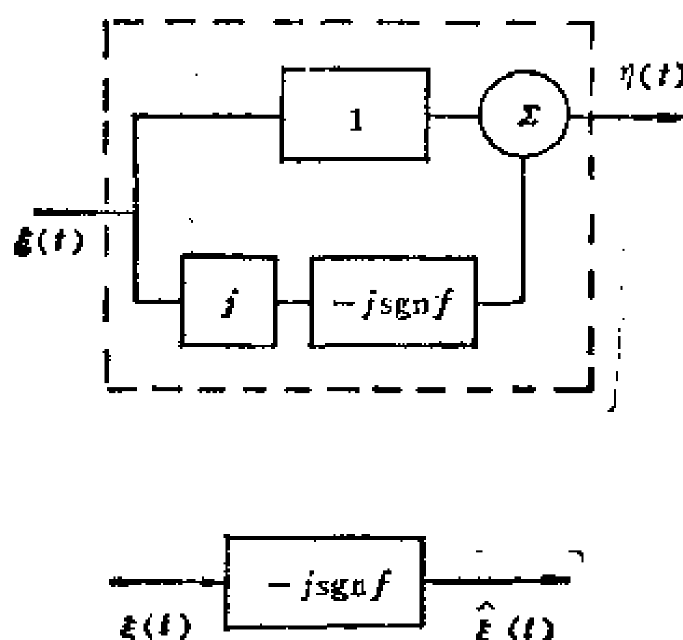


图 5-35

② 如果系统的转移函数为 $H(jf)=-j\mathrm{sgn}\,f$，则输入输出间的关系是一对希尔伯特变换。因为

$$|H(jf)|^2=|-j\mathrm{sgn}\,f|^2=1$$

故
$$S_{\hat{\xi}}(f)=|H(jf)|^2S_{\xi}(f)=S_{\xi}(f)$$

于是 $$R_{\hat{\xi}}(\tau)=R_{\xi}(\tau) \tag{17}$$

根据本章§5.(93)、(89)式得

$$S_{\hat{\xi}\xi}(f)=-j\mathrm{sgn}f\cdot S_{\xi}(f) \tag{18}$$

$$S_{\xi\hat{\xi}}(f)=\overline{S_{\hat{\xi}\xi}(f)}=j\mathrm{sgn}\,f\cdot S_{\xi}(f) \tag{19}$$

于是 $$-S_{\hat{\xi}\xi}(f)=S_{\xi\hat{\xi}}(f) \tag{20}$$

$$-R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)=R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \tag{21}$$

③ 用 $e^{-j2\pi f_0t}$ 和 $\eta(t)$ 相乘得

$$\begin{aligned}
&\eta(t)e^{-j2\pi f_0t}\\
&=[\xi(t)+j\hat{\xi}(t)][\cos2\pi f_0t-j\sin2\pi f_0t]\\
&=[\xi(t)\cos2\pi f_0t+\hat{\xi}(t)\sin2\pi f_0t]\\
&\quad+j[-\xi(t)\sin2\pi f_0t+\hat{\xi}(t)\cos2\pi f_0t]\\
&=x_c(t)-jx_s(t)
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $$x_c(t)=\xi(t)\cos2\pi f_0t+\hat{\xi}(t)\sin2\pi f_0t \tag{23}$$

$$x_s(t)=\xi(t)\sin2\pi f_0t-\hat{\xi}(t)\cos2\pi f_0t \tag{24}$$

故 $$\xi(t)=x_c(t)\cos2\pi f_0t+x_s(t)\sin2\pi f_0t \tag{25}$$

$$\hat{\xi}(t)=x_c(t)\sin2\pi f_0t-x_s(t)\cos2\pi f_0t \tag{26}$$

④ 研究 $x_c(t)$、$x_s(t)$ 的性质

$$\begin{aligned}
R_{x_c}(t_1,t_2)&=E\{x_c(t_1)x_c(t_2)\}\\
&=E\{[\xi(t_1)\cos2\pi f_0t_1+\hat{\xi}(t_1)\sin2\pi f_0t_1]\\
&\quad\cdot[\xi(t_2)\cos2\pi f_0t_2+\hat{\xi}(t_2)\sin2\pi f_0t_2]\}\\
&=R_{\xi}(t_1,t_2)\cos2\pi f_0t_1\cos2\pi f_0t_2\\
&\quad+R_{\hat{\xi}}(t_1,t_2)\sin2\pi f_0t_1\sin2\pi f_0t_2\\
&\quad R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cos2\pi f_0t_1\sin2\pi f_0t_2
\end{aligned}$$

$$+R_{\hat{\xi}\xi}(t_1,t_2)\sin 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$

$$=R_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$

$$+R_{\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2$$

$$R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2$$

$$+R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$

$$=R_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 (t_1-t_2)$$

$$-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f(t_1-t_2)=R_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 \tau$$

$$-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau \tag{27}$$

其中$\tau=t_1-t_2$。(27)式的证明过程中利用了$\xi(t)$的平稳性以及（17）和（21）式。(27）式说明了$R_{x_c}(t_1,t_2)$仅是$\tau=t_1-t_2$的函数，即$R_{x_c}(t_1,t_2)=R_{x_c}(\tau)$。

由于$\xi(t)$的功率谱密度内无直流分量，说明$E\{\xi(t)\}=0$，因此$E\{\hat{\xi}(t)\}=0$。根据（23）式$E\{x_c(t)\}=0$，所以$x_c(t)$也是平稳随机过程。

同理 $R_{x_s}(t_1,t_2)=E\{x_s(t_1)x_s(t_2)\}$

$$=E\{[\xi(t_1)\sin 2\pi f_0 t_1-\hat{\xi}(t_1)\cos 2\pi f_0 t_1]$$

$$\cdot[\xi(t_2)\sin 2\pi f_0 t_2-\hat{\xi}(t_2)\cos 2\pi f_0 t_2]\}$$

$$=R_{\xi}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2$$

$$+R_{\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$

$$-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$

$$-R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2$$

$$=R_{\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 \tau - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau$$

$$=R_{x_s}(\tau) \tag{28}$$

（28）式说明$R_{x_s}(t_1,t_2)$仅是$\tau=t_1-t_2$的函数，即$R_{x_s}(t_1,t_2)=R_{x_s}(\tau)$，且$R_{x_s}(\tau)=R_{x_c}(\tau)$。又因$E\{x_s(t)\}=0$，所以$x_s(t)$也是平稳随机过程。

取(27)、(28)式的付氏变换得

$$S_{x_c}(f)=S_{x_s}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{x_c}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[R_\xi(\tau)\cos2\pi f_0\tau$$

$$-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin2\pi f_0\tau]e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[R_\xi(\tau)e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}$$

$$+R_\xi(\tau)e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}]d\tau$$

$$-\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}[R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}$$

$$-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}[S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)]$$

$$-\frac{1}{2j}[j\text{sgn}(f-f_0)S_\xi(f-f_0)$$

$$-j\text{sgn}(f+f_0)S_\xi(f+f_0)]$$

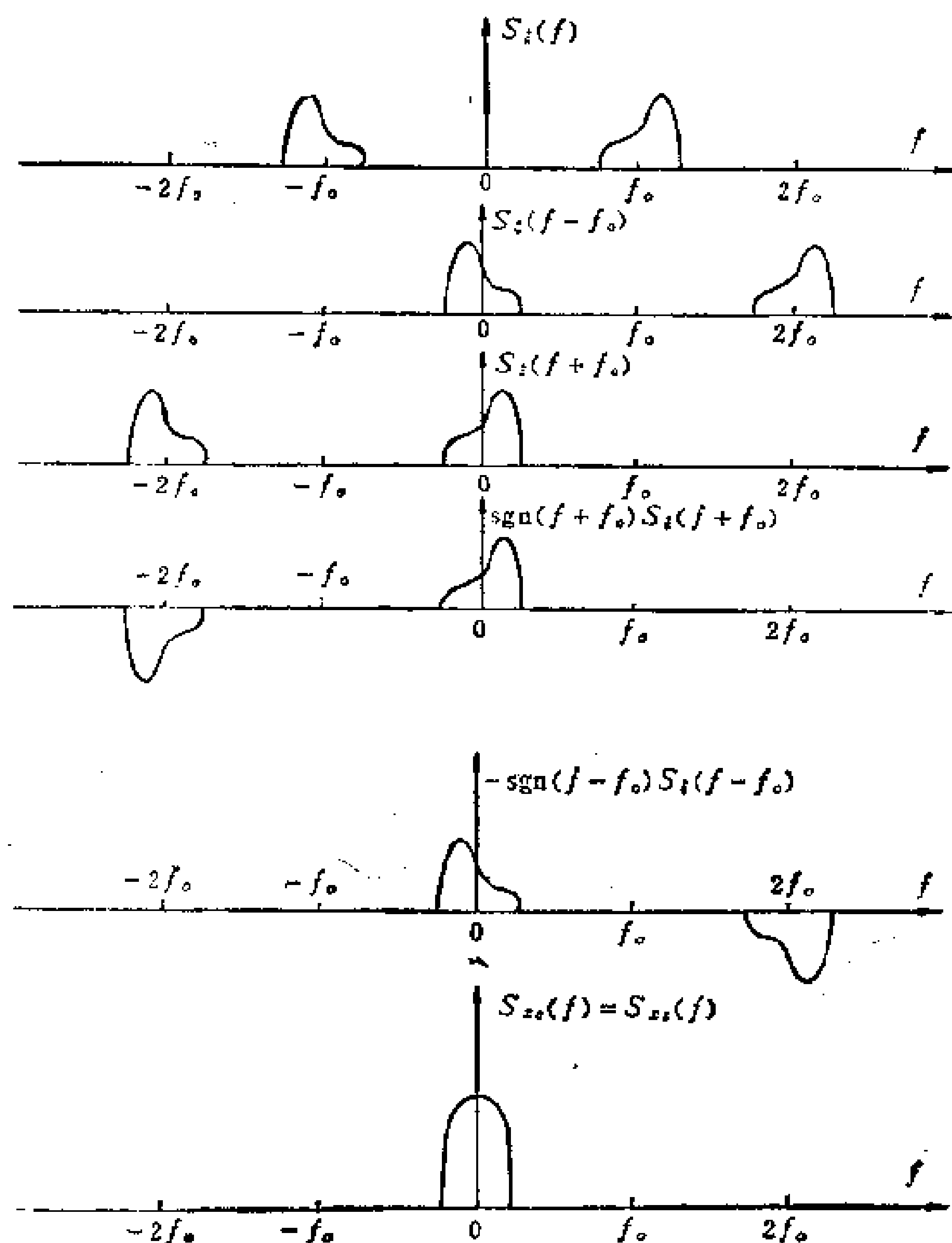
$$=\frac{1}{2}[S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)]$$

$$+\frac{1}{2}[\text{sgn}(f+f_0)S_\xi(f+f_0)$$

$$-\text{sgn}(f-f_0)S_\xi(f-f_0)] \qquad (29)$$

根据(29)式画出 $S_{x_c}(f)=S_{x_s}(f)$及其各个分量，见图5-36。根据图解分析可知 $x_c(t)$、$x_s(t)$的功率谱密度函数$S_{x_c}(f)$、$S_{x_s}(f)$集中在$|f|<f_c$，故 $x_c(t)$、$x_s(t)$是一低频的平稳随机过程。(29) 式可改写为

$$S_{x_c}(f)=S_{x_s}(f)$$



$S_t(f)$
$-2f_0$
$-f_0$
0
f_0
$2f_0$
f
$S_t(f-f_0)$
$S_t(f+f_0)$
$\mathrm{sgn}(f+f_0)S_t(f+f_0)$
$-\mathrm{sgn}(f-f_0)S_t(f-f_0)$
$S_{xs}(f)=S_{xs}(f)$

图 5-36

$$
= \begin{cases} S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0) & (|f|<f_c) \\ 0 & (\text{其他频率}) \end{cases} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_s}(t_1,t_2) &= E\{x_c(t_1)x_s(t_2)\} \\
&= E\{[\xi(t_1)\cos 2\pi f_0 t_1 + \hat{\xi}(t_1)\sin 2\pi f_0 t_1] \\
&\quad \cdot [\xi(t_2)\sin 2\pi f_0 t_2 - \hat{\xi}(t_2)\cos 2\pi f_0 t_2]\} \\
&= R_\xi(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad - R_{\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad + R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2 \\
&= -R_\xi(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 \tau \\
&= R_{x_c x_s}(\tau)
\end{aligned} \tag{31}
$$

(31) 式说明了 $R_{x_c x_s}(t_1,t_2)$ 仅是 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数，即 $R_{x_c x_s}(t_1,t_2) = R_{x_c x_s}(\tau)$。

同理

$$
\begin{aligned}
R_{x_s x_c}(t_1,t_2) &= E\{x_s(t_1)x_c(t_2)\} \\
&= E\{[\xi(t_1)\sin 2\pi f_0 t_1 - \hat{\xi}(t_1)\cos 2\pi f_0 t_1] \\
&\quad \cdot [\xi(t_2)\cos 2\pi f_0 t_2 + \hat{\xi}(t_2)\sin 2\pi f_0 t_2]\} \\
&= R_\xi(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad - R_{\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad + R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\sin 2\pi f_0 t_1 \sin 2\pi f_0 t_2 \\
&\quad - R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)\cos 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2 \\
&= R_\xi(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau + R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0 \tau \\
&= R_{x_s x_c}(\tau)
\end{aligned} \tag{32}
$$

(32) 式说明了 $R_{x_s x_c}(t_1,t_2)$ 仅是 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数，即 $R_{x_s x_c}(t_1,t_2) = R_{x_s x_c}(\tau)$。根据(31)、(32)式知

$$
R_{x_c x_s}(\tau) = -R_{x_s x_c}(\tau) \tag{33}
$$

$x_c(t)$，$x_s(t)$不仅是平稳随机过程，而且也是联合平稳的。

对(31)、(32)式取傅氏变换得

$$S_{x_c x_s}(f) = -S_{x_s x_c}(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_c x_s}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} [R_\xi(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

$$+ R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cos 2\pi f_0\tau] e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= -\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} [R_\xi(\tau) e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}$$

$$- R_\xi(\tau) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}] d\tau$$

$$- \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}$$

$$+ R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} j[S_\xi(f-f_0) - S_\xi(f+f_0)]$$

$$- \frac{1}{2}[j\mathrm{sgn}(f-f_0) S_\xi(f-f_0)$$

$$+ j\mathrm{sgn}(f+f_0) S_\xi(f+f_0)]$$

$$= \frac{1}{2} j[S_\xi(f-f_0) - S_\xi(f+f_0)$$

$$- \mathrm{sgn}(f-f_0) S_\xi(f-f_0)$$

$$- \mathrm{sgn}(f+f_0) S_\xi(f+f_0)] \tag{34}$$

图5-37中画出了$S_\xi(f)$、$S_\xi(f-f_0)$、$-S_\xi(f+f_0)$、$-\mathrm{sgn}(f-f_0)S_\xi(f-f_0)$、$-\mathrm{sgn}(f+f_0)S_\xi(f+f_0)$和$S_{x_c x_s}(f)/j$。根据图解分析可知互谱密度$S_{x_c x_s}(f)$集中在$|f|<f_c$。(34)式可以改写为

$$S_{x_c x_s}(f) = -S_{x_s x_c}(f)$$

$$
=\begin{cases} j[S_\xi(f-f_0)-S_\xi(f+f_0)] & (|f|<f_c) \\ 0 & (|f|>f_c) \end{cases} \qquad (35)
$$

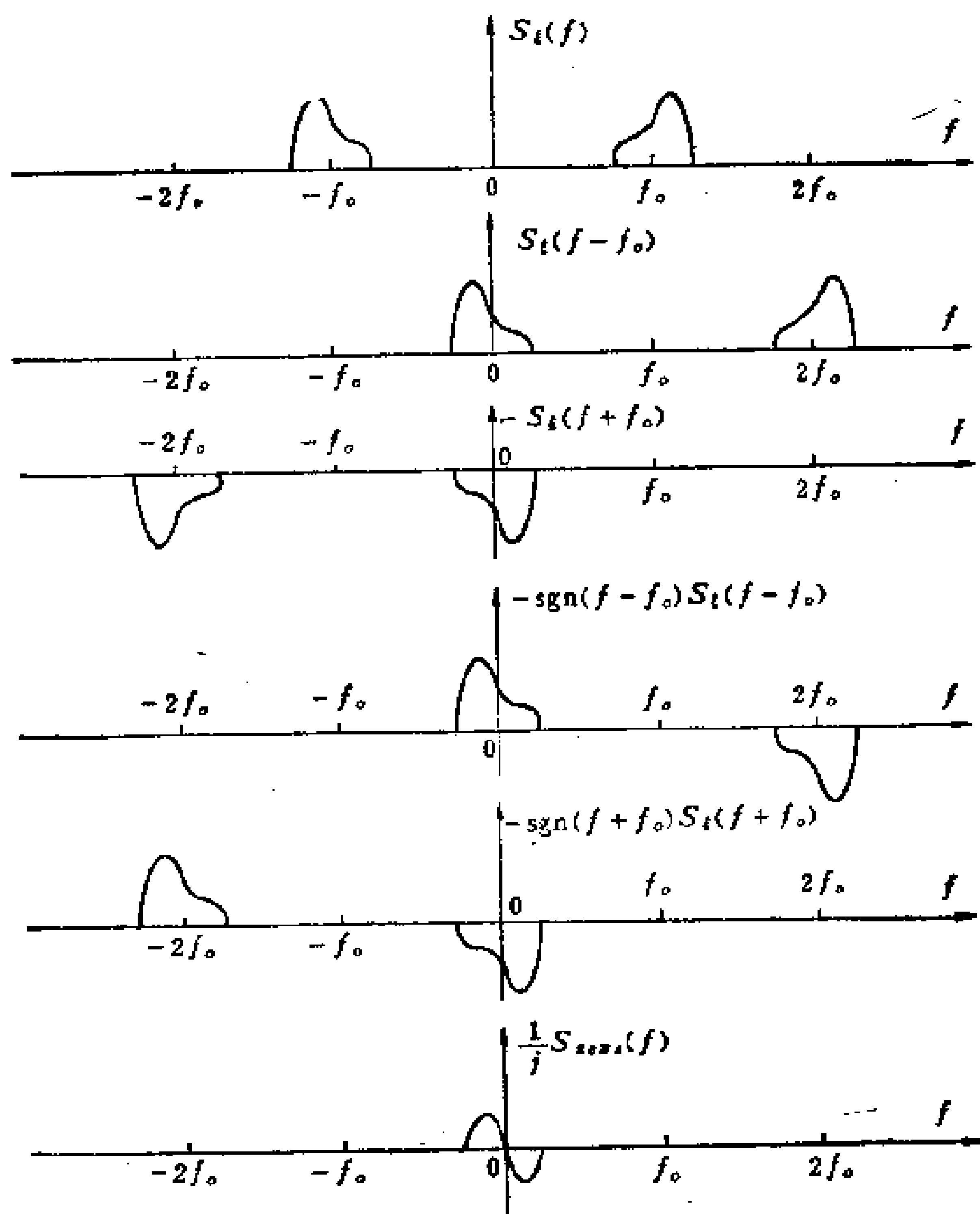


图 5-37

(5) 反之，根据（30）式

$$R_{x_c}(\tau)=R_{x_s}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_c}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-f_c}^{f_c}[S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)]e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-f_c-f_0}^{f_c-f_0}S_\xi(f')e^{j2\pi(f'+f_0)\tau}df'$$

$$+\int_{-f_c+f_0}^{f_c+f_0}S_\xi(f')\,e^{j2\pi(f'-f_0)\tau}df'$$

$$=\int_{f_c+f_0}^{f_0-f_c}S_\xi(-f'')e^{-j2\pi(f''-f_0)\tau}(-df'')$$

$$+\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c}S_\xi(f')e^{j2\pi(f'-f_0)\tau}df'$$

$$=\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c}S_\xi(f)e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}df$$

$$+\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c}S_\xi(f)e^{j2\pi(f-f_0)\tau}df$$

$$=2\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c}S_\xi(f)\cos[2\pi(f-f_0)\tau]df$$

$$=2\int_{0}^{\infty}S_\xi(f)\cos[2\pi(f-f_0)\tau]df \qquad (36)$$

根据（35）式

$$R_{x_cx_s}(\tau)=-R_{x_sx_c}(\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_cx_s}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=j\int_{-f_c}^{f_c}S_\xi(f-f_0)-S_\xi(f+f_0)]e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=j\int_{-f_c-f_0}^{f_c-f_0}S_\xi(f')e^{j2\pi(f'+f_0)\tau}df'$$

$$- j\int_{-f_c+f_0}^{f_c+f_0} S_\xi(f')e^{j2\pi(f'-f_0)\tau}df'$$

$$= j\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c} S_\xi(f)e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}df$$

$$- j\int_{f_0-f_c}^{f_0+f_c} S_\xi(f)e^{j2\pi(f-f_0)\tau}df$$

$$= 2\int_0^\infty S_\xi(f)\sin[2\pi(f-f_0)\tau]df \qquad (37)$$

根据（36）式知

$$R_{x_c}(0) = R_{x_s}(0) = 2\int_0^\infty S_\xi(f)df = R_\xi(0)$$

即 $$E\{[x_c(t)]^2\} = E\{[x_s(t)]^2\} = E\{[\xi(t)]^2\} \qquad (38)$$

根据（37）式知

$$R_{x_cx_s}(0) = -R_{x_sx_c}(0) = 2\int_0^\infty S_\xi(f)\sin(0)df = 0$$

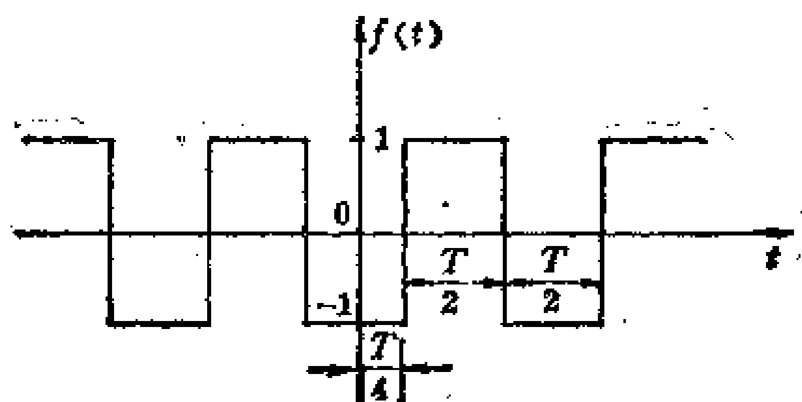
于是可得 $x_c(t)$、$x_s(t)$、$x_c(t+\tau)$、$x_s(t+\tau)$所组成的相关矩阵

$$R = \begin{pmatrix} R_\xi(0) & 0 & R_{x_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) \\ 0 & R_\xi(0) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) \\ R_{x_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_\xi(0) & 0 \\ -R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) & 0 & R_\xi(0) \end{pmatrix}$$

由于$\xi(t)$内不包含直流分量，即$E\{\xi(t)\}=0$，因此相关矩阵R实际上就是$\xi(t)$的协方差矩阵B。

习　　题

1. 设有一周期信号如图题 5-1 所示，求它的时间相关函数和它的功率谱密度。



图题 5-1

2. 设有四个平稳随机过程，它们的相关函数分别为：

(1) $R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos 2\pi f_0\tau$，($f_0$、$\alpha$为常数，$\alpha>0$)

(2) $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$　　(σ^2、α 为常数，$\alpha>0$)

(3) $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau$　　(σ^2、α、β为常数，$\alpha>0$)

(4) $R_\xi(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T_0} & (|\tau|\leqslant T_0)\\ 0 & (|\tau|>T_0)\end{cases}$

求它们的功率谱密度。

3. 设某平稳随机过程的相关函数为

$$R_\xi(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau$$

求其功率谱密度。

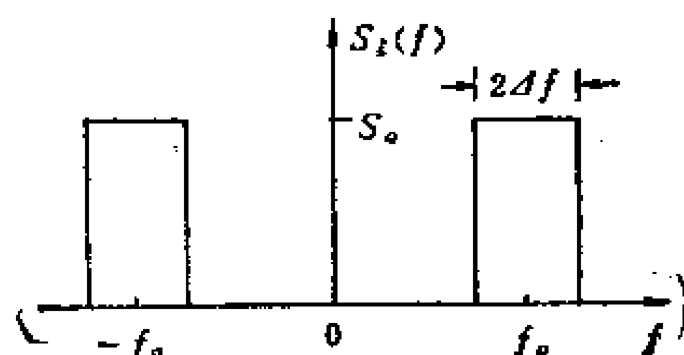
4. 设有二平稳随机过程，它们的功率谱密度分别为：

(1) $S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^4+3(2\pi f)^2+2}$

(2) $S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2+1}{(2\pi f)^4+5(2\pi f)^2+6}$

求其相应的相关函数及其均方值。

5. 设一平稳随机过程的功率谱密度如图题 5-5 所示，



图题 5-5

即 $$S_\xi(f)=\begin{cases}S_0 & (f_0-\Delta f<|f|<f_0+\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases}$$

求其相关函数及其均方值。

6. 设有线性时不变动态系统，其冲激响应为 $h(t)$。如果输入为一平稳随机过程 $\xi(t)$，它的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，协方差函数为 $C_\xi(\tau)$，试证输出过程 $\eta(t)$ 的相关函数可以表示为

$$R_\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau-u)R_h(u)du$$

其中 $$R_h(u)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)h(t-u)dt$$

$R_h(u)$ 称为系统的相关函数，并证明

$$D\eta(t)=\mathrm{Var}\{\eta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}C_\xi(u)R_h(u)du$$

7. 设有一“平均电路”如图题5-7所示，即当输入为$x(t)$时，平均电路的输出为



图题 5-7

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(u)du$$

（1）试证该电路的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\leqslant t\leqslant T)\\ 0 & (\text{其它时间})\end{cases}$$

（2）求第6题所定义的系统的相关函数$R_h(\tau)$；

（3）如果该电路的输入为一平稳随机过程，其协方差函数为

$$C_\xi(\tau)=\begin{cases}\sigma_\xi^2\left(1-\frac{|\tau|}{T_0}\right) & (|\tau|\leqslant T_0)\\ 0 & (\text{其它}\tau\text{值})\end{cases}$$

用上题的方法求输出过程$\eta(t)$的方差$D\eta(t)$。

8. 设有线性时不变系统，它的冲激响应为

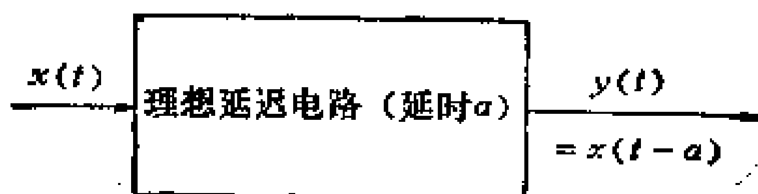
$$h(t)=e^{-\beta t}U(t)$$

其中β为常数，$\beta>0$，$U(t)$为阶跃函数。如果系统的输入为一宽平稳随机过程，它的相关函数为

$$R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\quad(\alpha>0)$$

求输入输出间的互关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$。设 $\alpha=3$、$\beta=1$，画出 $R_{\xi\eta}(\tau)$。问 $R_{\xi\eta}(\tau)$是否对称于 $\tau=0$ 的轴？

9．设有理想延时电路（见图题 5-9），如果该电路的输入为宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_{\xi}(\tau)$，求：



图题 5-9

（1）输出 $\eta(t)$的相关函数 $R_{\eta}(\tau)$；

（2）输入输出间的互关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$。

10．设有一宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为

$$R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau \quad (-\infty<\tau<\infty) \quad (A\text{为常数})$$

其均值为零，试证 $\xi(t)$是无限可导的，且

$$R_{\xi}(\tau)=R_{\dot{\xi}}(\tau)=R_{\ddot{\xi}}(\tau)=\cdots\cdots=R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\cdots$$

11．设有实平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_{\xi}(\tau)$，

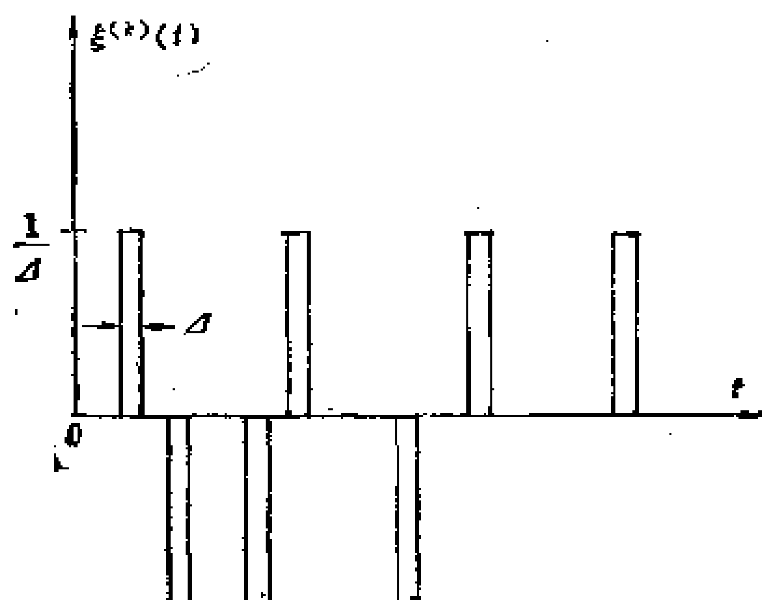
试证明 $$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(\tau)\geqslant\frac{1}{4^{n}}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^{n}\tau)]$$

12．试证明表题5-12中相应的功率谱密度表达式的正确性。表中 $\xi(t)$代表平稳随机过程，$R_{\xi}(\tau)$代表$\xi(t)$的相关函数，$S_{\xi}(f)$代表 $\xi(t)$的功率谱密度。

13．设有平稳随机过程 $\xi(t)$，它的样本函数如图题 5-13(a)所示。每个脉冲的宽度为 Δ，幅度为$\frac{1}{\Delta}$，即每个脉冲的面积为1，而脉宽 $\Delta\to0$，脉冲的出现规律符合泊松分布，即单位时间内出现的平均脉冲个数为 λ，不相交叠的时

表题 5-12

过　　　　　程 $\xi(t)$	相　关　函　数 $R_\xi(\tau)$(已知)	功率谱密度 $S_\xi(f)$(已知)
(1) $a\xi(t)$	$\|a\|^2 R_\xi(\tau)$	$\|a\|^2 S_\xi(f)$
(2) $\frac{d\xi(t)}{dt}$	$-\frac{d^2 R_\xi(\tau)}{d\tau^2}$	$(2\pi f)^2 S_\xi(f)$
(3) $\frac{d^n\xi(t)}{dt^n}$	$(-1)^n \frac{d^{(2n)}R_\xi(\tau)}{d\tau^{2n}}$	$(2\pi f)^{2n} S_\xi(f)$
(4) $\xi(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$R_\xi(\tau)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$	$S_\xi(f\mp f_0)$



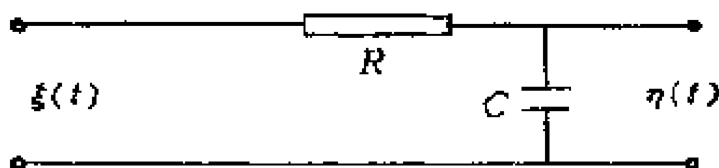
图题 5-13(a)

间间隔出现的脉冲数是相互统计独立的，$P(n, T)=\frac{(\lambda T)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda T}, n=0, 1, 2, \cdots$；每个脉冲的极性可正可负，出现正或负的概率各为$\frac{1}{2}$，不同脉冲出现正或负是相互统计独立的。

（1）求此随机过程的相关函数 $R_\xi(\tau)$；

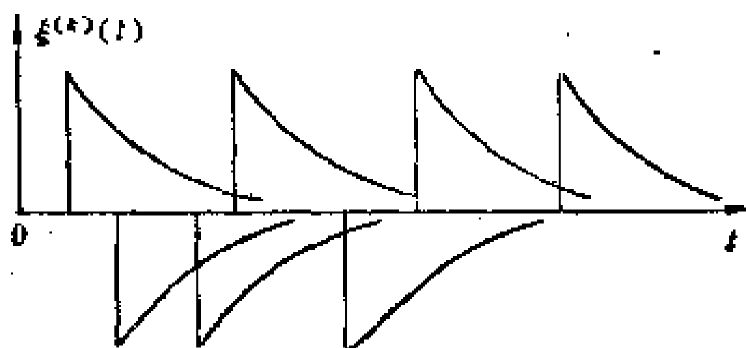
（2）求它的功率谱密度$S_{\xi}(f)$；

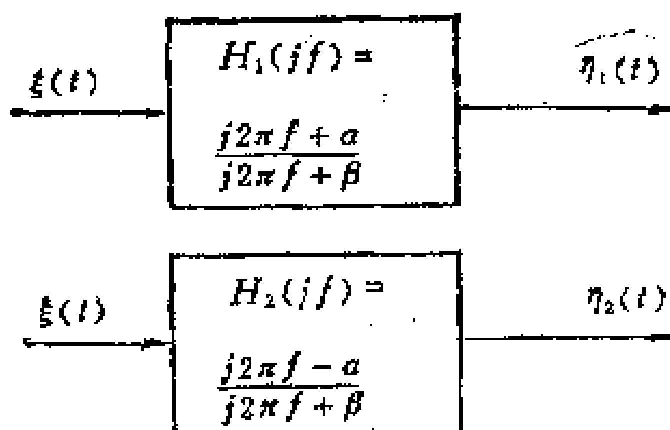
（3）若把该随机信号送入积分电路，求其输出$\eta(t)$的样本函数。输出随机信号的功率谱密度$S_{\eta}(f)$为何（电路如图题5-13(b)所示）？



图题 5-13(b)

14．设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的样本函数如图题5-14





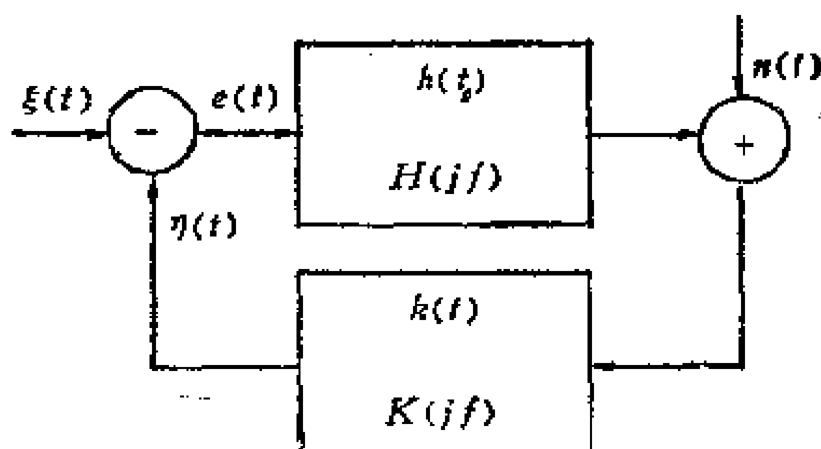
图题 5-14

所示，每个脉冲的波形为负指数波形 即 $ke^{-k(t-u)}U(t-u)$，u 为脉冲的出现时刻，它符合泊松分布规律，且单位时间内出现的脉冲平均个数 $\lambda=1$。求证 $\xi(t)$ 的功率谱密度 $S_\xi(t)$ 为

$$S_\xi(f)=\frac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$$

现有二个线性系统，它们的转移函数分别为 $H_1(jf)=\frac{j2\pi f+\alpha}{j2\pi f+\beta}$ 和 $H_2(jf)=\frac{j2\pi f-\alpha}{j2\pi f+\beta}$，其中 $\alpha>0$，$\beta>0, \beta\neq k$，如题图 5-14 所示。随机信号 $\xi(t)$ 分别送入这两个线性系统，得到的输出分别为 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$。求输出功率谱密度 $S_{\eta1}(f)$ 和 $S_{\eta2}(f)$，并问 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 的波形为何？

15．设有图题 5-15 所示的线性反馈系统，其中 h(t)、k(t) 分别为两个方块的冲激响应，H(jf)、K(jf) 为其相应的



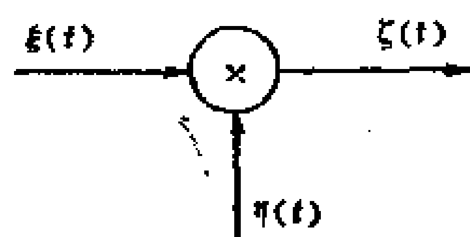
图题 5-15

转移函数，e(t) 代表误差信号，即输入信号和反馈信号之差。如果在输入端送入的信号是一平稳随机过程 $\xi(t)$，在系统中又进入一个平稳随机过程（即噪声）n(t)，若 $\xi(t)$ 和 n(t) 间是相关的，又是联合平稳的，求：

（1）输出端的 $\eta(t)$ 功率谱密度 $S_\eta(f)$；

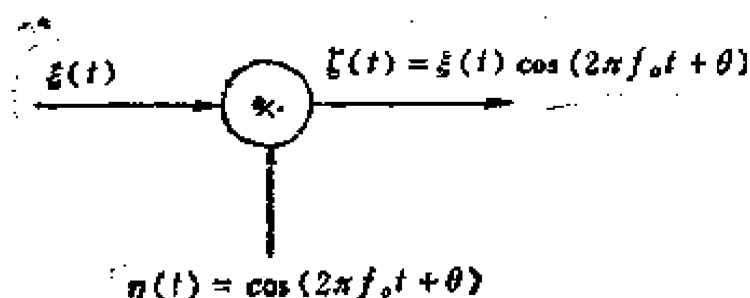
（2）在相减器输出端获得的误差信号 $e(t)$ 的功率谱密度 $S_e(f)$。

16. 设有图题5-16所示的乘法器，它的两个输入为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为相互统计独立的平稳随机过程，$\zeta(t)$ 为其输出。求 $\zeta(t)$ 的相关函数和它的功率谱密度。给定 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，其功率谱密度为 $S_\xi(f)$，$\eta(t)$ 的相关函数为 $R_\eta(\tau)$，相应的功率谱密度为 $S_\eta(f)$。

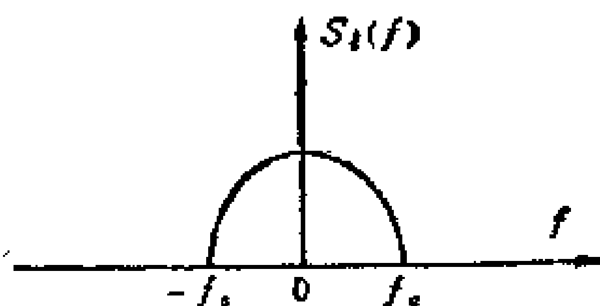


图题 5-16

17. 设有图题5-17A所示的调制器，它的两个输入为 $\xi(t)$、$\eta(t)$。$\xi(t)$ 为零均值的平



A 图



B 图

图题 5-17

稳随机过程，其功率谱密度为$S_\xi(f)$，当$|f|>f_c$时$S_\xi(f)=0$，（见图题5-17B）。$\eta(t)=\cos(2\pi f_0 t+\theta)$，其中$f_0$为常数，$\theta$是均匀分布于$(0, 2\pi)$上的随机变量。$\xi(t)$和$\theta$是相互统计独立的。调制器的输出$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)=\xi(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t+\theta)$。试证明：

（1）输出过程为平稳随机过程，其相关函数为

$$R_\zeta(\tau)=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

（2）输出功率谱密度为

$$S_\zeta(f)=\frac{1}{4}\{S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)\}$$

并画出$S_\zeta(f)$。

18．设有随机过程

$$\eta(t)=a\cos[\omega_0 t-\phi(t)+\theta]$$

其中a和$\omega_0=2\pi f_0$为常数，θ为均匀分布于$[0, 2\pi]$上的随机变量，$\phi(t)$为平稳随机过程，$\phi(t)$与θ是相互统计独立的，试证明

$$R_\eta(t_1,t_2)=\frac{a^2}{2}\mathrm{Re}\{\exp(j\omega_0\tau)E[\exp(j\varphi(t_2)-j\varphi(t_1))]\}$$

其中$t_1-t_2=\tau$，$\mathrm{Re}\{\ \}$指实部

又如果$\phi(t)=b\cos(\omega_m t+\theta')$，其中$\omega_m=2\pi f_m$，$b$为常数，$\theta'$为均匀分布于$[0,2\pi]$上的随机变量，$\theta$和$\theta'$是相互统计独立的，利用关系式

$$\exp\{jz\cos\theta\}=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}2j^n J_n(z)\cos n\theta$$

其中J_0、J_n为贝塞尔函数，求$R_\eta(\tau)$。

19. 设有微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)+z(t)=\xi_1(t) \\ \frac{dz(t)}{dt}+9z(t)=\xi_2(t) \end{cases}$$

$\xi_1(t)$、$\xi_2(t)$为平稳随机过程，而且是联合平稳的，已知

$$S_{\xi_1}(f)=\frac{2\sigma_1^2}{(2\pi f)^2+1}$$

$$S_{\xi_2}(f)=\frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}$$

$$S_{\xi_1\xi_2}(f)=\frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2+j2\pi f}$$

求 $y(t)$、$z(t)$的功率谱密度$S_y(f)$、$S_z(f)$ 及其互谱密度$S_{yz}(f)$。

20. 设有$\frac{d\eta(t)}{dt}+\beta\eta(t)=t\xi(t)$所表示的动态系统，在 $t=0$ 时动态系统加上信号 $t\xi(t)$，其中 $\xi(t)$ 是平稳随机过程，它的功率谱密度为

$$S_\xi(f)=\sigma^2\frac{2a}{(2\pi f)^2+a^2}$$

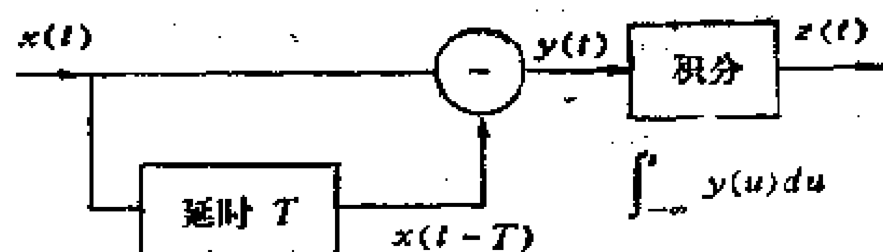
动态系统处于零初始状态。求在 t 时 $\eta(t)$的方差 $D\eta(t)$。题中 α、β、σ 均为常数。

21. 设有图题 5-21 所示的线性系统，图中

$$y(t)=x(t)-x(t-T)$$

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t}y(u)du$$

（1）试求系统的转移函数 $H(jf)$；



图题 5-21

（2）如果输入端的输入信号是白噪声，其相关函数为$S_0\delta(\tau)$，求输出随机过程的均方值。

$$\left(\text{利用关系式}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx=|a|\frac{\pi}{2}\right)$$

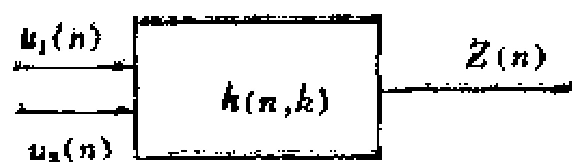
22. 设有图题5-22所示的二个输入端、一个输出端的线性离散时间动态系统，它的冲激响应是1×2的矩阵$h(n,k)$。当$n\geqslant k$时

$$h(n,k)=\left(\alpha^{n-k}\sin\frac{n\pi}{2},\ \alpha^{n-k}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

当$n<k$时

$$h(n,\ k)=(0,\ 0)$$

其中α为常数，且$|\alpha|<1$（$|\alpha|<1$保证了系统的稳定性）。



图题 5-22

如果系统的输入为离散时间的平稳正态过程

$$U(n)=\begin{pmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\end{pmatrix}\quad (n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$$

其中 $$E\{U(n)\}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$R_{\{UU\}}(n_1,n_2)=\begin{pmatrix}2\gamma^{|n_1-n_2|} & \left(-\frac{\gamma}{3}\right)^{|n_1-n_2|}\\ \left(-\frac{\gamma}{3}\right)^{|n_1-n_2|} & 2\gamma^{|n_1-n_2|}\end{pmatrix}$$

其中 γ 为常数，$|\gamma|<1$，$n_1,n_2=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，并且假定$|\gamma|\neq|\alpha|$，$|\gamma|\neq 3|\alpha|$。求输出过程 $Z(n)$ 的相关函数。

23．设有一线性系统，它的状态变量表示式为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=(e^{-t^2},1)\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\quad (t\geqslant 0)$$

设状态矢量的初始值$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$是一对相互统计独立的标准化正态分布的随机变量，输入过程是平稳正态过程，均值为零，相关函数为

$$R_U(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & (|\tau|\leqslant 1)\\0 & (|\tau|>1)\end{cases}$$

且 $u(t)$ 和$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$是相互统计独立的。求该系统的状态转移矩阵 $\phi(t_1,t_2)$，计算状态矢量$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$的方差矩阵 $\sigma^2_{[x]}(t)$ 及输出过程 $y(t)$的方差 $\sigma^2_y(t)$。

第六章　高斯过程

在许多实际问题中遇到的是大量随机变量和的问题。根据中心极限定理知道，在满足一定条件下大量随机变量和的极限是正态分布的（或高斯分布）。在第三章中已提到，经过滤波的泊松过程是正态分布的，电子技术中遇到的热噪声是大量电子的热运动所引起的，因而也是正态分布的。

在第一章中已指出，一个随机过程可以用 n 元随机变量的分布来描述，n 越大描述越精确。如果对一个随机过程任意选取 n 个时刻，n 也是任意选取的，得到 n 个相应的随机变量，此 n 元随机变量的联合分布是正态分布，则称该过程为正态过程或高斯过程。因此，在研究高斯过程时首先应该研究多元正态分布的随机变量。

§1　多元正态分布随机变量

（一）一元正态分布的概率密度和特征函数

如果随机变量 ξ 是正态分布的，其均值为 0，方差为1，则它的概率密度表示式为

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

它相应的特征函数表示式为

$$\Phi_\xi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{2}$$

称它为标准化的正态分布，可用 N(0,1)表示之。

如果随机变量 ξ 是正态分布的，均值为 μ，方差为 σ^2，则它的概率密度表示式为

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (3)$$

它相应的特征函数表示式为

$$\Phi_\xi(t)=\exp\left\{j\mu t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \qquad (4)$$

可用 $N(\mu,\sigma^2)$表示它。

（二） 二元正态分布的概率密度和特征函数

设有标准化二元正态分布的随机变量 ξ、η，均值为

$$E\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}$$

其中 r 代表 ξ、η 的相关系数，$|r|<1$，则它的二元概率密度表示式为

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[x^2-2rxy+y^2]\right\} \qquad (5)$$

它相应的特征函数为

$$\Phi_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{jt_1x+jt_2y\}f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{jt_1x+jt_2y\right.$$

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}[x^2-2rxy+y^2]\Big\}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{jt_1x+jt_2rx$$

$$+jt_2(y-rx)-\frac{1}{2(1-r^2)}[(y-rx)^2$$

$$+x^2(1-r^2)]\Big\}dydx$$

$$=\exp\left\{-\frac{(1-r^2)t_2^2}{2}-\frac{(t_1+rt_2)^2}{2}\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{t_1^2+2rt_1t_2+t_2^2}{2}\right\} \qquad (6)$$

设有二元正态分布随机变量 ξ、η，其均值为

$$E\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\mu$$

协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

r 代表 ξ、η 的相关系数，$|r|<1$，则它的概率密度表示式为

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-r^2)}$$

$$\cdot\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Big\} \qquad (7)$$

它相应的特征函数为

$$\Phi_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\exp\left\{j(\mu_1t_1+\mu_2t_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2\right.$$

$$\left.+2r\sigma_1\sigma_2t_1t_2+\sigma_2^2t_2^2)\right\} \tag{8}$$

它可以用 $N(\mu, B)$表示之。

（三）n 元正态分布的概率密度和特征函数

n 元随机变量可用随机列矢量表示之

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

其均值为

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

即 $E\xi_i=\mu_i$， $i=1,2,\cdots,n$。

记 $b_{ik}=\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_k)=E\{(\xi_i-\mu_i)(\xi_k-\mu_k)\}$

b_{ik} 代表 ξ_i、ξ_k 间的协方差，$i,k=1,2,\cdots\cdots,n$。当 $i=k$时

$b_{ii}=E\{(\xi_i-\mu_i)^2\}=D\xi_i$

b_{ii} 代表 ξ_i 的方差，于是得协方差矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

协方差矩阵 B 是对称矩阵。因为

$$\int\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-\mu_i)\right]^2 f_{[\xi]}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$dx_1dx_2\cdots dx_n\geqslant 0$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i\lambda_k b_{ik}\geqslant 0$$

或
$$\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$$

其中
$$\boldsymbol{\lambda}'=(\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n)$$

协方差矩阵 B 具有非负定性。

若 n 元随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是正态分布的随机变量，其均值为实值列矢量 $\boldsymbol{\mu}$，如果它的协方差矩阵 B 是正定矩阵，则其概率密度的表示式为

$$f_{(\xi)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{B}|^{1/2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}\tag{9}$$

式中$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'$代表$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$的转置矩阵。n 元正态分布可用 $N(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{B})$表示之。

作为一个概率密度它需要满足两个条件：

（1） $f_{[\xi]}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0\quad(\mathbf{x}\in R^n)$

（2） $\int_{R^n}\cdots\int f_{[\xi]}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$

（9）式是一负指数函数，它满足条件（1）。为要证明它满足条件（2），需要利用线性代数中的一个结论，即若矩阵 B 是正定对称矩阵，则存在一个非奇异矩阵 L，使

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{L}'\tag{10}$$

作线性变换使 $\quad\mathbf{y}=\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\qquad(11)$

(11)式的逆变换为 $\quad\mathbf{x}=\mathbf{L}\mathbf{y}+\boldsymbol{\mu}\qquad(12)$

变换(12)式的雅可比行列式为

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right| = |L| = |B|^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

因此 $\int_{R^n}\cdots\int f_{[\xi]}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\right.$$

$$\left.\cdot B^{-1}(x-\mu)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}y'y\right\}|B|^{\frac{1}{2}}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}[y_1^2+y_2^2+\cdots\right.$$

$$\left.+y_n^2]\right\}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right]^n = 1$$

这就证明(9)式确实定义了一个 R^n 上的概率密度函数。

下面进一步研究(9)式代表的正态分布所对应的特征函数。按定义其特征函数为

$$\Phi_{[\xi]}(t,\ \cdots,\ t_n) = \int_{R_n}\cdots\int\exp\{j(t_1x_1+t_2x_2$$

$$+\cdots+t_nx_n)\}f_{[\xi]}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\int_{R^n}\cdots\int\exp\{jt'x\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.(x-\mu)'B^{-1}(x-\mu)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{14}$$

式中 $t' = (t_1\ \ t_2\cdots\cdots t_n)$

如前设 $$\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{L}'$$

作变换 $$\mathbf{y}=\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

或 $$\mathbf{x}=\mathbf{L}\mathbf{y}+\boldsymbol{\mu}$$

于是被积函数中的

$$j\mathbf{t}'\mathbf{x}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

$$=j\mathbf{t}'\mathbf{L}\mathbf{y}+j\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{y}$$

又设 $$\mathbf{L}'\mathbf{t}=\mathbf{s}$$

则 $$\mathbf{s}'=\mathbf{t}'\mathbf{L} \tag{15}$$

故 $$j\mathbf{t}'\mathbf{x}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=j\mathbf{s}'\mathbf{y}+j\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{y}$$

(15)式中所定义的 $\mathbf{s}$ 矩阵是一个具有 n 个元素的列矩阵，设

$$\mathbf{s}'=(s_1\ \ s_2\ \ \cdots\ \ s_n)$$

故 $$j\mathbf{t}'\mathbf{x}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

$$=j\sum_{k=1}^{n}s_k y_k+j\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}y_k^2$$

$$=j\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k-js_k)^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}s_k^2$$

而 $$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}s_k^2=\frac{1}{2}\mathbf{s}'\mathbf{s}=\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{L}\mathbf{L}'\mathbf{t}=\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{B}\mathbf{t}$$

于是 $$j\mathbf{t}'\mathbf{x}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=j\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{B}\mathbf{t}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k-js_k)^2$$

把上式代入(14)式得

$$\Phi_{[\xi]}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}\mathbf{B}t\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k-js_k)^2\right]|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}\mathbf{B}t\right\}$$

即 n 元正态分布的特征函数为

$$\Phi_{[\xi]}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}\mathbf{B}t\right\} \tag{16}$$

在(9)—(16)式的讨论中假定了**B**是正定对称矩阵，否则(9)式没有意义，因此，上面只是对正定对称矩阵**B**的场合下定义了多元正态分布。但是，利用特征函数的表达方式即（16）式，就可以把定义拓广到一般非负定对称矩阵**B**的场合。

如果**B**为一非负定对称矩阵，令 $\mathbf{B}_k=\mathbf{B}+\frac{1}{k}\mathbf{I}$，这里 **I** 是 n 阶单位矩阵，显然 $\mathbf{B}_k$ 是正定对称矩阵，因此和 $\mathbf{B}_k$ 对应的特征函数为

$$\Phi_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}\mathbf{B}_kt\right\}$$

它是 n 元正态分布 $N(\mu,\ \mathbf{B}_k)$的特征函数。现在令 $k\to\infty$，令

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}\mathbf{B}t\right\}$$

$$=\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

根据概率密度 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和特征函数 $\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是一一对应的，因此 $\lim_{k\to\infty}\Phi_k(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 定义了非负定矩阵 $\mathbf{B}$ 相对应的特征函数，因而也就定义了非负定矩阵 $\mathbf{B}$ 所对应的概率密度。因此得到如下的**定义**：

若 μ 是 n 元实矢量，$\mathbf{B}$ 是 $n\times n$ 非负定对称矩阵，则称特征函数 $\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\exp\left\{jt'\mu-\frac{1}{2}t'\mathbf{B}t\right\}$ 的分布函数（或概率密度）为 n 元正态分布，并记为 $N(\mu, \mathbf{B})$。

按照这个定义，当 $\mathbf{B}$ 为正定对称矩阵时其概率密度将由

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}-\mu)'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}$$

给出。但当 $|\mathbf{B}|=0$ 时概率密度无法写出，可以证明，若 $\mathbf{B}$ 的秩为 $r(r<n)$，这时概率分布集中在一个 r 维子空间上，这种正态分布称为退化正态分布或奇异正态分布。

（四）多元正态分布的边际分布

设 $\xi=(\xi_1\ \ \xi_2\cdots\xi_n)'$ 为 n 元正态分布的随机矢量 $N(\mu, \mathbf{B})$，则 ξ 的任何一个子矢量 $(\xi_{k1}\ \ \xi_{k2}\cdots\xi_{km})'$ $(m\leqslant n)$ 也服从正态分布。

因为 ξ 的特征函数为 $\exp\left\{jt'\mu-\frac{1}{2}t'\mathbf{B}t\right\}$，在这个特征函数中除了 $t_{k1}, t_{k2}, \cdots, t_{km}$ 外令其他所有的 t 为零，即得到 $(\xi_{k1}\ \ \xi_{k2}\cdots\xi_{km})'$ 的特征函数

$$\Phi(t_{k1}, t_{k2}, \cdots, t_{km})=\exp\left\{j\tilde{t}'\tilde{\mu}-\frac{1}{2}\tilde{t}'\tilde{\mathbf{B}}\tilde{t}\right\} \quad (17)$$

其中 $\tilde{t}=(t_{k1} \quad t_{k2}\cdots t_{km})'$

$\tilde{\mu}=(\mu_{k1} \quad \mu_{k2}\cdots\mu_{km})'$

$\tilde{B}$ 为保留 B 的第 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 行及列所得的 $m\times m$ 矩阵。

(17) 式说明了多元分布的边际分布仍是正态分布，其分布为 $N(\tilde{\mu},\tilde{B})$。因此，ξ_k 服从一元正态分布 $N(\mu_k,b_{kk})$。

（五）利用特征函数计算各种特征数字

$$E\{\xi_k\}=\frac{1}{j}\left.\frac{\partial\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_k}\right|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

$$=\frac{1}{j}j\mu_k=\mu_k$$

即 μ_k 代表 ξ_k 的均值。

$$E\{\xi_k\xi_i\}=(j)^{-2}\left.\frac{\partial^2\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_k\partial t_i}\right|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

$$=b_{ki}+\mu_k\mu_i$$

即

$$E\{(\xi_k-\mu_k)(\xi_i-\mu_i)\}=E\{\xi_k\xi_i\}-\mu_k\mu_i=b_{ki}$$

因此n元正态分布完全由它的一阶矩和二阶矩所确定。

利用特征函数计算随机矢量各种数字特征是十分方便的。如果矩 $E\{\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\}$ 存在，则

$$E\{\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\}=(j)^{\left(-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}\cdot\left.\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0} \tag{18}$$

例 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4 是四元联合正态分布的随机变量。设 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4 的均值为 0，求 $E\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\}$，试用 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4 间的协方差表示之。

解 由于ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4为零均值的四元正态分布随机变量，故ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4的特征函数为

$$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}b_{kl}t_kt_l\right\}$$

为了计算方便起见设$u_k=\sum_{l=1}^{4}t_{kl}t_l$，于是

$$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}t_ku_k\right\}$$

$$\frac{\partial\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_1}=-\frac{1}{2}[u_1+t_1b_{11}+t_2b_{21}$$

$$+t_3b_{31}+t_4b_{41}]\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$=-\frac{1}{2}[u_1+b_{11}t_1+b_{12}t_2+b_{13}t_3+b_{14}t_4]\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$=-u_1\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_2\partial t_1}$$

$$=-\frac{\partial u_1}{\partial t_2}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)-u_1\cdot\frac{\partial\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_2}$$

$$=-b_{12}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)+u_1u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$\frac{\partial^3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_3\partial t_2\partial t_1}$$

$$=-b_{12}(-u_3)\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$+b_{13}u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)+u_1b_{23}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$-u_1u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$=b_{12}u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)+b_{13}u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$+b_{23}u_1\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)-u_1u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$\frac{\partial^4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_4\partial t_3\partial t_2\partial t_1}$$

$$\begin{aligned}
&= b_{12}b_{34}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{12}u_3u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)\\
&\quad + b_{13}b_{24}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{13}u_2u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)\\
&\quad + b_{23}b_{14}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{23}u_1u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)\\
&\quad - b_{14}u_2u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) - b_{24}u_1u_3\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)\\
&\quad - b_{34}u_1u_2\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) + u_1u_2u_3u_4\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4)
\end{aligned}$$

令 $t_1=t_2=t_3=t_4=0$，则 $\Phi(0,0,0,0)=1$，$u_k=0$。$k=1,2,3,4$，所以

$$\begin{aligned}
E\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\} &= (j)^{-4}[b_{12}b_{34}+b_{13}b_{24}+b_{23}b_{14}]\\
&= E\{\xi_1\xi_2\}E\{\xi_3\xi_4\}+E\{\xi_1\xi_3\}E\{\xi_2\xi_4\}\\
&\quad + E\{\xi_2\xi_3\}E\{\xi_1\xi_4\}
\end{aligned}$$

§2 独立性问题

定理一 n 元正态分布的随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n$ 相互统计独立的充要条件是它们两两不相关。

证明 首先证明必要性。如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 n 个相互统计独立的正态分布的随机变量，则其联合概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)\cdots f_{\xi_n}(x_n)$$

其特征函数为

$$\Phi_{\{\xi\}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\Phi_{\xi_1}(t_1)\Phi_{\xi_2}(t_2)\cdots\Phi_{\xi_n}(t_n)$$

$$=\exp\left\{j\mu_1t_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2t_1^2\right\}\exp\left\{j\mu_2t_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2t_2^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\exp\left\{j\mu_nt_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2t_n^2\right\}$$

$$=\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n}\mu_k t_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 t_k^2\right\} \tag{19}$$

对比(19)式和(16)式可知，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为相互统计独立的随机变量，则其协方差矩阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & & 0\\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1}^2 & \\ 0 & & & & \sigma_n^2\end{pmatrix}$$

因而当 $k\neq i$ 时 $b_{ki}=0$，即 ξ_i,ξ_k 是不相关的。

下面证明充分性。若 n 元正态分布的随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 两两不相关，则

$$b_{kl}=E\{(\xi_k-\mu_k)(\xi_l-\mu_l)\}=0\quad(k\neq l)$$

所以其特征函数为

$$\Phi_{[\xi]}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left\{jt^T\mu-\frac{1}{2}t^T\mathbf{B}t\right\}$$

$$=\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n}\mu_k t_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_{kk}t_k^2\right\}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{j\mu_k t_k-\frac{1}{2}b_{kk}t_k^2\right\}=\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\xi_k}(t_k)$$

其中 $\Phi_{\xi_k}(t_k)$ 是一元正态分布的特征函数。根据

$$\Phi_{[\xi]}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\xi_k}(t_k)$$

可知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互统计独立的。

定理二 若 $\boldsymbol{\xi}$ 为正态分布的随机矢量。$\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的两个子矢量，即 $=\boldsymbol{\xi}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\end{pmatrix}$，记

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{B}_{11}$、$\mathbf{B}_{22}$ 分别是 ξ_1、ξ_2 的协方差矩阵，$\mathbf{B}_{12}$ 是由 ξ_1 及 ξ_2 的相应分量的协方差构成的相互协方差矩阵，$\mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{21}^{\tau}$，则 ξ_1 与 ξ_2 相互统计独立的充要条件是 $\mathbf{B}_{12}=0$。

证明 首先证明必要性。若 ξ_1 与 ξ_2 相互统计独立，则 ξ_1 的任何一个分量与 ξ_2 的任何一个分量统计独立，因此其协方差为 0，从而由它们构成的相互协方差矩阵 $\mathbf{B}_{12}=0$，$\mathbf{B}_{21}=0$。

下面证明充分性。由于 $b_{kl}=b_{lk}$，因此当 $\mathbf{B}_{12}=0$ 时 $\mathbf{B}_{21}=0$，此时的 $\mathbf{B}$ 矩阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & 0\\ 0 & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$$

若 $\mathbf{t}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{t}_1$ 与 ξ_1 的维数相同，$\mathbf{t}_2$ 与 ξ_2 的维数相同，

则
$$\mathbf{t}^{\tau}\mathbf{B}\mathbf{t}=(\mathbf{t}_1^{\tau},\ \mathbf{t}_2^{\tau})\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{t}_1^{\tau}\mathbf{B}_{11}\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2^{\tau}\mathbf{B}_{22}\mathbf{t}_2$$

若记 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\mu}_1$ 是 ξ_1 的数学期望，$\boldsymbol{\mu}_2$ 是 ξ_2 的数学期望，则

$$\mathbf{t}^{\tau}\boldsymbol{\mu}=(\mathbf{t}_1^{\tau}\mathbf{t}_2^{\tau})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix}=\mathbf{t}_1^{\tau}\boldsymbol{\mu}_1+\mathbf{t}_2^{\tau}\boldsymbol{\mu}_2$$

因此 $$\Phi_{(\xi)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left\{j\mathbf{t}^{\tau}\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{t}^{\tau}\mathbf{B}\mathbf{t}\right\}$$

$$=\exp\left\{j(\mathbf{t}_1^{\tau}\boldsymbol{\mu}_1+\mathbf{t}_2^{\tau}\boldsymbol{\mu}_2)-\frac{1}{2}(\mathbf{t}_1^{\tau}\mathbf{B}_{11}\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2^{\tau}\mathbf{B}_{22}\mathbf{t}_2)\right\}$$

$$= \exp\left\{ j t_1^\tau \mu_1 - \frac{1}{2} t_1^\tau B_{11} t_1 \right\} \exp\left\{ j t_2^\tau \mu_2 - \frac{1}{2} t_2^\tau B_{22} t_2 \right\}$$

$$= \Phi_{[\xi_1]}(t_1) \Phi_{[\xi_2]}(t_2)$$

其中 $\Phi_{[\xi_1]}(t_1)$代表子矢量 ξ_1 的特征函数，$\Phi_{[\xi_2]}(t_2)$代表子矢量 ξ_2 的特征函数。根据特征函数的性质可知 ξ_1 和 ξ_2 是相互统计独立的。

§3 线性变换

若 $\xi = (\xi_1 \quad \xi_2 \cdots \xi_n)^\tau$ 是 n 维随机矢量，其数学期望为 $\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_n)^\tau$，协方差矩阵为 B，现要研究服从正态分布的随机矢量在线性变换下的一些性质。

（一）若 ξ 的各分量的线性组合为 $\zeta = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k = a^\tau \xi$，

其中 $a^\tau = (a_1 \quad a_2 \cdots a_n)$

则 ζ 的数学期望为

$$E\zeta = E\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k \right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k E(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k = a^\tau \mu \quad (20)$$

ζ 的方差为

$$D\zeta = E\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k (\xi_k - \mu_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i (\xi_i - \mu_i) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k a_i b_{ki} = a^\tau B a \quad (21)$$

（二）若 $c = (c_{ik})$是一 $m \times n$矩阵，而$\eta = c\xi$，η是$m \times 1$的列矩阵，它是 ξ 经过线性变换后得到的 m 元的随机矢量，则 η 的数学期望为

$$E\eta = c\mu \quad (22)$$

η的协方差矩阵 $D\eta$ 为

$$D\eta = E\{(\eta - E\eta)(\eta - E\eta)^{\tau}\} = E\{c(\xi - \mu)(\xi - \mu)^{\tau}c^{\tau}\}$$
$$= cE\{(\xi - \mu)(\xi - \mu)^{\tau}\}c^{\tau} = cBc^{\tau} \quad (23)$$

（三）定理一 $\xi = (\xi_1 \ \xi_2 \cdots \xi_n)^{\tau}$ 服从 n 元正态分布 $N(\mu, B)$ 的充要条件是它的任何一个线性组合 $\zeta = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k = a^{\tau}\xi$ 服从一元正态分布

$$N\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k, \ \sum_{k=1} \sum_{i=1} a_k a_i b_{ki}\right)$$

证明 (a)必要性 若ξ服从 $N(\mu \ B)$，则它的特征函数为

$$\Phi_{[\xi]}(t_1, \ t_2, \cdots, t_n) = \exp\left\{jt^{\tau}\mu - \frac{1}{2}t^{\tau}Bt\right\}$$

设 $t = ua$，u 为任意实数，则

$$E\{e^{jt^{\tau}\xi}\} = \Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = E\{e^{jua^{\tau}\xi}\} = E\{e^{ju\zeta}\}$$
$$= \exp\left\{jua^{\tau}\mu - \frac{1}{2}u^2 a^{\tau}Ba\right\} \quad (24)$$

将(20)、(21)式的结果代入(24)式得

$$E\{e^{ju\zeta}\} = \Phi_{\zeta}(u) = \exp\left\{ju(E\zeta) - \frac{1}{2}u^2(D\zeta)\right\}$$

且该式对任意实数都成立。这就说明随机变量ζ服从 $N(a^{\tau}\mu, \ a^{\tau}Ba)$。

(b) 充分性 因$\zeta = a^{\tau}\xi$，而ζ为一元正态分布随机变量，它服从$N(a^{\tau}\mu, \ a^{\tau}Ba)$，因此$\zeta$的特征函数为

$$\Phi_{\zeta}(u) = E(e^{ju\zeta}) = E(e^{jua^{\tau}\xi})$$
$$= \exp\left\{jua^{\tau}\mu - \frac{1}{2}u^2 a^{\tau}Ba\right\}$$

取 $u=1$，则

$$E\{e^{ja'\xi}\}=\exp\left\{ja'\mu-\frac{1}{2}a'Ba\right\}$$

由于$a=(a_1\ \ a_2\cdots a_n)'$，而 a 的取值是任意的，上式中的$(a_1\ \ a_2\cdots a_n)'$ 相当于(16)式中的$(t_1\ \ t_2\cdots t_n)'$，这就说明了ξ 服从$N(\mu,B)$。

利用本定理可通过一元随机变量的分布是正态分布来确定 n 元随机矢量也服从正态分布。这一方法是十分有用的。

(四) 定理二 若$\xi=(\xi_1\ \ \xi_2\cdots\xi_n)'$ 服从 n 元正态分布$N(\mu,\ B)$，而 c 为任意 $m\times n$矩阵，则 $\eta=c\xi$ 服从 m 元正态分布$N(c\mu,\ cBc')$。

证 因$\xi=(\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n)'$ 为$n\times1$ 的列矩阵，c 为$m\times n$矩阵，故 $\eta=c\xi$ 为$m\times1$ 的列矩阵。若 t 为 m 元实值列矢量，则 η 的特征函数为

$$\Phi_{[\eta]}(t_1,t_2,\cdots,t_m)=E\{e^{jt'\eta}\}=E\{e^{jt'c\xi}\}$$

$$=E\{e^{j(c't)'\xi}\}$$

$$=\exp\left\{j(c't)'\mu-\frac{1}{2}(c't)'B(c't)\right\}$$

$$=\exp\left\{jt'c\mu-\frac{1}{2}t'(cBc')t\right\}$$

按定义，η 服从 m 元正态分布$N(c\mu,\ cBc')$。

这一定理表明，正态分布的随机变量经过线性变换还是正态分布的随机变量。这个性质称为正态分布随机变量的线性变换不变性。

(五) 推论 若ξ 服从 n 元正态分布$N(\mu,\ B)$，则存在一个正交变换 U 使得 $\eta=U\xi$ 是一个具有独立正态分布分量的随机矢量，它的数学期望为 $U\mu$，而它的方差分量是矩阵

B的特征值。

证 从线性代数知道，对于实对称矩阵B存在正交矩阵U使 $UBU' = D$，其中D为

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{pmatrix}$$

这里 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是B的特征值，若B的秩为r，则有r个特征值不为0。U是以特征矢量为列构成的正交矩阵。

把U作为定理二中的变换矩阵，并利用该定理的结果，则得 $\eta = U\xi$ 是一个具有独立正态分布分量的随机矢量，它的数学期望为 $U\mu$，而它的协方差协矩阵中的元素仅存在对角线分量，其余均为0，它的方差分量是B的特征值。

若矩阵B的秩 $r<n$，则正态分布退化到一个r维子空间上。

§4 高斯随机过程

定义 如果随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$ 的有限维分布都是正态分布，则称它为高斯随机过程或正态过程。

正态过程是二阶矩过程的一个重要子类。

对于高斯随机过程来说，它的任意n个取样的联合概率密度均为正态分布的概率密度，因此§1—§3的一些结论可以运用到高斯随机过程中，故

$$f_{\xi}(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{|B|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t-\boldsymbol{\mu}_t)'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_t-\boldsymbol{\mu}_t)\right\} \qquad (1)$$

其中
$$\mathbf{x}_t' = (x_{t_1}\ \ x_{t_2}\cdots x_{t_n})$$
$$\boldsymbol{\mu}_t' = (\mu_{t_1}\ \ \mu_{t_2}\cdots\mu_{t_n})$$
$$\mu_{t_k} = E\{\xi_{t_k}\}$$

$\mathbf{B}$ 为自协方差矩阵，它的元素为

$$b_{kl} = E\{(\xi_{t_k}-\mu_{t_k})(\xi_{t_l}-\mu_{t_l})\}$$
$$= R_\xi(t_k, t_l) - \mu_{t_k}\mu_{t_l}$$

因为随机过程 $\xi(t)$ 是正态分布的，所以任何 n 维联合概率密度均可用(1)式表示，且其概率密度只依赖作为时间函数的相关函数的数学期望。

如果随机过程 $\xi(t)$ 为宽平稳实高斯随机过程，则 $\mu_{tk} = \mu =$ 常数，$R_\xi(t_k, t_l) = R_\xi(t_k - t_l)$，即均值为常数，相关函数（或协方差函数）仅与时间差 $t_k - t_l$ 有关，而不再单独依赖于 t_k 和 t_l。

取 n 个抽样时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，这 n 个时刻对应的协方差矩阵为 $\mathbf{B}$，其元素为 $b_{kl} = R_\xi(t_k - t_l) - \mu^2 = b(t_k - t_l)$，这样可写出 n 个抽样点的概率密度所对应的特征函数为

$$\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= \exp\left\{j\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\mu - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b(t_k - t_l)u_k u_l\right\}$$

如把 n 个抽样点同时作一平移 h，即取抽样时刻为 $t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h$，则这平移后的 n 个抽样点的概率密度所对应的特征函数为

$$\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n; t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h)$$

$$= \exp\left\{ j\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\mu - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b(t_k - t_i)u_k u_i \right\}$$

$$= \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

因为分布函数由其他特征函数唯一确定，故有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1 + h,\ t_2 + h, \cdots, t_n + h)$$
$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

这就表明$\xi(t)$的一切有限维分布都不随时间推移而改变，即$\xi(t)$也是严平稳随机过程，即宽平稳实高斯随机过程也是严平稳随机过程。

如果所给定的随机过程是一复高斯过程，则在 n 个抽样时刻得到 n 个复随机变量

$$\zeta_{t_k} = \xi_{t_k} + j\eta_{t_k} (t_k \in T, k = 1,2,3,\cdots,n)$$

其中 ξ_{t_k}、η_{t_k} 均为实随机变量，也就是说 n 个抽样组成了 2n 维实高斯分布随机矢量，因此 §1—§3 各节所导出的一些结论同样适用于复高斯过程。

在许多实际问题中需要研究正态过程的导数和积分的分布。为了说明正态过程导数的分布和积分的分布，需要证明下面的定理。

定理一 若$\boldsymbol{\xi}^{n} = (\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)}\cdots\xi_k^{(n)})^{\tau}$为k维实正态随机变量，又$\boldsymbol{\xi}^{(n)}$均方收敛于$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1\quad \xi_2\cdots\xi_k)^{\tau}$，即对于每个分量$\xi_i^{(n)}$来说有$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|^2\} = 0$，$1 \leqslant i \leqslant k$，则$\boldsymbol{\xi}$也是正态分布的随机矢量。

证 记$\boldsymbol{\xi}^{(n)}$、$\boldsymbol{\xi}$的均值矢量和协方差矩阵为

$$E\{\boldsymbol{\xi}^{(n)}\} = \boldsymbol{\mu}^{(n)} = (\mu_1^{(n)}\quad \mu_2^{(n)}\cdots\mu_k^{(n)})^{\tau}$$
$$E\{\boldsymbol{\xi}\} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1\quad \mu_2\cdots\mu_k)^{\tau}$$
$$E\{(\boldsymbol{\xi}^{(n)} - \boldsymbol{\mu}^{(n)})(\boldsymbol{\xi}^{(n)} - \boldsymbol{\mu}^{(n)})'\} = \mathbf{B}^{(n)}$$
$$E\{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})'\} = \mathbf{B}$$

根据$\xi^{(n)}$均方收敛于ξ，故

$$\lim_{n\to\infty}\mu_i^{(n)}=\lim_{n\to\infty}E\{\xi_i^{(n)}\}=E\{\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_i^{(n)}\}$$

$$=E\{\xi_i\}=\mu_i$$

$$\lim_{n\to\infty}b_{ij}^{(n)}=b_{ij}\quad(1\leqslant i,j\leqslant k)$$

若$\Phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_k)$代表$\xi^{(n)}$的特征函数，$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_k)$代表$\xi$的特征函数，由于$\xi^{(n)}$为k维正态分布的随机变量，故

$$\Phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_k)=\exp\left\{j\mathbf{u}'\boldsymbol{\mu}^{(n)}-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{B}^{(n)}\mathbf{u}\right\}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_k)=\exp\left\{j\mathbf{u}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{B}\mathbf{u}\right\}$根据$\xi^{(n)}$均方收敛于$\xi$，因此$\Phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_k)$收敛于$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_k)$，即

$$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_k)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_k)$$

$$=\exp\left\{j\mathbf{u}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{B}\mathbf{u}\right\}$$

所以ξ也是k维正态分布的随机变量。

定理二 若正态过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$在T上是均方可导的，则$\{\xi'(t),\ t\in T\}$也是正态过程。

证 任选$t_1,t_2,\cdots,t_k\in T$，及h，使$t_1+h,\ t_2+h,\ \cdots,\ t_k+h\in T$，利用多维正态分布经过线性变换仍然是正态分布的不变性原理，知

$$\left(\frac{\xi(t_1+h)-\xi(t_1)}{h}\quad\frac{\xi(t_2+h)-\xi(t_2)}{h}\right.$$

$$\left.\cdots\cdots\frac{\xi(t_k+h)-\xi(t_k)}{h}\right)'$$

所组成的 k 维随机矢量是 k 维正态分布的随机矢量。

由于 $\xi(t)$在T上均方可导，所以对每个 t_i 来说 $\frac{1}{h}$ $\cdot[\xi(t_i+h)-\xi(t_i)]$均方收敛于 $\xi'(t_i)$, $1\leqslant i\leqslant k$。因此，$(\xi'(t_1)\quad \xi'(t_2)\cdots\xi'(t_k))^T$ 是k 维正态分布的随机矢量，即$\xi'(t)$是一正态过程。

定理三 设$\{\xi(t),\ t\in T\}$在T上是均方可积的正态过程，则 $\eta(t)=\int_a^t \xi(u)du\ \ (a,t\in T)$

及 $\eta(t)=\int_a^b \xi(u)h(t,u)du\ \ (a,b\in T)$

也是正态过程。

证 按照积分定义

$$\eta(t)=\int_a^t \xi(u)du=\text{l.i.m}\,\eta^{(n)}$$

故
$$\eta(t_j)=\text{l.i.m}\,\eta^{(n_j)}$$

$$\eta^{(n_j)}=\sum_{i=1}^{n_j}\xi(u_i)\Delta u_i$$

其中 $a=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_{n_j}=t_j$ 是$[a,t_j]$上的一系列分点，$\xi(u_i)$是正态过程，故$\xi(u_i)$的线性组合$(\eta^{(n_1)}\quad \eta^{(n_2)}\cdots\eta^{(n_k)})^T$也是k维正态分布，它的均方极限$(\eta(t_1)\quad \eta(t_2)\cdots\eta(t_k))^T$ 也是 k 维正态分布的随机矢量，即 $\eta(t)$是正态过程。

同理也可说明$\eta(t)=\int_a^b \xi(u)h(t,u)du$ 为正态过程。这样，如果$\{\xi(t),\ (-\infty<t<\infty)\}$是正态过程且均方可积，则 $\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(u)h(t,u)du$ 为正态过程。因此，正态分布

的随机过程经过线性系统，其输出仍是正态分布的随机过程。

例 设有线性系统，它的冲激响应为 $h(t)$，输入为平稳实高斯随机过程。设其输出随机过程为 $\eta(t)$。试证明 $\xi(t)$、$\eta(t)$为联合正态分布的随机过程。

证 $$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau$$

$\eta(t)$为正态分布的实随机过程。设

$$\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\xi(t)dt$$

其中 $g(\cdot)$为任意函数，ζ 为高斯分布的线性组合，故 ζ 为正态分布的随机变量。定义

$$g(t)=g_1(t)+\int_{-\infty}^{\infty}g_2(u)h(u-t)du$$

则
$$\begin{aligned}\zeta&=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)\xi(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_2(u)h(u-t)du\xi(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)\xi(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)h(u-t)dtg_2(u)du\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)\xi(t)du+\int_{-\infty}^{\infty}\eta(u)g_2(u)du\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(t),\ g_2(t))\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}dt\end{aligned}$$

由于 $g(t)$为任意函数，$g_1(t)$、$g_2(t)$也是任意函数，而 ζ 是正态分布的随机变量，故$\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}$是联合正态分布的随机过程。

§5 窄带平稳实高斯随机过程

（一）一维包络分布和一维相位分布

在第五章§11中讨论了窄带实平稳随机过程的分析方法，现把这些结论用到窄带平稳实高斯随机过程的分析中。

在第五章§11中已说明了窄带平稳实过程的均值为零，即 $E\{\xi(t)\}=0$。它可以表示为

$$\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_0t+x_s(t)\sin 2\pi f_0t \qquad (1)$$

而

$$x_c(t)=\xi(t)\cos 2\pi f_0t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_0t \qquad (2)$$

$$x_s(t)=\xi(t)\sin 2\pi f_0t-\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_0t \qquad (3)$$

$\hat{\xi}(t)$为$\xi(t)$的希尔伯特变换，因此$x_c(t)$、$x_s(t)$均是从正态过程$\xi(t)$经过线性运算得到的，所以$x_c(t)$、$x_s(t)$也是正态过程，而且是联合正态分布的过程。

若$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，其方差$\sigma_\xi^2=R_\xi(0)$，则$x_c(t)$、$x_s(t)$的均值均为0，它们的方差为

$$\sigma_{x_c}^2=R_{x_c}(0)=\sigma_{x_s}^2=R_{x_s}(0)=R_\xi(0)=\sigma_\xi^2$$

$x_c(t)$、$x_s(t)$的功率谱密度$S_{x_c}(f)$、$S_{x_s}(f)$集中在$|f|<f_c$内，因此$x_c(t)$、$x_s(t)$只有低频分量。

因为$R_{x_cx_s}(0)=E\{x_c(t)x_s(t)\}=0$，所以$x_c(t)$和$x_s(t)$是相互统计独立的。$x_c(t)$、$x_s(t)$的联合概率密度为

$$f(x_{c_t},\ x_{s_t})=f(x_{c_t})f(x_{s_t})$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{x_{c\,t}^2+x_{s\,t}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \qquad (4)$$

可以把(1)式改写为

$$\xi(t)=V(t)\cos[2\pi f_0t+\theta(t)]$$

$$= V(t)\cos\theta(t)\cos 2\pi f_0 t - V(t)\sin\theta(t)\sin 2\pi f_0 t \tag{5}$$

$$= x_c(t)\cos 2\pi f_0 t + x_s(t)\sin 2\pi f_0 t \tag{6}$$

其中
$$V(t)\cos\theta(t) = x_c(t) \tag{7}$$

$$-V(t)\sin\theta(t) = x_s(t) \tag{8}$$

（7）、（8）两式说明，可以经过变换从 $x_c(t)$、$x_s(t)$ 转换到 $V(t)$、$\theta(t)$，其变换的雅可比为

$$J = \frac{\partial(x_{c_t}, x_{s_t})}{\partial(V_t, \theta_t)} = \begin{vmatrix} \cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ -V_t\sin\theta_t & -V_t\cos\theta_t \end{vmatrix} = -V_t$$

$|J| = V_t$。当 $V_t > 0$，$0 \leqslant \theta_t \leqslant 2\pi$ 时

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \tag{9}$$

故
$$f(V_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\dfrac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} & (V_t \geqslant 0) \\ 0 & (V_t < 0) \end{cases} \tag{10}$$

$$f(\theta_t) = \int_0^\infty f(V_t, \theta_t)\,dV_t = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & (0 \leqslant \theta_t \leqslant 2\pi) \\ 0 & (\text{其他 } \theta_t) \end{cases} \tag{11}$$

（10）、（11）式说明 $\xi(t)$ 包络的分布为瑞利分布，而相位 $\theta(t)$ 是 $[0, 2\pi]$ 间均匀分布的随机变量。包络 V_t 的均值为

$$E\{V_t\} = \int_0^\infty V_t \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}}\,dV_t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma_\xi$$

V_t 的均方值为

$$E\{V_t^2\} = \int_0^\infty V_t^2 \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}}\,dV_t = 2\sigma_\xi^2$$

V_t 的方差为

$$\sigma_{V_t}^2 = DV_t = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_\xi^2$$

从式(9)、(10)、(11)知

$$f(V_t,\ \theta_t) = f(V_t)f(\theta_t)$$

所以在同一时刻 t，包络 V_t 和相位 θ_t 是相互统计独立的随机变量。

下面将证明包络和相位不是统计独立的随机过程。

（二）包络和相位的二维分布。

现研究随机过程 $\xi(t)$ 的包络 $V(t)$ 和相位 $\theta(t)$ 在 t_1、t_2 二个时刻的联合分布。从(6)式知

$$\begin{aligned}\xi(t_1) &= V(t_1)\cos[2\pi f_0 t_1 + \theta(t_1)] \\ &= x_c(t_1)\cos 2\pi f_0 t_1 + x_s(t_1)\sin 2\pi f_0 t_1 \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}\xi(t_2) &= V(t_2)\cos[2\pi f_0 t_2 + \theta(t_2)] \\ &= x_c(t_2)\cos 2\pi f_0 t_2 + x_s(t_2)\sin 2\pi f_0 t_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

由于 $\xi(t)$ 是正态分布随机过程，$x_c(t_1)$、$x_s(t_1)$、$x_c(t_2)$、$x_s(t_2)$ 是从正态分布的随机过程经过线性变换而获得的，故 $x_c(t_1)$、$x_s(t_1)$、$x_c(t_2)$、$x_s(t_2)$ 是联合正态分布的随机变量。

从第五章 §11 知 x_{ct_1}、x_{st_1}、x_{ct_2}、x_{st_2} 的协方差矩阵为

$$\mathbf{B} =$$

$$\begin{pmatrix} R_\xi(0) & 0 & R_{x_c}(t_1-t_2) & -R_{x_c x_s}(t_2-t_1) \\ 0 & R_\xi(0) & R_{x_c x_s}(t_2-t_1) & R_{x_c}(t_2-t_1) \\ R_{x_c}(t_2-t_1) & R_{x_c x_s}(t_2-t_1) & R_\xi(0) & 0 \\ -R_{x_c x_s}(t_2-t_1) & R_{x_c}(t_2-t_1) & 0 & R_\xi(0) \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sigma_\xi^2 & 0 & R_{x_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) \\
0 & \sigma_\xi^2 & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) \\
R_{x_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) & \sigma_\xi^2 & 0 \\
-R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) & 0 & \sigma_\xi^2
\end{pmatrix} \tag{14}
$$

式中 $\tau = t_2 - t_1$，故

$$
|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix}
\sigma_\xi^2 & 0 & R_{x_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) \\
0 & \sigma_\xi^2 & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) \\
R_{x_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) & \sigma_\xi^2 & 0 \\
-R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_c}(\tau) & 0 & \sigma_\xi^2
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_\xi^4[\sigma_\xi^4 - (R_{x_c}(\tau))^2 - (R_{x_cx_s}(\tau))^2] \\
&\quad + (R_{x_c}(\tau))^2[(R_{x_c}(\tau))^2 + (R_{x_cx_s}(\tau))^2 - \sigma_\xi^4] \\
&\quad + (R_{x_cx_s}(t))^2[(R_{x_c}(\tau))^2 + (R_{x_cx_s}(\tau))^2 - \sigma_\xi^4] \\
&= [\sigma_\xi^4 - (R_{x_c}(\tau))^2 - (R_{x_cx_s}(\tau))^2]^2
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{B}_{11}| = |\mathbf{B}_{22}| = |\mathbf{B}_{33}| = |\mathbf{B}_{44}| &= \sigma_\xi^2[\sigma_\xi^4 - (R_{x_c}(\tau))^2 \\
&\quad - (R_{x_cx_s}(\tau))^2] = \sigma_\xi^2 |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
|\mathbf{B}_{12}| = |\mathbf{B}_{21}| = |\mathbf{B}_{34}| = |\mathbf{B}_{43}| = 0 \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{B}_{13}| = |\mathbf{B}_{31}| = |\mathbf{B}_{24}| = |\mathbf{B}_{42}| \\
&= -R_{x_c}(\tau)[\sigma_\xi^4 - (R_{x_c}(\tau))^2 - (R_{x_cx_s}(\tau))^2] \\
&= -R_{x_c}(\tau)|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{B}_{14}| = |\mathbf{B}_{41}| = -|\mathbf{B}_{23}| = -|\mathbf{B}_{32}| \\
&= R_{x_cx_s}(\tau)[\sigma_\xi^4 - (R_{x_c}(\tau))^2 - (R_{x_cx_s}(\tau))^2] \\
&= R_{x_cx_s}(\tau)|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{19}
$$

由于$\xi(t)$的均值为零，故$x_c(t_1)$、$x_s(t_1)$、$x_c(t_2)$、$x_s(t_2)$的均值为0，这样可得$x_{c_{t_1}}$、$x_{s_{t_1}}$、$x_{c_{t_2}}$、$x_{s_{t_2}}$的联合概率密度为

$$f(x_{c_{t_1}},\ x_{s_{t_1}},\ x_{c_{t_2}},\ x_{s_{t_2}})$$

$$=\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[\sigma_\xi^2(x_{c_{t_1}}^2+x_{s_{t_1}}^2+x_{c_{t_2}}^2+x_{s_{t_2}}^2)-2R_{x_c}(\tau)(x_{c_{t_1}}x_{c_{t_2}}+x_{s_{t_1}}x_{s_{t_2}})+2R_{x_cx_s}(\tau)(x_{c_{t_1}}x_{s_{t_2}}-x_{s_{t_1}}x_{c_{t_2}})]\right\} \tag{20}$$

式中 $$|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}=[\sigma_\xi^4-(R_{x_c}(\tau))^2-(R_{x_cx_s}(\tau))^2]$$

根据(12)、(13)知

$$\begin{cases} x_c(t_1)=x_{c_{t_1}}=V(t_1)\cos\theta(t_1)=V_{t_1}\cos\theta_{t_1} \\ x_s(t_1)=x_{s_{t_1}}=-V(t_1)\sin\theta(t_1)=-V_{t_1}\sin\theta_{t_1} \\ x_c(t_2)=x_{c_{t_2}}=V(t_2)\cos\theta(t_2)=V_{t_2}\cos\theta_{t_2} \\ x_s(t_2)=x_{s_{t_2}}=-V(t_2)\sin\theta(t_2)=-V_{t_2}\sin\theta_{t_2} \end{cases}$$

变换的雅可比式为

$$J=\frac{\partial(x_{c_{t_1}},x_{s_{t_1}},x_{c_{t_2}},x_{s_{t_2}})}{\partial(V_{t_1},\theta_{t_1},V_{t_2},\theta_{t_2})}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\theta_{t_1} & -V_{t_1}\sin\theta_{t_1} & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{t_1} & -V_{t_1}\cos\theta_{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_{t_2} & -V_{t_2}\sin\theta_{t_2} \\ 0 & 0 & -\sin\theta_{t_2} & -V_{t_2}\cos\theta_{t_2} \end{vmatrix}$$

$$=V_{t_1}V_{t_2}$$

当$V_{t_1}\geqslant 0$，$V_{t_2}\geqslant 0$，$0\leqslant\theta_{t_1}$，$\theta_{t_2}\leqslant 2\pi$时

$$f(V_{t_1},\ V_{t_2},\ \theta_{t_1},\ \theta_{t_2})$$

$$= \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} V_{t_1} V_{t_2} \exp\Big\{ - \frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} [\sigma_\xi^2 (V_{t_1}^2 + V_{t_2}^2)$$

$$- 2R_{x_c}(\tau) V_{t_1} V_{t_2} \cos(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})$$

$$- 2R_{x_c x_s}(\tau) V_{t_1} V_{t_2} \sin(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})] \Big\} \quad (21)$$

当 V_{t_1}、V_{t_2}、θ_{t_1}、θ_{t_2} 为其他值时，$f(V_{t_1}, V_{t_2}, \theta_{t_1}, \theta_{t_2}) = 0$。

把(21)式对 θ_{t_1} θ_{t_2} 积分即可得包络的二维分布

$$f(V_{t_1}, V_{t_2}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(V_{t_1}, V_{t_2}, \theta_{t_1}, \theta_{t_2}) d\theta_{t_1} d\theta_{t_2}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} V_{t_1} V_{t_2} \exp\Big\{ - \frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot [\sigma_\xi^2 (V_{t_1}^2 + V_{t_2}^2)] \Big\}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\Big\{ \frac{V_{t_1} V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} [R_{x_c}(\tau)\cos(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})$$

$$+ R_{x_c x_s}(\tau)\sin(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})] \Big\} d\theta_{t_1} d\theta_{t_2}$$

计算上述积分，设 $\theta_{t_2} - \theta_{t_1} = \alpha$，因

$$R_{x_c}(\tau)\cos(\theta_{t_2} - \theta_{t_1}) + R_{x_c x_s}(\tau)\sin(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})$$

$$= [(R_{x_c}(\tau))^2 + (R_{x_c x_s}(\tau))^2]^{\frac{1}{2}} \cos(\alpha - \phi)$$

所以 $\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\Big\{ \frac{V_{t_1} V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}} [R_{x_c}(\tau)\cos(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})$

$$+ R_{x_c x_s}(\tau)\sin(\theta_{t_2} - \theta_{t_1})] \Big\} d\theta_{t_1} d\theta_{t_2}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\theta_{t_1}}^{2\pi - \theta_{t_1}} \exp\Big\{ \frac{V_{t_1} V_{t_2} [R_{x_c}^2(\tau) + R_{x_c x_s}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot \cos(\alpha-\phi)\Big\} d\alpha d\theta_{t_1}$$

由于指数上的函数为周期性函数，故上式为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_{t_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{V_{t_1}V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.\cdot[R^2_{x_c}(\tau)+R^2_{x_cx_s}(\tau)]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right\}d\alpha$$

$$=I_0\left\{\frac{V_{t_1}V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R^2_{x_c}(\tau)+R^2_{x_cx_s}(\tau)]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$I_0(x)$为零级修正贝塞尔函数，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-j(jx\cos\theta)}d\theta$$

$$=J_0(jx)=I_0(x)$$

$$\text{故}\quad f(V_{t_1},V_{t_2})=\begin{cases}\dfrac{V_{t_1}V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\sigma_\xi^2(V_{t_1}^2+V_{t_2}^2)\right\}\\ \cdot I_0\left\{\dfrac{V_{t_1}V_{t_2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R^2_{x_c}(\tau)+R^2_{x_cx_s}(\tau)]^{\frac{1}{2}}\right\}\\ \qquad\qquad (V_{t_1}、V_{t_2}\geqslant 0)\\ 0 \quad (\text{其他 } V_{t_1}、V_{t_2}\text{值})\end{cases}\tag{22}$$

式中 $$|\mathbf{B}|=[\sigma_\xi^4-R^2_{x_c}(\tau)-R^2_{x_cx_s}(\tau)]^2$$

如果$\tau\to\infty$，$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$成为两个相互统计独立的随机变量，则$x_c(t_1)$、$x_c(t_2)$也是独立的，$x_s(t_1)$、$x_s(t_2)$也是独立的，$x_c(t_1)$、$x_s(t_2)$也是独立的。这样，当$\tau\to\infty$时$[R_{x_c}(\tau)]_{\tau\to\infty}=0$，$[R_{x_cx_s}(\tau)]_{\tau\to\infty}=0$，则

$$|\mathbf{B}|=\sigma_\xi^8$$

$$I_0(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1$$

故当 $\tau\to\infty$ 时

$$f(V_{t1},\ V_{t2})=\frac{V_{t1}}{\sigma_\xi^2}e^{-\frac{V_{t1}^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\frac{V_{t2}}{\sigma_\xi^2}e^{-\frac{V_{t2}^2}{2\sigma_\xi^2}} \qquad (23)$$

即当 $\tau\to\infty$ 时 V_{t1}、V_{t2} 的联合分布成为二个瑞利分布密度的乘积。

利用(22)式求 V_{t1} 的边际分布密度：

$$f(V_{t1})=\int_0^\infty f(V_{t1},\ V_{t2})dV_{t2}$$

$$=\frac{V_{t1}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\sigma_\xi^2V_{t1}^2\right\}$$

$$\cdot\int_0^\infty V_{t2}\ \exp\left\{-\frac{\sigma_\xi^2V_{t2}^2}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\right\}I_0\left\{\frac{V_{t1}V_{t2}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R_{x_c}^2(\tau)\right.$$

$$\left.+R_{x_cx_s}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}\right\}dV_{t2}$$

利用公式 $\int_0^\infty tJ_0(at)e^{-ht^2}dt=\frac{1}{2h}e^{-\frac{a^2}{4h}}$① (24)

故 $$\int_0^\infty V_{t2}\exp\left\{\frac{\sigma_\xi^2V_{t2}^2}{-2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\right\}I_0\left\{\frac{V_{t1}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R_{x_c}^2(\tau)\right.$$

$$\left.+R_{x_cx_s}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}V_{t2}\right\}dV_{t2}$$

---

① 公式(24)可从 $\int_0^\infty J_0(a\sqrt{t})e^{-st}dt=\mathscr{L}\{J_0(a\sqrt{t})\}=\frac{1}{S}e^{-\frac{a^2}{4s}}$ 得到(见赵访熊著《高等微积分》)。

$$=\frac{1}{2\frac{\sigma_\xi^2}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}}\exp\left\{-\frac{\left(j\frac{V_{t1}}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}[R_{x_c}^2(\tau)+R_{x_cx_s}(\tau)]^{\frac{1}{2}}\right)^2}{4\frac{\sigma_\xi^2}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}}\right\}$$

$$=\frac{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{\frac{V_{t1}^2[R_{x_c}^2(\tau)+R_{x_cx_s}^2(\tau)]}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}\sigma_\xi^2}\right\}$$

所以
$$f(V_{t1})=\int_0^\infty f(V_{t1},V_{t2})dV_{t2}$$

$$=\frac{V_{t1}}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_{t1}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \tag{25}$$

同理
$$f(V_{t2})=\frac{V_{t2}}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_{t2}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

(25)式为包络的一维概率密度。

从(23)式知，当 $\tau\rightarrow\infty$ 时

$$f(V_{t1},V_{t2})=\frac{V_{t1}}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_{t1}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot\frac{V_{t2}}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_{t2}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}=f(V_{t1})f(V_{t2})$$

这说明当 $\tau\rightarrow\infty$ 时，V_{t1} 和 V_{t2} 成为两个相互统计独立的随机变量。

(21) 式对 V_{t1}、V_{t2} 积分，可以求得在 t_1、t_2 时刻相位 θ_{t1}、θ_{t2} 的二维联合概率密度

$$f(\theta_{t1},\theta_{t2})=\int_0^\infty\int_0^\infty f(V_{t1},V_{t2},\theta_{t1},\theta_{t2})dV_{t1}dV_{t2}$$

在(21)式中　令
$$\beta=\frac{1}{\sigma_\xi^2}\Big[R_{x_c}(\tau)\cos(\theta_{t2}-\theta_{t1})+R_{x_cx_s}(\tau)\sin(\theta_{t2}-\theta_{t1})\Big] \tag{26}$$

则 $$f(\theta_{t1},\ \theta_{t2})=\frac{1}{4\pi^2}\ \frac{1}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty\int_0^\infty V_{t1}V_{t2}$$

$$\cdot\ \exp\left\{-\frac{\sigma_\xi^2(V_{t1}^2+V_{t2}^2-2\beta V_{t1}V_{t2})}{2|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\right\}dV_{t1}dV_{t2}$$

$$(0\leqslant\theta_{t1},\ \theta_{t2}\leqslant 2\pi) \tag{27}$$

为了计算（27）式，先研究积分

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2xuv}{2}\right\}dudv$$

$$(|x|<1) \tag{28}$$

$$\frac{dJ}{dx}=\int_0^\infty\int_0^\infty uv\ \exp\ \left\{-\frac{u^2+v^2-2xuv}{2}\right\}dudv \tag{29}$$

计算积分（28），作变量置换设

$$u=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\alpha},\quad v=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin\alpha} \tag{30}$$

(30)式中 $\cos\alpha=x$　　　　$(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$　　　　(31)

于是　　　　u^2+v^2-2xuv

$$=\frac{r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}$$

$$-\frac{2\,r^2\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}=r^2$$

变换的雅可比为

$$
\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{vmatrix}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right) & -r\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) & r\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\end{vmatrix}=\frac{r}{\sin\alpha}
$$

u、v 的积分区间为（0, ∞），变换后 r 的积分区间为（0, ∞），θ的积分区间为$\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

故
$$
J=\int_0^\infty\int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\alpha}\,dr d\theta
$$

$$
=\frac{1}{\sin\alpha}(\pi-\alpha)=\frac{\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (32)
$$

根据（29）、（32）式得

$$
\int_0^\infty\int_0^\infty uv\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2xuv}{2}\right\}dudv
$$

$$
=\frac{dJ}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)
$$

$$
=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}x\right)}{(1-x^2)^{3/2}} \qquad (33)
$$

比较（27）和（33）式得

$$
\begin{cases}
f(\theta_{t1},\ \theta_{t2})=\dfrac{|B|^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2\sigma_t^4}\left[\dfrac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\beta\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\beta\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right] & \\
\qquad\qquad (0\leqslant\theta_{t1},\theta_{t2}\leqslant 2\pi) & (34)\\
f(\theta_{t1},\theta_{t2})=0 \qquad (\text{其他}\theta_{t1}、\theta_{t2}\text{值}) &
\end{cases}
$$

其中 $\beta = \frac{1}{\sigma_\xi^2}[R_{xc}(\tau)\cos(\theta_{t2}-\theta_{t1})$

$\quad + R_{xcxs}(\tau)\sin(\theta_{t2}-\theta_{t1})]$

$\quad = \frac{1}{\sigma_\xi^2}[R_{xc}^2(\tau)+R_{xcxs}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}\cos(\theta_{t2}-\theta_{t1}-\phi)$

从（22）、（34）和（21）式知

$$f(V_{t1}, V_{t2}, \theta_{t1}, \theta_{t2}) \neq f(V_{t1}, V_{t2}) f(\theta_{t1}, \theta_{t2})$$

上式说明$\xi(t)$的包络过程和相位过程不是相互独立的。

有了这些结果，就可以计算包络过程$V(t)$的相关函数$E\{V_{t1}V_{t2}\}$，不过计算比较复杂①。

§6 正弦波和窄带平稳实高斯过程之和

随机相位正弦波与窄带平稳实高斯过程之和为

$$\eta(t) = P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t) \tag{35}$$

其中 P、ω_0 为常数，ω_0 为窄带平稳实高斯过程的功率谱密度的中心角频率，$\omega_0 = 2\pi f_0$，θ为（0，2π）上均匀分布的随机变量，$\xi(t)$ 为窄带平稳实高斯过程。$E\{\xi(t)\}=0$，$D\{\xi(t)\}=\sigma_\xi^2$，并设θ和$\xi(t)$是相互统计独立的。若θ为一固定值，则（35）式中的$\eta(t)$为一高斯随机过程，它的均值为 $P\sin(\omega_0 t+\theta)$。因均值为时间的函数，故θ为固定值时$\eta(t)$不是平稳过程，但它仍是高斯过程。

另一方面，如果θ为（0,2π）上均匀分布的随机变量，则 $E\{\eta(t)\}=E\{P\sin(\omega_0 t+\theta)\}+E\{\xi(t)\}=0$

---

① 参阅 Middleton著《Introduction to Statistical Communication Theory》。

$$R_\eta(t_1,\ t_2) = \frac{P^2}{2}\cos\omega_0(t_1 - t_2) + R_\xi(\tau)$$

$$= \frac{P^2}{2}\cos\omega_0\tau + R_\xi(\tau) = R_\eta(\tau)$$

即 $\eta(t)$ 的相关函数仅是时间差 τ 的函数，故 $\eta(t)$ 为宽平稳随机过程，但此时 $\eta(t)$ 的概率密度就不符合高斯分布了。

随机相位正弦波的特征函数为

$$\Phi_s(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{juP\sin(\omega_0 t + \theta)\}d\theta$$

$$= J_0(Pu) \tag{36}$$

J_0 为零级贝塞尔函数。随机相位正弦波的概率密度为

$$f_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{P^2 - x^2}} & (|x| < P) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases} \tag{37}$$

窄带平稳实高斯过程的一元概率密度为

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

它相应的特征函数为

$$\Phi_\xi(u) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2 u^2\right] \tag{38}$$

因 $\eta(t) = P\sin(\omega t_0 + \theta) + \xi(t)$，故 $\eta(t)$ 的概率密度为 $f_s(x)$ 和 $f_\xi(x)$ 的卷积，而 $\eta(t)$ 的特征函数应为（36）式和（38）式的乘积，即

$$\Phi_\eta(u) = \Phi_s(u)\Phi_\xi(u)$$

$$= J_0(Pu)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2 u^2\right\} \tag{39}$$

对（39）式取逆变换可得 $\eta(t)$ 的概率密度①

$$f_\eta(x)=\frac{1}{(2\pi\sigma_\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right)^k}{k!}$$

$$\cdot {}_1F_1\left(k+\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}\right) \qquad (40)$$

式中 ${}_1F_1$（a; b; z）称为合流型超几何级数，它定义为

$${}_1F_1(a;\ b;\ z)=1+\frac{a}{b}\frac{z}{1!}$$

$$+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^3}{3!}$$

$$+\cdots \qquad (41)$$

（40）式中 $\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$ 代表信号功率 $\frac{P^2}{2}$ 和 ξ（t）的功率（噪声功率）之比。很明显，（40）式所代表的概率密度不再是正态分布。当信杂比很强时 $\eta(t)$ 的分布应该接近 $f_s(x)$，当信杂比很弱时 $\eta(t)$ 的概率密度应该接近于正态分布。

在无线电技术中更关心的问题是检波器输出，也就是说更关心的问题是 $\eta(t)$ 的包络。

由于 $\xi(t)$ 是窄带平稳实正态过程，故（35）可改写为

$$\begin{aligned}\eta(t)&=P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)\\&=(P\sin\theta+x_c(t))\cos2\pi f_0 t\\&+(P\cos\theta+x_s(t))\sin2\pi f_0 t\\&=z_c(t)\cos2\pi f_0 t+z_s(t)\sin2\pi f_0 t\end{aligned} \qquad (42)$$

---

① 见 Rice, Statistical properties of sine wave plus random noise, B.S.T.J. Jan. 1948.

$$\begin{cases} z_c(t) = P\sin\theta + x_c(t) \\ z_s(t) = P\cos\theta + x_s(t) \end{cases} \tag{43}$$

由于 $x_c(t)$、$x_s(t)$是独立的正态分布随机变量，均值为 0，方差为σ_ξ^2，并且 $x_c(t)$、$x_s(t)$和 θ是统计独立的，故当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时

$$f(x_{ct},\ x_{st},\ \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{x_{ct}^2 + x_{st}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \tag{44}$$

经过(43)式的变换，得 $z_c(t)$、$z_s(t)$、θ 的联合概率密度

$$\begin{aligned} f(z_{ct}, z_{st}, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\left[(z_{ct} - P\sin\theta)^2 + (z_{st} - P\cos\theta)^2\right]\right\} = \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{z_{ct}^2 + z_{st}^2 + P^2 - 2P(z_{ct}\sin\theta + z_{st}\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \\ &(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \end{aligned} \tag{45}$$

(42) 式可写作如下形式

$$\eta(t) = V(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \tag{46}$$

于是

$$\begin{cases} V_t\cos\varphi_t = z_c(t) = z_{ct} = P\sin\theta + x_c(t) \\ -V_t\sin\varphi_t = z_s(t) = z_{st} = P\cos\theta + x_s(t) \end{cases} \tag{47}$$

根据变换式（47），已知$f(z_{ct}, z_{st}, \theta)$，可求得$V_t$、$\varphi_t$、$\theta$的联合概率密度。考虑到变换式（47）的变换雅可比为$|J| = V_t$，得

$$
\begin{cases}
f(V_t, \varphi_t, \theta) = \dfrac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \\
\cdot \exp\left\{-\dfrac{V_t^2 + P^2 - 2P(V_t\cos\varphi_t\sin\theta - V_t\sin\varphi_t\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \\
= \dfrac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\dfrac{V_t^2 + P^2 - 2PV_t\sin(\theta - \varphi_t)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \\
\qquad (V_t > 0, 0 \leqslant \varphi_t \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \\
f(V_t, \varphi_t, \theta) = 0 \qquad (\text{其他 } V_t, \varphi_t, \theta \text{ 值})
\end{cases} \tag{48}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(V_t) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(V_t, \varphi_t, \theta)\, d\varphi_t\, d\theta \\
&= \frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \\
&\quad \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{PV_t\sin(\theta - \varphi_t)}{\sigma_\xi^2}\right\} d\theta\, d\varphi_t \\
&= \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \frac{1}{4\pi^2} \\
&\quad \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{PV_t\cos\left(\theta - \varphi_t - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sigma_\xi^2}\right\} d\theta\, d\varphi_t \\
&= \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \frac{1}{4\pi^2}
\end{aligned}
$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{PV_t\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_t-\theta\right)}{\sigma_\xi^2}\right\}d\theta d\varphi_t$$

设 $\varphi_t+\frac{\pi}{2}-\theta=\alpha$，则

$$f(V_t)=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\frac{1}{2\pi}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{2\pi+\frac{\pi}{2}-\theta}\exp\left\{\frac{PV_t\cos\alpha}{\sigma_\xi^2}\right\}d\alpha d\theta$$

$$\begin{cases} f(V_t)=\dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\dfrac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot I_0\left(\dfrac{PV_t}{\sigma_\xi^2}\right) & (V_t\geqslant 0) \\ f(V_t)=0 & (V_t<0) \end{cases}\qquad(49)$$

当 $P=0$时，(49)式与§5中(10)式一致。

(49)式代表包络的概率密度，它称为莱斯密度函数，有的文献上称为广义瑞利函数。

为了方便，定义归一化变量 $v=\frac{V_t}{\sigma_\xi}$，并设$\frac{P}{\sigma_\xi}=a$，则莱斯概率密度函数可表示为

$$f(v)=v\exp\left\{-\frac{v^2+a^2}{2}\right\}I_0(av)\qquad(v>0)\qquad(50)$$

其中 $\frac{a^2}{2}=\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$代表输入信杂比（功率），$v=\frac{V_t}{\sigma_\xi}$代表包络与噪声均方根值之比。以 a 为参数画出函数 f(v)，见图6.1。

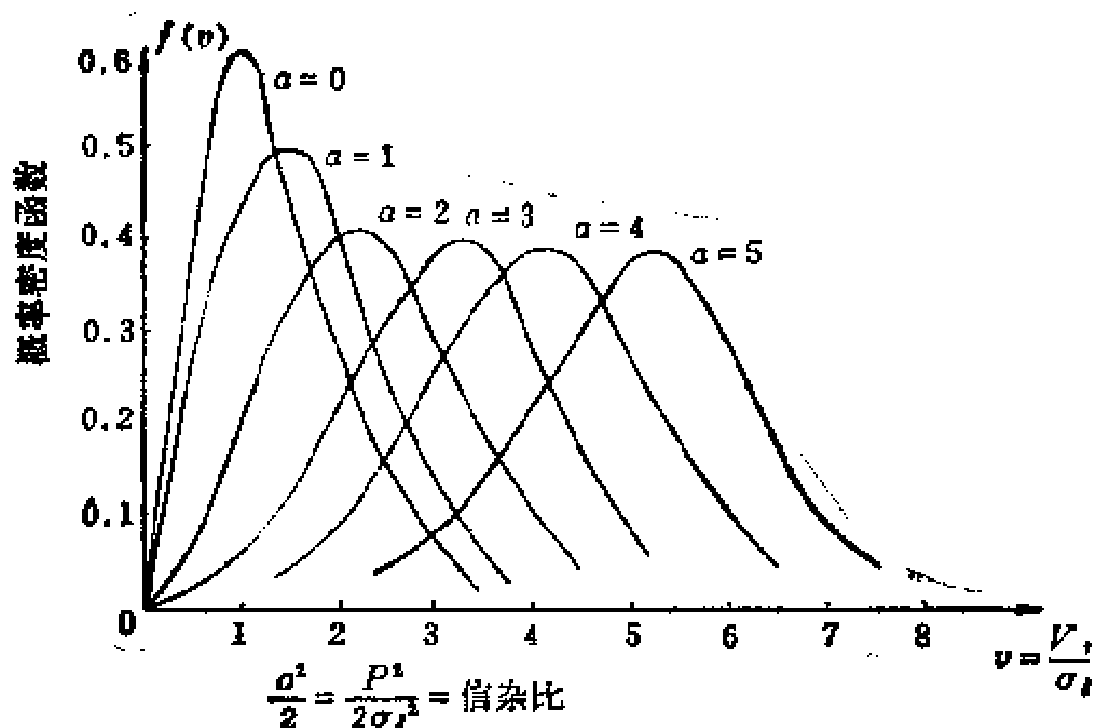


图 6-1

当贝塞尔函数的自变量取较大的值时，零级修正贝塞尔函数可近似地表示成

$$I_0(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} + \cdots\right) \quad (51)$$

因此当 $PV_t \gg \sigma_\xi^2$ 时 $f(V_t)$ 的近似表示式为

$$f(V_t) = \frac{1}{\sigma_\xi}\left(\frac{V_t}{2\pi P}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(V_t - P)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \quad (52)$$

由 (52) 式可知，当 V_t 接近于 P，且 $P \gg \sigma_\xi$ 时，概率密度接近于正态分布。

§7 高斯随机过程通过非线性系统

在无线电技术中常常会遇到一些非线性器件。随机信号和噪声通过这些器件后，它的统计特性将如何变化，这是我们极为关心的问题。经常遇到的非线性器件有检波器、限幅器。

研究本问题时，首先假定非线性器件内没有存储能量的元件，即在 t 时的输出 $\eta(t)$ 只与该时刻 t 的输入 $\xi(t)$ 有关，而与 t 以前的输入无关，即非线性器件输出输入的关系式为

$$y(t)=g(x(t)) \tag{1}$$

如果给定了输入过程 $\xi(t)$ 的分布，则可以利用（1）式作变量置换，求输出过程 $\eta(t)$ 的分布，即

$$P\{\eta_t<y\}=P_\xi\{\xi_t\in A(y)\} \tag{2}$$

即随机变量 η_t 位于（$-\infty<\eta_t<y$）内的概率相当于随机变量 ξ_t 位于空间 $x\in A(-\infty,y)$ 内的概率。空域 $x\in A(-\infty,y)$ 由（1）式得到。如果（2）式的导数存在，对（2）式求导可求得 η_t 的概率密度。

如果输入过程 $\xi(t)$ 的概率密度为 $f_{\xi_t}(x_t)$（存在且几乎处处连续），如果 y 和 x 的关系为一一对应关系，则输出的概率密度为

$$f_{\eta_t}(y)=f_{\xi_t}(x_t)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{3}$$

通常所关心的是输出 $\eta(t)$ 的一些统计特性，如 $\eta(t)$ 的数学期望、相关函数等，这些可以直接利用 $\xi(t)$ 的一维、二维概率密度求得：

$$E\{\eta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x_t)f_{\xi_t}(x_t)dx_t \tag{4}$$

$$E\{[\eta(t)]^n\}=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x_t)]^n f_{\xi_t}(x_t)dx_t \qquad (5)$$

输出 $\eta(t)$ 在 t_1、t_2 时刻的相关函数为

$$R_\eta(t_1,\ t_2)=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x_{t_1})g(x_{t_2})f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_{t_1},x_{t_2})dx_{t_1}dx_{t_2} \qquad (6)$$

式中 $f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_{t_1},\ x_{t_2})$ 代表在 t_1、t_2 时刻 $\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$ 的联合概率密度。

例一　随机噪声通过平方律检波器

图 6-2 给出全波平方律检波器的方框图。



图　6-2

框图（Ⅰ）为一非线性器件，它的输出输入关系满足

$$y=ax^2 \qquad (7)$$

式中 a 为常数。框图（Ⅱ）代表一个低通滤波器。（Ⅰ）、（Ⅱ）两部分合起来称为全波平方律检波器。

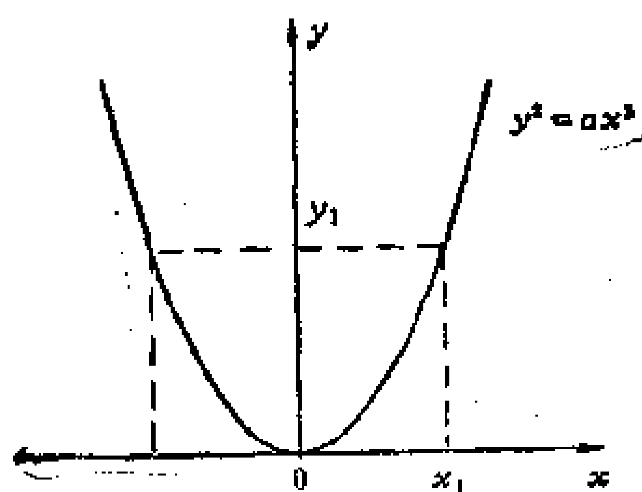


图　6-3

解 根据（2）式，当 $y<0$ 时，$P\{\eta_t<y<0\}=0$
当 $y\geqslant0$ 时，

$$P\{\eta_t<y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y_t}{a}}<\xi_t<\sqrt{\frac{y_t}{a}}\right\}$$

$$=P\left\{\xi_t<\sqrt{\frac{y_t}{a}}\right\}-P\left\{\xi_t\leqslant-\sqrt{\frac{y_t}{a}}\right\}$$

所以
$$f_{\eta_t}(y)=\frac{f_{\xi_t}\left(x_t=\sqrt{\frac{y_t}{a}}\right)+f_{\xi_t}\left(x_t=-\sqrt{\frac{y_t}{a}}\right)}{2\sqrt{ay_t}}$$

（8）

$$E(y_t^n)=a^n\int_{-\infty}^{\infty}x_t^{2n}\ f_{\xi_t}(x_t)dx_t=a^nE\{\xi_t^{2n}\} \qquad (9)$$

$\eta(t)$ 在 t_1、t_2 的相关函数为

$$R_\eta(t_1,t_2)=a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_{t_1}^2x_{t_2}^2f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_{t_1},x_{t_2})dx_{t_1}dx_{t_2}$$
$$=a^2E\{\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\} \qquad (10)$$

如果输入 $\xi(t)$ 为二级严平稳随机过程，即 $\xi(t)$ 的两维分布仅和 t_1-t_2 有关，则 $R_\eta(t_1,\ t_2)$ 也仅是 t_1-t_2 的函数。根据（9）、(10) 两式可知，如果输入是二级严平稳过程，则输出是宽平稳过程。

假定输入为高斯过程，且其均值为零，则

$$f_\xi(x_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_\xi}\exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

其中 σ_ξ^2 为 $\xi(t)$ 的方差，于是

$$f_\eta(y_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a y_t}\,\sigma_\xi}\exp\left\{-\dfrac{y_t}{2\sigma_\xi^2a}\right\} & (y_t\geqslant0)\\ 0 & (\text{其他 } y_t \text{ 值})\end{cases} \qquad (11)$$

η_t 是 $\chi^2(1)$ 分布。

如果输入 $\xi(t)$ 是一窄带平稳实高斯过程，则根据本章§5（5）式有

$$\xi(t) = V(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] \tag{12}$$

式中 $V(t)$ 反映它的包络，$\theta(t)$ 为随机相位。在§5中已找出了 $V(t)$ 和 $\theta(t)$ 的分布。

经过非线性器件（I）后的输出为

$$\begin{aligned}\eta(t) &= aV^2(t)\cos^2[2\pi f_0 t + \theta(t)] \\ &= \frac{aV^2(t)}{2} + \frac{aV^2(t)}{2}\cos[4\pi f_0 t + 2\theta(t)]\end{aligned} \tag{13}$$

上式中第一项反映的是低频分量，第二项反映的是调制载频为 $2f_0$ 的随机信号。如果（I）的输出 $\eta(t)$ 送到理想的低通滤波器（II）上，则（II）的输出 $\zeta(t)$ 仅保留（13）式的第一项。故

$$\zeta(t) = \frac{aV^2(t)}{2} \tag{14}$$

根据§5中（10）式，窄带高斯噪声的包络分布为瑞利分布

$$f(V_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}} & (V_t \geqslant 0) \\ 0 & (\text{其他 } V_t \text{ 值}) \end{cases} \tag{15}$$

由（14）式可知理想低通滤波器的输出 $\zeta(t)$ 的分布为

$$f_{\zeta_t}(z_t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{2z}{a}}}{\sigma_\xi^2} e^{-\frac{2z}{a\cdot 2\sigma_\xi^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{a}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{z}} \\ \quad = \dfrac{1}{a\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\dfrac{z}{a\sigma_\xi^2}\right\} & (z \geqslant 0) \\ 0 & (\text{其他 } z \text{ 值}) \end{cases} \tag{16}$$

$\zeta(t)$的分布是一指数分布。

现设$\sigma_\xi=1$，$a=1$(即归一化的情况)，把$\xi(t)$的分布、$\eta(t)$的分布、$\zeta(t)$的分布绘于同一图上，见图6-4。

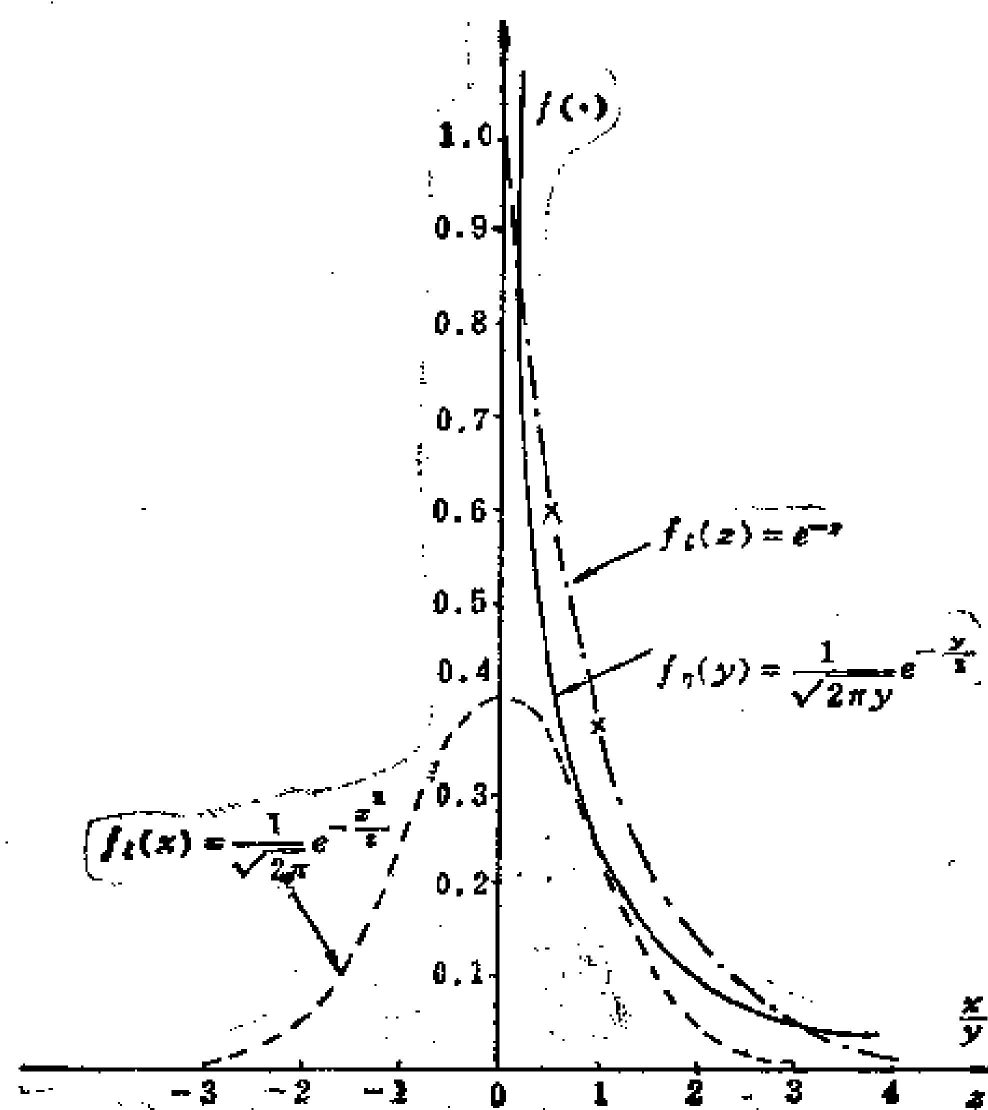


图 6-4

(Ⅰ)输出的各阶矩为

$$E\{\eta_t^n\}=a^nE\{\xi_t^{2n}\}$$

$$=a^n\int_{-\infty}^{\infty}x_t^{2n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}e^{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}}dx_t$$

$$= a^n \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\xi^{2n} \left(\frac{x_t}{\sigma_\xi}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}} d\left(\frac{x_t}{\sigma_\xi}\right)$$

$$= a^n \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\xi^{2n}\ u^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= a^n \sigma_\xi^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

$$= a^n \sigma_\xi^{2n} \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot u^{2n-1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

$$= a^n \sigma_\xi^{2n} (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \cdots = a^n \sigma_\xi^{2n} (2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \tag{17}$$

因此

$$\begin{cases} E\eta_t = a\sigma_\xi^2 \\ E[\eta_t^2] = 3a^2\sigma_\xi^4 \\ D\eta_t = E[\eta_t^2] - \{E[\eta_t]\}^2 = 2a^2\sigma_\xi^4 \end{cases} \tag{18}$$

（Ⅱ）输出的各阶矩为

$$E\{\zeta_t^n\} = \int_0^{\infty} \frac{z^n}{a\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{z}{a\sigma_\xi^2}\right\} dz = n!\, a^n \sigma_\xi^{2n} \tag{19}$$

$$E\zeta_t = a\sigma_\xi^2 = E\eta_t \tag{20}$$

$$E\{\zeta_t^2\} = 2a^2\sigma_\xi^4$$

$$D\zeta_t = E\{\zeta_t^2\} - [E\{\zeta_t\}]^2 = a^2\sigma_\xi^4 \tag{21}$$

从(18)、(20)，(21)式可知，（Ⅰ）输出的均值$E(\eta_t)$和理想滤波器输出的均值$E(\zeta_t)$是相等的，它等于a乘以输入$\xi(t)$的方差σ_ξ^2。而理想滤波器输出$\zeta(t)$的方差$D\zeta$是（Ⅰ）

输出 $\eta(t)$ 的方差 $D\eta_t$ 的一半。

现在来研究平方律器件输出的相关函数。

$$R_\eta(t_1,t_2)=a^2E\{\xi_{t_1}^2\xi_{t_2}^2\}$$

$$=a^2[R_\xi(0)]^2+2a^2[R_\xi(\tau)]^2$$

$$=a^2\sigma_\xi^4+2a^2[R_\xi(\tau)]^2 \qquad (22)$$

其中 $\tau=t_1-t_2$，故 $\eta(t)$ 是平稳过程。$R_\eta(t_1,t_2)=R_\eta(t)$

$$R_\eta(\tau)=a^2\sigma_\xi^4+2a^2[R_\xi(\tau)]^2 \qquad (23)$$

对(23)式取傅氏变换得 $\eta(t)$ 的功率谱密度

$$S_\eta(f)=a^2\sigma_\xi^4\delta(f)+2a^2\int_{-\infty}^{\infty}[R_\xi(\tau)]^2e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

因 $\int_{-\infty}^{\infty}[R_\xi(\tau)]^2e^{-j2\pi f\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(f')e^{j2\pi f'\tau}df'\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(f')\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau)e^{-j2\pi(f-f')\tau}d\tau df'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(f')S_\xi(f-f')df'$$

故 $S_\eta(f)=a^2\sigma_\xi^4\delta(f)+2a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(f')S_\xi(f-f')df'\cdots$

(24)

从 (24) 式可知，平方律器件输出 $\eta(t)$ 的功率谱密度中包括两部分：① $a^2\sigma_\xi^4\delta(f)$，它相当于 $\eta(t)$ 的均值。② $2a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(f')S_\xi(f-f')df$，它为 $2a^2$ 乘以 $S_\xi(f)$ 自身的卷积。

为了进一步说明问题起见，假设输入窄带高斯噪声的功率谱密度为

$$S_\xi(f)=\begin{cases}A & \left(f_0-\dfrac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\dfrac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & \text{(其他频率区域)}\end{cases} \qquad (25)$$

其中 Δf 为带宽，f_0为中心频率，于是

$$\sigma_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f)\,df = 2A \cdot (\Delta f) \tag{26}$$

根据(24)式，$S_\eta(f)$中的第一部分即 η (t) 的均值或 $S_\eta(f)$ 中的直流分量为

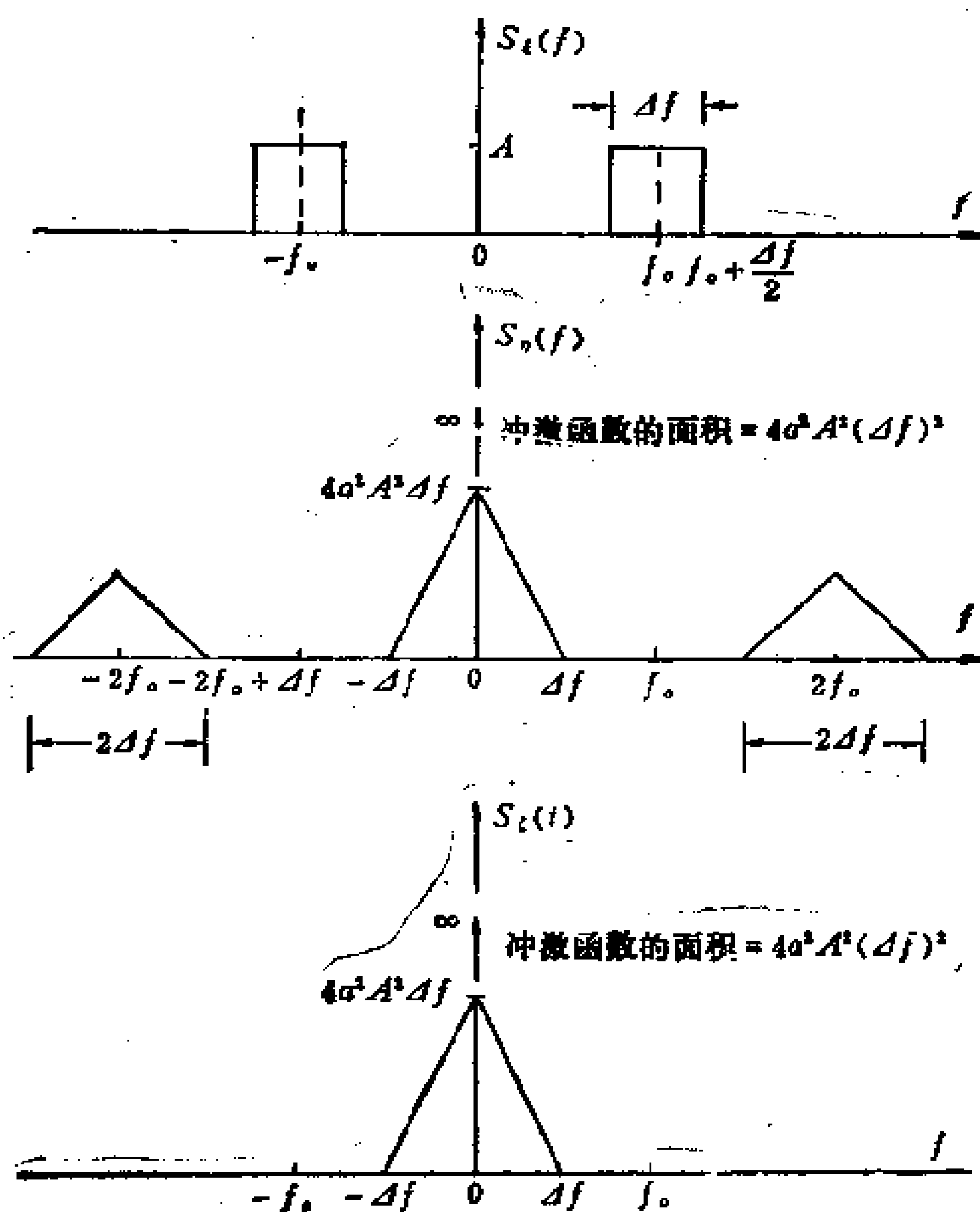


图 6-5

$$S_{\bar{\eta}}(f) = 4A^2(\Delta f)^2 a^2 \delta(f) \tag{27}$$

$S_\eta(f)$中的第二部分为

$$[S_\eta(f)]_2 = \begin{cases} 4a^2A^2(\Delta f - |f|) & (0 < |f| \leqslant \Delta f) \\ 2a^2A^2(\Delta f - ||f| - 2f_0|) & \\ & (2f_0 - \Delta f < |f| \leqslant 2f_0 + \Delta f) \\ 0 & (\text{其他频率}) \end{cases} \tag{28}$$

它的功率谱密度的图形见图6-5。

从$\eta(t)$的功率谱密度中可以看出它仍然是窄带的，不过带宽增加了一倍。把$\eta(t)$送至理想的低通滤波器，则它的输出$\zeta(t)$仅留下了$S_\eta(f)$中的低频分量，而在$\pm 2f_0$附近的功率谱密度分量全部被滤去了。于是

$$S_\zeta(f) = S_{\bar{\zeta}}(f) + [S_\zeta(f)]_2 \tag{29}$$

其中

$$S_{\bar{\zeta}}(f) = 4a^2A^2(\Delta f)^2\delta(f) \tag{30}$$

$$[S_\zeta(f)]_2 = \begin{cases} 4a^2A^2(\Delta f - |f|) & (0 < |f| < \Delta f) \\ 0 & (\text{其他频率范围}) \end{cases} \tag{31}$$

而根据（18）式有

$$E\eta_t = 2aA\Delta f \tag{32}$$

$$D\eta_t = 8a^2A^2(\Delta f)^2 \tag{33}$$

根据(20)、(21)式得

$$E\zeta_t = 2aA(\Delta f) \tag{34}$$

$$D\zeta_t = 4a^2A^2(\Delta f)^2 \tag{35}$$

（32）—（35）的结果和功率谱密度$S_\eta(f)$、$S_\zeta(f)$是一致的。

例二　信号加噪声通过平方律检波器

如果平方律检波器的输入是随机信号$S(t)$和随机噪声$n(t)$之和，即

$$\xi(t) = S(t) + n(t) \tag{36}$$

设信号 s (t) 和噪声 n (t)是统计独立的实平稳随机过程，且 s(t)和 n(t)的均值均为零，此时平方律器件的输出为

$$\eta(t) = a[\xi(t)]^2 = a[s(t) + n(t)]^2$$
$$= a[s^2(t) + 2s(t)n(t) + n^2(t)]$$

所以

$$E\eta_t = E\{as^2(t) + 2as(t)n(t) + an^2(t)]$$
$$= aE\{s^2(t)\} + aE\{n^2(t)]$$
$$= a(\sigma_s^2 + \sigma_n^2) = 常数 \tag{37}$$

$$E(\eta_t^2) = a^2E\{[s(t) + n(t)]^4\}$$
$$= a^2\{E[s^4(t)] + 4E[s(t)n^3(t)]$$
$$+ 6E[s^2(t)n^2(t)]$$
$$+ 4E[s^3(t)n(t)] + E[n^4(t)]\}$$
$$= a^2\{E[s^4(t)] + 6\sigma_s^2\sigma_n^2 + E[n^4(t)]\} \tag{38}$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$
$$= a^2E\{[s(t_1) + n(t_1)]^2[s(t_2) + n(t_2)]^2\}$$
$$= a^2E\{s^2(t_1)s^2(t_2)\}$$
$$+ a^2 4E\{s(t_1)s(t_2)\}E\{n(t_1)n(t_2)\}$$
$$+ a^2E\{n^2(t_1)n^2(t_2)\} + a^2E\{s^2(t_1)\}E\{n^2(t_2)\}$$
$$+ a^2E\{s^2(t_2)\}E\{n^2(t_1)\} \tag{39}$$

由于假定输入过程 s(t) 和 n (t)均为平稳过程，设 $\tau = t_1 - t_2$，则

$$E\{s^2(t_1)s^2(t_2)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_{t_1}^2 s_{t_2}^2 f(s_{t_1}, s_{t_2})ds_{t_1}ds_{t_2}$$
$$= R_{s^2}(\tau)$$

$$E\{n^2(t_1)n^2(t_2)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} n_{t_1}^2 n_{t_2}^2 f(n_{t_1}, n_{t_2})dn_{t_1}dn_{t_2}$$

$$= R_{n^2}(\tau)$$

故 $R_y(t_1,t_2)$仅是τ的函数，即

$$\begin{aligned} R_y(\tau) = R_y(t_1,t_2) &= a^2[R_{s^2}(\tau) \\ &+ 4R_s(\tau)R_n(\tau) + R_{n^2}(\tau) + 2\sigma_s^2\sigma_n^2] \\ &= R_{s\times s}(\tau) + R_{s\times n}(\tau) + R_{n\times n}(\tau) \end{aligned} \tag{40}$$

其中

$$\begin{cases} R_{s\times s}(\tau) = a^2R_{s^2}(\tau) \\ R_{s\times n}(\tau) = a^2[4R_s(\tau)R_n(\tau) + 2\sigma_s^2\sigma_n^2] \\ R_{n\times n}(\tau) = a^2R_{n^2}(\tau) \end{cases} \tag{41}$$

(41) 式中$R_{s\times s}$代表由信号本身相互作用的结果，$R_{n\times n}$代表由噪声本身相互作用的结果，$R_{s\times n}$代表信号和噪声相互作用的结果。而(40)式中$R_y(\tau)$是由这三个分量所组成的。

对(40)式取傅氏变换得

$$S_y(f) = S_{s\times s}(f) + S_{s\times n}(f) + S_{n\times n}(f) \tag{42}$$

其中 $$S_{s\times s}(f) = a^2\int_{-\infty}^{\infty} R_{s^2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{43}$$

$$S_{n\times n}(f) = a^2\int_{-\infty}^{\infty} R_{n^2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{44}$$

$$\begin{aligned} S_{s\times n}(f) &= 4a^2\int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)R_n(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &\quad + 2a^2\sigma_s^2\sigma_n^2\delta(f) \\ &= 4a^2\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f')S_s(f-f')df' + 2a^2\sigma_s^2\sigma_n^2\delta(f) \end{aligned} \tag{45}$$

式中$S_s(f)$和$S_n(f)$代表$s(t)$和$n(t)$的功率谱密度。$S_{s\times n}(f)$中第一项为$S_n(f)$和$S_s(f)$的卷积，第二项是直流分量。出现$S_{s\times n}(f)$意味着输出端的噪声由于信号的存在而增加了。

为了进一步说明问题，假定输入噪声为窄带平稳实高斯随机过程，其均值为零。输入随机信号为 $S(t) = P\cos(2\pi f_0 t$

$+\varphi)$ 若 $P=$常数，φ 为 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布的随机变量，且 ϕ 和 $n(t)$ 是相互统计独立的，于是

$$R_{n\times n}(\tau)=a^2R_{n^2}(\tau)=a^2E\{n^2(t_1)n^2(t_2)\}$$
$$=a^2\sigma_n^4+2a^2R_n^2(\tau) \tag{46}$$

$$S_{n\times n}(f)=2a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f')S_n(f-f')df'+a^2\sigma_n^4\delta(f) \tag{47}$$

比较(46)、(47)两式和例一中(23)、(24)两式可知，$R_{n\times n}(\tau)$、$S_{n\times n}(f)$ 代表信号为零时的输出相关函数和功率谱密度。

为求其他两个分量 $R_{s\times s}(\tau)$ 和 $R_{s\times n}(\tau)$，先求输入信号的相关函数

$$R_s(\tau)=R_s(t_1, t_2)$$
$$=P^2E\{\cos(2\pi f_0t_1+\phi)\cos(2\pi f_0t_2+\varphi)\}$$
$$=P^2\frac{1}{2}\cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]$$
$$+\frac{P^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi]d\phi$$
$$=\frac{P^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) \tag{48}$$

所以 $$S_s(f)=\frac{P^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \tag{49}$$

从(41)式可知

$$R_{s\times n}(\tau)=2a^2P^2R_n(\tau)\cos2\pi f_0\tau+a^2p^2\sigma_n^2 \tag{50}$$

故 $$S_{s\times n}(f)=a^2P^2\{S_n(f-f_0)+S_n(f+f_0)\}$$
$$+a^2P^2\sigma_n^2\delta(f) \tag{51}$$

最后得 $E\{s^2(t_1)s^2(t_2)\}$

$$= P^4 E\{\cos^2(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos^2(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\}$$

$$= \frac{P^4}{4} + \frac{P^4}{8}\cos 4\pi f_0 (t_1 - t_2)$$

$$= \frac{P^4}{4} + \frac{P^4}{8}\cos 4\pi f_0 \tau$$

故
$$R_{s\times s}(\tau) = \frac{a^2P^4}{4} + \frac{a^2P^4}{8}\cos 4\pi f_0 \tau \tag{52}$$

$$S_{s\times s}(f) = \frac{a^2P^4}{4}\delta(f) + \frac{a^2P^4}{16}[\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)] \tag{53}$$

综合（46）—（53）式得

$$R_\eta(\tau) = a^2\left(\frac{P^2}{2} + \sigma_n^2\right)^2 + 2a^2R_n^2(\tau) + 2a^2P^2R_n(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \frac{a^2P^4}{8}\cos 4\pi f_0\tau \tag{54}$$

$$S_\eta(f) = a^2\left(\frac{P^2}{2} + \sigma_n^2\right)^2\delta(f) + 2a^2\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f')S_n(f-f')df' + a^2P^2[S_n(f-f_0) + S_n(f+f_0)] + \frac{a^2P^4}{16}[\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)] \tag{55}$$

（54）、（55）式中的第一项代表 $\eta(t)$ 的均值，即

$$E(\eta_t) = a\left[\frac{P^2}{2} + \sigma_n^2\right] \tag{56}$$

$$E(\eta_t^2)=R_\eta(0)=a^2\left(\frac{P^2}{2}+\sigma_n^2\right)^2$$

$$+2a^2\sigma_n^4+2a^2P^2\sigma_n^2+\frac{a^2P^4}{8}$$

所以 $D\eta_t=E(\eta_t^2)-[E(\eta_t)]^2$

$$=2a^2\left(\frac{P^4}{16}+P^2\sigma_n^2+\sigma_n^4\right) \tag{57}$$

若假定输入噪声 n(t) 的功率谱密度为

$$S_n(f)=\begin{cases}A & \left(f_0-\frac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\frac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & (\text{其他频率范围})\end{cases} \tag{58}$$

其中 Δf 为带宽，f_0 为中心频率，$\Delta f\ll f_0$，于是平方律检波器的输入功率谱密度为

$$S_\xi(f)=S_s(f)+S_n(f)$$

$$=\frac{P^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$+\begin{cases}A & \left(f_0-\frac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\frac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases} \tag{59}$$

于是

$$S_{n\times n}(f)=4a^2A^2(\Delta f)^2\delta(f)$$

$$+\begin{cases}4a^2A^2(\Delta f-|f|) & (0<|f|<\Delta f)\\ 2a^2A^2(\Delta f-||f|-2f_0|) & \\ & (2f_0-\Delta f<|f|<2f_0+\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases} \tag{60}$$

$S_{n\times n}(f)$ 为仅有噪声存在时，在平方律器件输出端得到的功率谱密度，这结果就是例（一）的结果。

从(53)式可知 $S_{s\times s}(f)$ 包含有三个分量，即三个冲激函数，一个位于 $f=0$，其他二个分别位于 $f=\pm 2f_0$，冲激函数的面积分别为 $\frac{a^2P^4}{4}$，$\frac{a^2P^4}{16}$，$\frac{a^2P^4}{16}$。

从(51)式可知

$$S_{s\times n}(f)=2a^2P^2A(\Delta f)\delta(f)$$

$$+\begin{cases}2a^2P^2A & \left(0<|f|<\frac{\Delta f}{2}\right)\\ a^2P^2A & \left(2f_0-\frac{\Delta f}{2}<|f|<2f_0+\frac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases} \quad (61)$$

现画出各分量及 $\eta(t)$ 的功率谱密度，见图6-6。

把 $\eta(t)$ 送往理想低通滤波器，则其输出 $\zeta(t)$ 的功率谱密度为

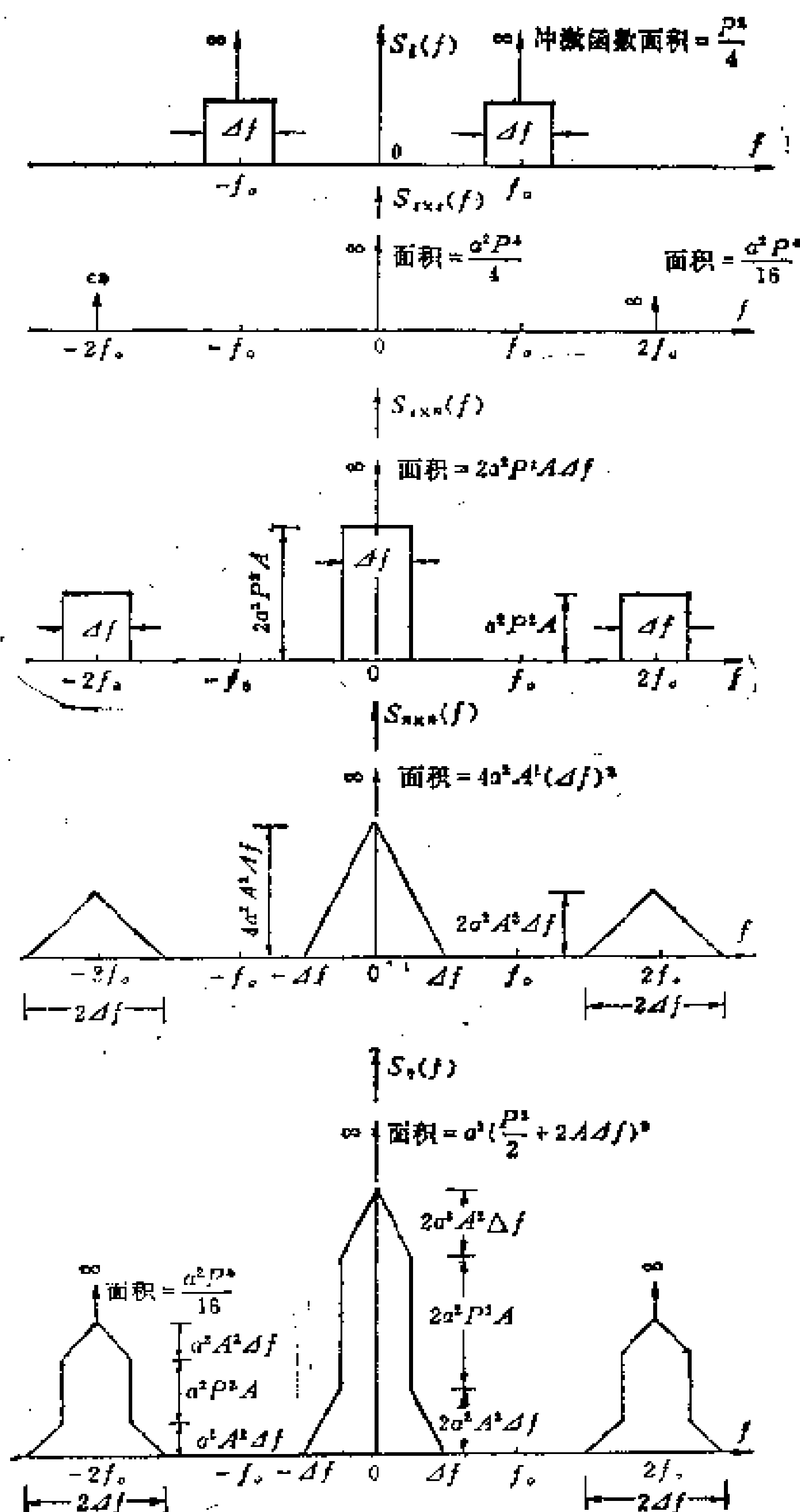
$$S_{\zeta}(f)=a^2\left(\frac{P^2}{2}+2A\Delta f\right)^2\delta(f)$$

$$+\begin{cases}2a^2P^2A & \left(0<|f|\leqslant\frac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases}$$

$$+\begin{cases}4a^2A^2(\Delta f-|f|) & (0<|f|\leqslant\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases} \quad (62)$$

(62)式中第二项是由于信号和噪声相互作用而引起的，第三项是由于噪声和噪声自身作用而引起的，这两项均系输出的噪声分量。现比较这两项的大小，即比较这两部分功率谱密度曲线下的面积，即求 $\sigma^2(\zeta_{s\times n})$ 和 $\sigma^2(\zeta_{n\times n})$ 之比：

$$\frac{\sigma^2(\zeta_{s\times n})}{\sigma^2(\zeta_{n\times n})}=\frac{2a^2P^2A\Delta f}{4a^2A^2\Delta f(\Delta f)}$$



$S_i(f)$
冲激函数面积 = $\frac{P^2}{4}$
Δf
$-f_o$
f_o
$S_{xx}(f)$
面积 = $\frac{a^2P^4}{4}$
面积 = $\frac{a^2P^4}{16}$
$-2f_o$
$2f_o$
$S_{xxn}(f)$
面积 = $2a^2P^2A\Delta f$
$2a^2P^2A$
a^2P^2A
$S_{nxn}(f)$
面积 = $4a^2A^2(\Delta f)^2$
$4a^2A^2\Delta f$
$2a^2A^2\Delta f$
$2\Delta f$
$S_y(f)$
面积 = $a^2(\frac{P^2}{2}+2A\Delta f)^2$
$2a^2A^2\Delta f$
$2a^2P^2A$
面积 = $\frac{a^2P^4}{16}$
$a^2A^2\Delta f$
a^2P^2A

图 6-6

$$= \frac{P^2}{2A(\Delta f)} = 2\frac{P^2/2}{2A(\Delta f)} = 2\left(\frac{S}{N}\right)_i \qquad (63)$$

此比值为输入端信杂比的两倍。因此，当提高输入端信杂比时，信号和噪声相互作用而引起的输出噪声所占比重增大，而噪声和噪声本身作用引起的输出噪声所占的比重减小。

例三　调幅正弦信号加噪声通过平方律检波器

例二中的随机相位正弦信号是等幅的，即它是纯正弦波形。本例将讨论幅度受到调制的情况，即

$$s(t) = P(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \qquad (64)$$

其中 φ 是(0, 2π)内均匀分布的随机变量。P(t)是实平稳随机过程，且 P(t)、φ 和噪声均是相互统计独立的。噪声 n(t)是窄带平稳实高斯随机过程，因而它的均值为零，例 2 中(40)、(41)、(42)式均可利用。$R_{n\times n}(\tau)$或$S_{n\times n}(f)$这一项和例二中完全相同。

$$R_s(\tau) = E\{P(t_1)P(t_2)\}$$
$$\cdot E\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\}$$
$$= \frac{1}{2}R_p(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau) \qquad (65)$$

其中 $R_p(\tau)$代表调制信号 P(t)的相关函数，于是

$$S_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}R_p(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}R_p(\tau)\,[e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}$$
$$+ e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}]d\tau$$
$$= \frac{1}{4}[S_p(f-f_0) + S_p(f+f_0)] \qquad (66)$$

其中 $S_p(f)$代表调制信号 P(t)的功率谱密度。根据(41)式有

$$R_{s\times n}(\tau)=2a^2R_p(\tau)R_n(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$
$$+a^2R_p(0)\sigma_n^2 \tag{67}$$

上式相应的功率谱密度为

$$S_{s\times n}(f)=2a^2\int_{-\infty}^{\infty}R_p(\tau)R_n(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$
$$\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau+a^2R_p(0)\sigma_n^2\delta(f)$$
$$=a^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f')e^{j2\pi f'\tau}df'\right]R_p(\tau)$$
$$\cdot[e^{-j2\pi(f-f_0)\tau}+e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}]d\tau$$
$$+a^2R_p(0)\sigma_n^2\delta(f)$$
$$=a^2\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f')[S_p(f-f_0-f')$$
$$+S_p(f+f_0-f')]df'$$
$$+a^2R_p(0)\sigma_n^2\delta(f) \tag{68}$$

由信号本身相互作用在平方律器件输出端所得分量的相关函数为

$$R_{s\times s}(\tau)=a^2E\{P^2(t_1)P^2(t_2)\}$$
$$\cdot E\{\cos^2(2\pi f_0t_1+\phi)\cos^2(2\pi f_0t_2+\varphi)\}$$
$$=\frac{1}{4}a^2R_{p^2}(\tau)+\frac{1}{8}a^2R_{p^2}(\tau)\cos4\pi f_0\tau \tag{69}$$

式中 $R_{p^2}(\tau)$ 代表 $E\{P^2(t_1)P^2(t_2)\}$ 即调制过程平方后的相关函数。与 $R_{s\times s}(\tau)$ 相应的功率谱密度为

$$S_{s\times s}(f)=\frac{1}{4}a^2S_{p^2}(f)+\frac{1}{16}a^2$$
$$\cdot[S_{p^2}(f-2f_0)+S_{p^2}(f+2f_0)] \tag{70}$$

式中 $S_{p^2}(f)$ 代表调制过程平方后的功率谱密度。

比较例二、例三中的(51)式和(68)式、(53)式和(70)式发现，在 $s\times n$ 分量中，在未调制情况下包括 $S(f-f_0)$ 和

$S(f+f_0)$ 两项，而在调制情况下包括 $S_n(f-f_0)$、$S_p(f)$ 的卷积和 $S_n(f+f_0)$、$S_p(f)$ 的卷积；在 s×s 分量中，在未调制情况下包括三个冲激函数，而在调制情况下包括 $S_{p^2}(f)$、$S_{p^2}(f-2f_0)$、$S_{p^2}(f+2f_0)$ 三个分量。也就是说，在调制情况下相当于把未调制情况下的各个分量在功率谱密度上加以散开。

在无线电技术中所关心的问题是经过非线性变换输入输出间信杂比的变化。在本例中就是要研究经过平方律检波后输出的信杂比。

在检波器后反映信号的输出功率为

$$S_0=\frac{1}{4}a^2R_{p^2}(0)=\frac{1}{4}a^2E[P^4] \tag{71}$$

此结果由(69)式滤去 $2f_0$ 附近的分量后使 $\tau=0$ 即可得到。而在检波器输入端信号的功率为

$$S_i=R_s(0)=\frac{1}{2}R_p(0)=\frac{1}{2}E(P^2) \tag{72}$$

因此

$$\frac{S_0}{S_i^2}=a^2\frac{E[P^4]}{\{E[P^2]\}^2}=a^2k_p$$

或

$$S_0=a^2k_pS_i^2 \tag{73}$$

$$K_p=\frac{E[P^4]}{[E(P^2)]^2} \tag{74}$$

由(74)式可知，k_p 仅和调制信号的分布有关，而如果把输入调制信号从 $P(t)$ 增加到 $\alpha P(t)$，其 $P(t)$ 的分布不变，则 k_p 为常数。(73)式指出了平方律检波的输出功率正比于输入功率的平方。

由(68)、(61)、(60)式可知，在非线性器件后噪声功率的

一半集中在低频范围，一半集中在 $2f_0$ 附近。因此，根据（46）式和(67)式，略去其直流分量并取其 1/2 即可得到在平方律检波器输出端的噪声功率为

$$N_o = \frac{1}{2}[2a^2R_n^2(0) + 2a^2R_p(0)R_n(0)]$$
$$= a^2[\sigma_n^4 + \sigma_n^2E(P^2)] \tag{75}$$

因为 $S_i = \frac{1}{2}E(P^2)$ （输入端信号功率）

$N_i = \sigma_n^2$ （输入端噪声功率）

故 $$N_0 = a^2N_i^2\left(1 + 2\frac{S_i}{N_i}\right) \tag{76}$$

这一结果和未调制随机相位正弦信号的结果是一致的（比较(63)式）。

由(73)、(76)式求得输出端的信杂比为

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right) = \frac{a^2k_pS_i^2}{a^2N_i^2\left(1 + 2\frac{S_i}{N_i}\right)} = k_p\frac{\left(\frac{S_i}{N_i}\right)^2}{1 + 2\left(\frac{S_i}{N_0}\right)} \tag{77}$$

当输入信杂比大大于 1 时，输出端的信杂比为

$$\frac{S_0}{N_0} \approx \frac{k_p}{2}\left(\frac{S_i}{N_i}\right) \tag{78}$$

当输入信杂比小小于 1 时，输出端的信杂比为

$$\frac{S_o}{N_o} = k_p\left(\frac{S_i}{N_i}\right)^2 \tag{79}$$

由(78)、(79)式可知，当输入信杂比大时，输出信杂比正比于输入信杂比，而当输入信杂比小时，输出信杂比正比于输入信杂比的平方。这一结果说明，检波器具有抑制小信号的

效应（不仅平方律检波，其他检波器也有此性能）。

例四 半波线性检波器的研究

图 6-7 给出了半波线性检波器的方框图。



图 6-7

图中 I 为半波线性器件，其输出输入间的关系如下：

$$\begin{cases} y = bx & (x \geqslant 0) \\ y = 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{80}$$

b 为比例常数；II 为理想低通滤波器。

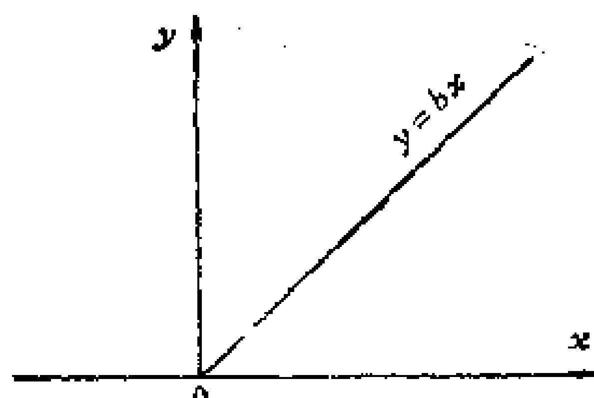


图 6-8

设输入过程 $\xi(t)$ 是平稳随机过程， I 的输出为 $\eta(t)$， II 的输出为 $\zeta(t)$。根据变量置换关系知

$$P\{\eta_t < y_t\} = \begin{cases} 0 & (y_t < 0) \\ P\left\{\xi_t < \frac{y_t}{b}\right\} & (y_t \geqslant 0) \end{cases}$$

即
$$P\{\eta_t<y_t\}=\begin{cases}0 & (y_t<0)\\ P\{\xi_t<0\}+\int_0^{\frac{y_t}{b}}f_{\xi_t}(x_t)dx_t & (y_t\geqslant 0)\end{cases} \tag{81}$$

对(81)式求导，得

$$f_{\eta_t}(y_t)=P\{\xi_t<0\}\delta(y_t)$$
$$+\frac{1}{b}f_{\xi_t}\left(x_t=\frac{y_t}{b}\right)U(y_t) \tag{82}$$

式中$U(y_t)$代表阶跃函数，$\delta(y_t)$为δ函数。

$\eta(t)$的n阶矩的表示式为

$$E\{\eta_t^n\}=b^n\int_0^\infty x_t^n f_{\xi_t}(x_t)dx_t \tag{83}$$

如果要进一步计算$E\{\eta_t^n\}$，则需要知道$\xi(t)$的概率密度。如果$\xi(t)$的概率密度是偶函数，则

$$E\{\eta_t^{2m}\}=b^{2m}\int_0^\infty x_t^{2m}f_{\xi_t}(x_t)dx_t$$
$$=\frac{b^{2m}}{2}\int_{-\infty}^\infty x_t^{2m}f_{\xi_t}(x_t)dx_t \tag{84}$$

即
$$E\{\eta_t^{2m}\}=\frac{b^{2m}}{2}E\{\xi_t^{2m}\}$$

即当$\xi(t)$的概率密度为偶函数时，输出过程的2m阶矩可用输入过程的2m阶矩表示之。

输出过程$\eta(t)$的相关函数为

$$R_\eta(t_1,t_2)=b^2\int_0^\infty\int_0^\infty x_{t_1}x_{t_2}$$
$$\cdot f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_{t_1},x_{t_2})dx_{t_1}dx_{t_2} \tag{85}$$

如果输入为窄带平稳实高斯过程，其均值为零，那么可

得以下的结果：

$$f_{\xi_t}(x_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \tag{86}$$

从(82)式可得半波线性器件的输出过程 $\eta(t)$ 的概率密度

$$f_{\eta_t}(y_t)=\frac{1}{2}\delta(y_t)+\frac{U(y_t)}{\sqrt{2\pi}\,b\sigma_\xi}\exp\left\{-\frac{y_t^2}{2b^2\sigma_\xi^2}\right\} \tag{87}$$

图 6-9 画出了归一化后 $\xi(t)$、$\eta(t)$的一维概率密度。

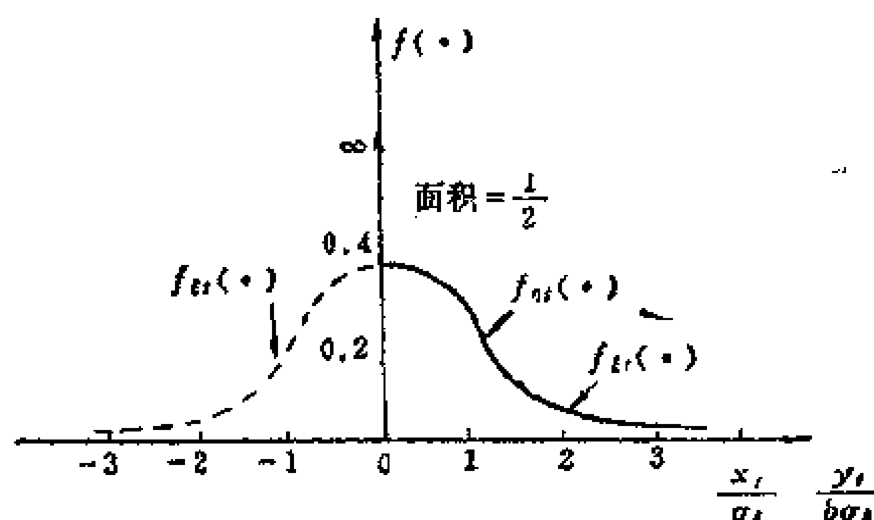


图 6-9

由于 $f_{\xi_t}(x_t)$是偶函数，故

$$E(\eta_t^{2m})=\frac{1}{2}b^{2m}\sigma_\xi^{2m}[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2m-1)] \tag{88}$$

η_t 的奇阶矩为

$$E(\eta_t^{2m+1})=\frac{b^{2m+1}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi}\int_0^\infty x_t^{2m+1}\exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}dx_t$$

$$=\frac{b^{2m+1}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x_t^{2m}}{\sigma_\xi^{2m}}\sigma_\xi^{2m+1}\exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}d\left(\frac{x_t^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

$$=\frac{2^{2m}\cdot m!}{\sqrt{2\pi}}b^{2m+1}\sigma_\xi^{2m+1}\qquad(m=0,1,2,\cdots)\tag{89}$$

所以 $$E\eta_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b\sigma_\xi\tag{90}$$

故 $\eta(t)$ 的方差为

$$D\eta_t=E(\eta_t^2)-[E(\eta_t)]^2$$

$$=\frac{1}{2}b^2\sigma_\xi^2-\frac{1}{2\pi}b^2\sigma_\xi^2=\frac{1}{2}b^2\sigma_\xi^2\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$$

$$=0.34084505\ b^2\sigma_\xi^2\tag{91}$$

根据(85)式求 $\eta(t)$ 的相关函数：

$$R_\eta(\tau)=R_\eta(t_1,t_2)=\frac{b^2}{2\pi\sigma_\xi^2[1-\rho^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x_{t_1}x_{t_2}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{x_{t_1}^2+x_{t_2}^2-2\rho(\tau)x_{t_1}x_{t_2}}{2\sigma_\xi^2[1-\rho^2(\tau)]}\right\}dx_{t_1}dx_{t_2},$$

其中 $$\rho(\tau)=\frac{E(x_{t_1}x_{t_2})}{\sigma_\xi^2}$$

设 $$u=\frac{x_{t_1}}{\{2\sigma_\xi^2[1-\rho^2(\tau)]\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$v=\frac{x_{t_2}}{\{2\sigma_\xi^2[1-\rho^2(\tau)]\}^{\frac{1}{2}}}$$

则上式化为

$$R_r(\tau)=\frac{2}{\pi}b^2\sigma_\xi^4[1-\rho^2(\tau)]^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty\int_0^\infty uv\cdot\exp\{-[u^2+v^2-2\rho(\tau)uv]\}dudv \tag{92}$$

为了求(92)式的值，先研究积分

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\{-(u^2+v^2-2wuv)\}dudv\quad(|w|\leqslant1) \tag{93}$$

$$\frac{dI}{dw}=2\int_0^\infty\int_0^\infty uv\exp\{-(u^2+v^2-2wuv)\}dudv$$

即

$$\int_0^\infty\int_0^\infty uv\exp\{-(u^2+v^2-2wuv)\}dudv=\frac{1}{2}\frac{dI}{dw} \tag{94}$$

为了求(93)式的积分，设

$$u=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\alpha}$$

$$v=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin\alpha}$$

把 u v 平面转到 $r\ \theta$ 平面。其中 $\cos\alpha=w$，因 $|w|\leqslant1$，则 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$。变换的雅可比为

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r}\\ \frac{\partial u}{\partial\theta} & \frac{\partial v}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\alpha} & \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin\alpha}\\ \frac{-r\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\alpha} & \frac{r\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin\alpha}\end{vmatrix}=r/\sin\alpha$$

而

$$u^2+v^2-2wuv$$

$$
=\frac{r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}
$$

$$
-\frac{2r^2\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}=r^2
$$

故积分

$$
I=\frac{1}{\sin\alpha}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}}re^{-r^2}drd\theta
$$

$$
=\frac{\pi-\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}w}{2\sqrt{1-w^2}}
$$

这是因为 $\cos\alpha=w$， 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}w$。

$$
\frac{dI}{dw}=\frac{\sqrt{1-w^2}\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}+\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}w\right)\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}}{2(1-w^2)}
$$

$$
=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-w^2)}+\frac{w}{2(1-w^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}w\right)
$$

故 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}uv\exp\{-(u^2+v^2-2wuv)\}dudv$

$$
=\frac{1}{4}\frac{1}{1-w^2}+\frac{w}{4(1-w^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}w\right) \quad (95)
$$

从(92)、(95)式得

$$
R_{\eta}(\tau)=\frac{1}{2\pi}b^2\sigma_{\xi}^2\left\{[1-\rho^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}\right.
$$

$$
\left.+\rho(\tau)\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\rho(\tau)\right]\right\} \quad (96)
$$

求 $\eta(t)$ 的功率谱密度要对 $R_\eta(\tau)$ 取傅氏变换。但对(96)式取傅氏变换是十分困难的。为了便于处理先对(96)式用台劳级数展开：

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{2\pi}b^2\sigma_\xi^2\left\{\left[1-\frac{1}{2}\rho^2(\tau)-\frac{\rho^4(\tau)}{2\cdot4}-\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\rho^6(\tau)-\cdots\right]+\rho(\tau)\left[\frac{\pi}{2}+\rho(\tau)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\rho^3(\tau)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\rho^5(\tau)+\cdots\right]\right\}$$

由于 $|\rho(\tau)|\leqslant1$，故级数是收敛的。对上式化简得

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{2\pi}b^2\sigma_\xi^2\left\{1+\frac{\pi}{2}\rho(\tau)+\frac{1}{2}\rho^2(\tau)+\frac{1}{24}\rho^4(\tau)+\frac{1}{80}\rho^6(\tau)+\cdots\right\}\tag{97}$$

由于 $|\rho(\tau)|\leqslant1$，故 $\rho(\tau)$ 的四次幂以及高于四次幂的各项与前三项相比均可忽略不计，这时可得 $R_\eta(\tau)$ 的近似表示式

$$R_\eta(\tau)=\frac{1}{2\pi}b^2\sigma_\xi^2+\frac{1}{4}b^2R_\xi(\tau)+\frac{b^2}{4\pi\sigma_\xi^2}R_\xi^2(\tau)\tag{98}$$

式中 $R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2\rho(\tau)$

根据(90)式可知

$$E\eta_t=\frac{b\sigma_\xi}{\sqrt{2\pi}}$$

根据(98)式可得 $\eta(t)$ 的方差 $D\eta_t$ 的近似值

$$[D\eta_t]_{\text{近似}}=R_\eta(0)-E\eta_t$$

$$= \frac{1}{4} b^2 R_\xi(0) + \frac{b^2}{4\pi\sigma_\xi^2} R_\xi^2(0)$$

$$= \frac{1}{4} b^2 \sigma_\xi^2 \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) = 0.32957747 b^2 \sigma_\xi^2 \qquad (99)$$

比较(99)式所得的 $D\eta_t$ 近似值和(91)式得到的 $D\eta_t$ 精确值可知两者的相对误差为3.3%，因此把 $R_\eta(\tau)$ 用级数展开取其前三项作为近似，所产生的误差不会超过3.3%。

对(98)式取傅氏变换得

$$S_\eta(f) = \frac{b^2\sigma_\xi^2}{2\pi}\delta(f) + \frac{b^2}{4} S_\xi(f)$$

$$+ \frac{b^2}{4\pi\sigma_\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f') S_\xi(f - f') df' \qquad (100)$$

式中 $S_\xi(f)$ 代表输入随机过程的功率谱密度。

如果输入随机过程的功率谱密度 $S_\xi(f)$ 具有如下的形式：

$$S_\xi(f) = \begin{cases} A & \left(f_0 - \frac{\Delta f}{2} < |f| < f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right) \\ 0 & (\text{其他频率范围}) \end{cases}$$

则 $$\sigma_\xi^2 = 2A(\Delta f)$$

则 $$S_\eta(f) = \frac{b^2}{\pi} A(\Delta f)\delta(f)$$

$$+ \begin{cases} \frac{b^2 A}{4} & \left(f_0 - \frac{\Delta f}{2} < |f| < f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right) \\ 0 & (\text{其他频率范围}) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \frac{b^2 A}{4\pi}\left(1 - \frac{|f|}{\Delta f}\right) & (0 < |f| < \Delta f) \\ \frac{b^2 A}{8\pi}\left(1 - \frac{1}{\Delta f}\left||f| - 2f_0\right|\right) & (2f_0 - \Delta f < |f| < 2f_0 + \Delta f) \\ 0 & (\text{其他频率范围}) \end{cases} \qquad (101)$$

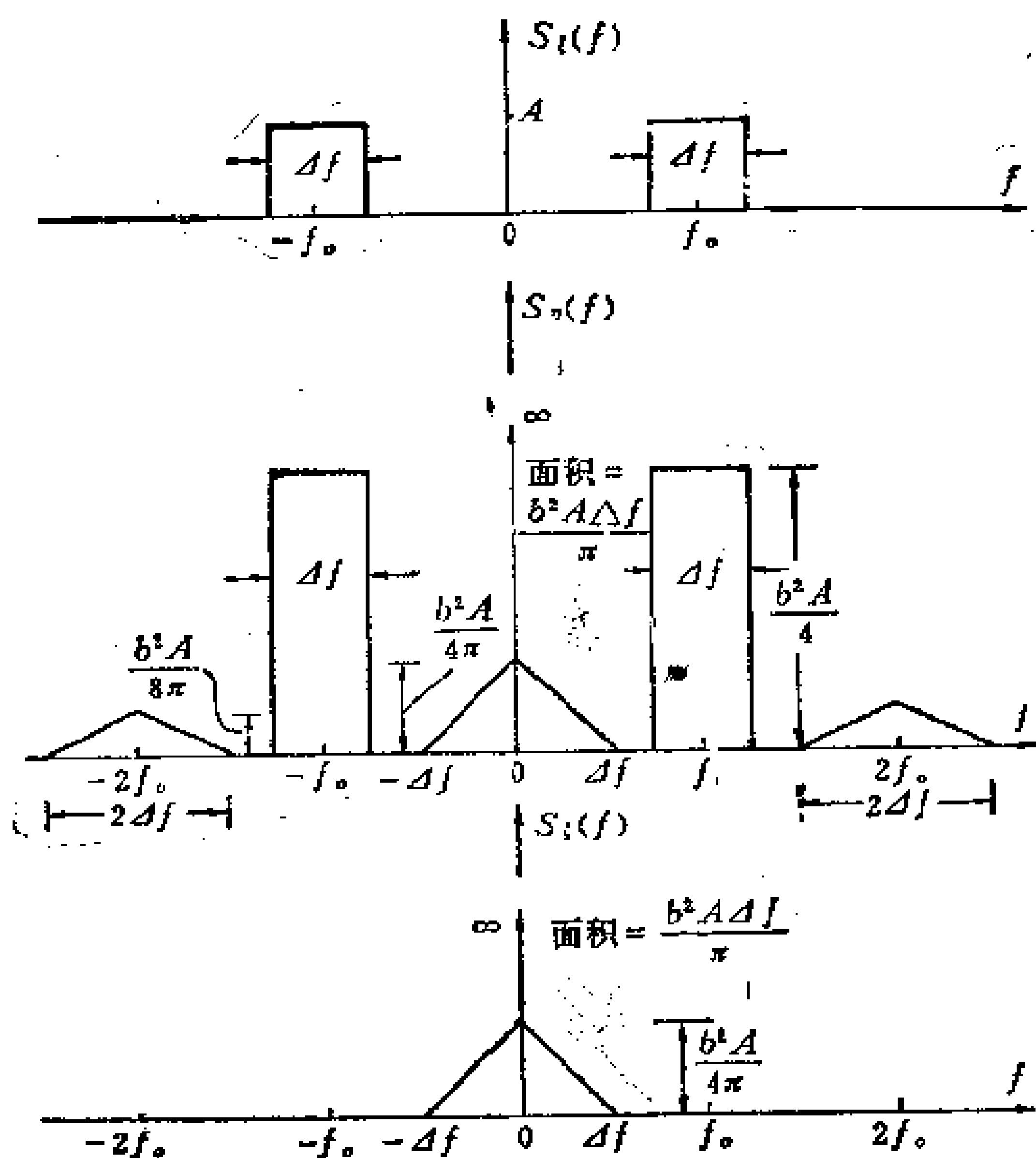


图 6-10

上述过程$\eta(t)$经过理想低通滤波器Ⅱ，在其输出端得随机过程$\zeta(t)$，$\zeta(t)$是半波线性检波器的输出，于是$\zeta(t)$的功率谱密度为

$$S_\zeta(f)=\frac{b^2}{\pi}A(\Delta f)\delta(f)$$

$$+\begin{cases}\dfrac{b^2A}{4\pi}\left(1-\dfrac{|f|}{\Delta f}\right) & (0<|f|<\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率范围})\end{cases} \quad (102)$$

图 6-10给出了输入和各输出过程$\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$的功率谱密度。

比较窄带平稳实高斯过程通过平方律检波器和半波线性检波器所得的两种结果，发现其输出过程的功率谱密度有相似之处。但是对半波线性检波器的分析比较复杂，进一步研究信号和噪声之和通过半波线性检波器就更加复杂，因此，当定性地了解信号和噪声之和通过检波器的输出时，为了简化，就认为检波器是平方律的。实际上检波器是非线性的，要更一般的分析信号噪声之和经过非线性检波器那就更复杂了，可用变换的方法来解决这类问题。[①]

§8 零交和阈交问题*

在信号检测和控制中经常会提出这类问题、一个随机起伏的电压$\xi(t)$在单位时间内有多少次越过门限值x_0，即$\xi(t)$在单位时间内有多少次由下而上地与$x=x_0$相交。在工程设计中也会遇到相类似的问题，例如，由于各种复杂的因素，飞机在飞行时机翼某点的应力是随机的，即应力$\xi(t)$是一随机过程，若设x_0表示所用材料的疲劳应力，则需要研究在单位时间内应力有多少次越过疲劳应力x_0。以上这些均可归纳为同一类问题：设有随机过程$\xi(t)$，有阈值$x=x_0$，求在单位时间内$\xi(t)$由下而上地与$x=x_0$相交的次数。记单位时间

① 见 Davenport and Root 著《An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise》。

内$\xi(t)$由下而上地与$x=x_0$相交的次数为$N(x_0)$。由于$\xi(t)$的随机性，$N(x_0)$也是随机的，对于固定的x_0，$N(x_0)$是一个随机变量。研究$N(x_0)$的统计特性或分布统称为阈交问题；如果$x_0=0$，则称为零交问题。由于对$N(x_0)$分布的研究至今还有许多工作有待进行，比较复杂，本书仅限于讨论如何求$N(x_0)$的均值。

设有实随机过程$\xi(t)$，它是均方可导的严平稳的。在时间轴上取二个时刻t、$t+\tau$，设$\xi(t)$在此二个时刻所取值的二维联合概率密度为$f_\xi(x,x_\tau)$，则在时间间隔$(t,t+\tau)$内$\xi(t)$至少有一次由下而上地与$x=x_0$相交的概率即$\xi(t)$至少有一次越过$x=x_0$的概率为

$$
\begin{aligned}
P_\tau(x_0) &= P\{\xi(t)<x_0,\xi(t+\tau)>x_0\} \\
&= \int_{-\infty}^{x_0}\int_{x_0}^{\infty} f_\xi(x,x_\tau)dx_\tau dx \qquad (1)
\end{aligned}
$$

如τ趋于无限小，则(1)式代表$\xi(t)$由下而上地与$x=x_0$相交一次的概率，因为在无限小的时间间隔内出现多次相交的概率为高阶无穷小。因此在无限小的时间间隔τ内$\xi(t)$不越过$x=x_0$的概率为$1-P_\tau(x_0)$。

因为单位时间内$\xi(t)$越过$x=x_0$的平均次数为$E\{N(x_0)\}$，故在τ间隔内$\xi(t)$越过$x=x_0$的平均次数为$E\{N(x_0)\}\cdot\tau$。当τ趋于无限小时

$$
\begin{aligned}
E\{N(x_0)\}\tau &= 1\cdot P_\tau(x_0)+0\cdot[1-P_\tau(x_0)] \\
&= P_\tau(x_0)
\end{aligned}
$$

故
$$
E\{N(x_0)\} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}P_\tau(x_0) = \frac{\partial P_\tau(x_0)}{\partial\tau} \qquad (2)
$$

为了获得$E\{N(x_0)\}$的最终表示式，先对(1)式作变量置换。设

$$
\begin{cases}
x = x' - v'\dfrac{\tau}{2} \\
x_\tau = x' + v'\dfrac{\tau}{2}
\end{cases}
\tag{3}
$$

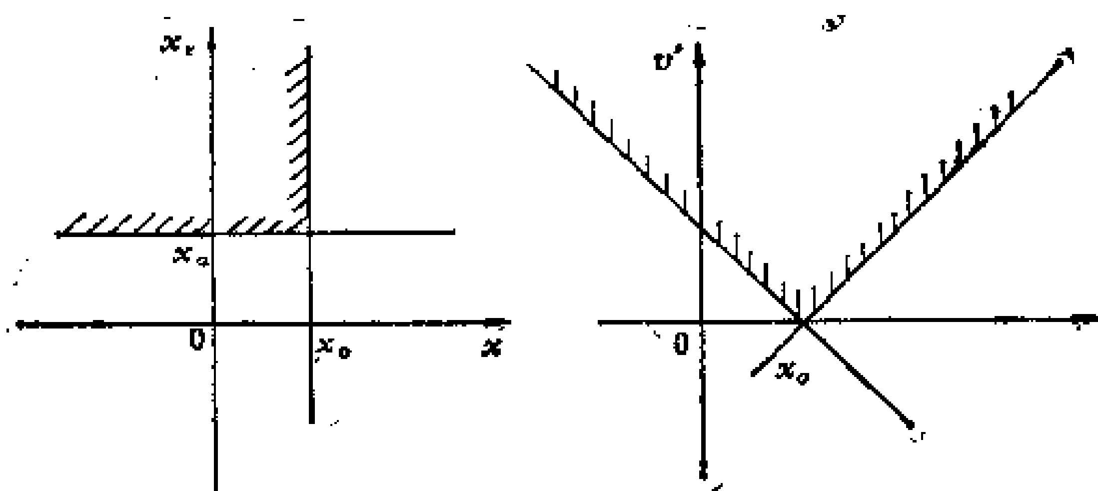


图 6-11

于是变换的雅可比为

$$
\frac{\partial(x, x_\tau)}{\partial(x', v')} = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\tau}{2} \\ 1 & \dfrac{\tau}{2} \end{vmatrix} = \tau
$$

故

$$
P_\tau(x_0) = \int_0^\infty \int_{x_0 - \frac{\tau}{2}v'}^{x_0 + v'\frac{\tau}{2}} \tau \cdot f_\xi\left(x' - v'\frac{\tau}{2},\quad x' + v'\frac{\tau}{2}\right) dx'dv' \tag{4}
$$

根据(3)式 $v' = \dfrac{x_\tau - x}{\tau}$，当$\tau \to 0$时 $x' \to x, v' \to v$。$v = \dfrac{d\xi}{dt}$代表在 t时刻$\xi(t)$的导数。于是当 $\tau \to 0$时

$\tau f_{\xi}\left(x'-v'\frac{\tau}{2},\ x'+v'\frac{\tau}{2}\right)$为t时刻x、v的联合概率密度即

$$\lim_{\tau\to 0}\tau f_{\xi}\left(x'-v'\frac{\tau}{2},\ x'+v'\frac{\tau}{2}\right)=f_{\xi\dot{\xi}}(x,v;t) \qquad (5)$$

将(4)、(5)式代入(2)式得

$$E\{N(x_0)\}=\int_0^{\infty}vf_{\xi\dot{\xi}}(x_0,v;t)dv \qquad (6)$$

例 设$\xi(t)$为零均值、均方可导、平稳实正态过程，求$E\{N(x_0)\}$。

解 $\xi(t)$在t、$t+\tau$两时刻所取值$\xi(t)$、$\xi(t+\tau)$的二维联合概率密度为

$$f_{\xi}(x,x_{\tau})=\frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\cdot\exp\left\{-\frac{x^2+x_{\tau}^2-2\rho(\tau)xx_{\tau}}{2\sigma_{\xi}^2[1-\rho^2(\tau)]}\right\}$$

式中$\rho(\tau)$为$\xi(t)$、$\xi(t+\tau)$的相关系数，即$R_{\xi}(\tau)=\sigma_{\xi}^2\rho(\tau)$。

设 $x=x'-v'\frac{\tau}{2}$， $x_{\tau}=x'+v'\frac{\tau}{2}$，则

$$\tau f_{\xi}\left(x'-v'\frac{\tau}{2},\ x'+v'\frac{\tau}{2}\right)$$

$$=\frac{\tau}{2\pi\sigma_{\xi}^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(x'-v'\frac{\tau}{2}\right)^2+\left(x'+v'\frac{\tau}{2}\right)^2}{2\sigma_{\xi}^2[1-\rho^2(\tau)]}+\frac{2\rho(\tau)\left(x'-v'\frac{\tau}{2}\right)\left(x'+v'\frac{\tau}{2}\right)}{2\sigma_{\xi}^2[1-\rho^2(\tau)]}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tau}{2\pi\sigma_{\xi}^{2}\sqrt{1-\rho^{2}(\tau)}} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^{2}[1-\rho^{2}(\tau)]}\left[2x'^{2}[1-\rho(\tau)]\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + 2v'^{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2}[1+\rho(\tau)]\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tau}{2\pi\sigma_{\xi}^{2}\sqrt{1-\rho^{2}(\tau)}} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{x'^{2}}{\sigma_{\xi}^{2}[1+\rho(\tau)]} - \frac{v'^{2}}{4\sigma_{\xi}^{2}\frac{1}{\tau^{2}}[1-\rho(\tau)]}\right\}
\end{aligned}
$$

当$\tau \to 0$时，$R_{\xi}(\tau) \to \sigma_{\xi}^{2}$，$\rho(\tau) \to 1$，

$$\sigma_{\xi}^{2}\rho(\tau) = R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^{2} + \frac{1}{2}R_{\xi}''(0)\tau^{2} + \cdots$$

因对于均方可导、平稳实过程来说 $R_{\xi}'(0) = 0$。

$$\lim_{\tau \to 0}\frac{\sigma_{\xi}^{2}[1-\rho(\tau)]}{\tau^{2}} = -\frac{1}{2}R_{\xi}''(0) = \frac{1}{2}\sigma_{\dot{\xi}}^{2}$$

上式中 $\sigma_{\dot{\xi}}^{2}$ 代表 $\frac{d\xi(t)}{dt} = \dot{\xi}(t)$ 的方差，故

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\tau \to 0}\tau f_{\xi}\left(x' - v'\frac{\tau}{2},\ x' + v'\frac{\tau}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}\sigma_{\dot{\xi}}}\exp\left\{-\left(\frac{x^{2}}{2\sigma_{\xi}^{2}} + \frac{v^{2}}{2\sigma_{\dot{\xi}}^{2}}\right)\right\} \\
&= f_{\xi\dot{\xi}}(x, v; t)
\end{aligned}
$$

上式代入（6）式得

$$E\{N(x_0)\} = \int_0^\infty \frac{v}{2\pi\sigma_\xi\sigma_{\dot\xi}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{v^2}{\sigma_{\dot\xi}^2}\right)\right\}dv = \frac{\sigma_{\dot\xi}}{2\pi\sigma_\xi}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_\xi^2}}$$

如果 $x_0=0$，则

$$E\{N(0)\} = \frac{\sigma_{\dot\xi}}{2\pi\sigma_\xi}$$

因 $$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

故 $$\sigma_\xi^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df$$

$$-R''(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi f)^2 S(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau$$

所以 $$\sigma_{\dot\xi}^2 = R_{\dot\xi}(0) = -R''_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi f)^2 S(f)df$$

故 $$E\{N(0)\} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f)df}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df}} = f_{\text{Ⅱ}}$$

$f_{\text{Ⅱ}}$ 代表功率谱密度的均方根值。

如果接收机中放是一理想中放，f_0为中放中心频率，Δf为其带宽，即中放在频率为 $f_0-\frac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\frac{\Delta f}{2}$ 内增益为常数，中放输入为正态分布的白噪声，此时

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 2A\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} df = 2A\Delta f$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f)df = 2A\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} f^2 df$$

$$= 2A\Delta f\left[f_0^2+\frac{(\Delta f)^2}{12}\right]$$

故 $$E\{N(0)\}=\sqrt{f_0^2+\frac{(\Delta f)^2}{12}}$$

$$\approx f_0\left[1+\frac{1}{24}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2\right]\approx f_0$$

即理想中放输出噪声平均每秒越过零电平的次数近似为 f_0。

§9 正态马尔可夫过程

（一）设有零均值实随机过程 $\xi(t)$，它是正态过程，若又是马尔可夫过程，则

$$C(t_1,t_3)=\operatorname{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_3)\}$$

$$=\frac{C(t_1,t_2)\ C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}$$

其中 $t_1<t_2<t_3$。

证 $$C(t_1,t_3)=\operatorname{cov}\{\xi(t_1)\xi(t_3)\}$$

$$=E\{\xi(t_1)\xi(t_3)\}$$

$$=\iiint_{-\infty}^{\infty} x_1x_3f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_3f(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_3f(x_3/x_2)f(x_2/x_1)\cdot f(x_1)dx_2dx_3dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}f(x_2/x_1)\int_{-\infty}^{\infty}x_3 f(x_3/x_2)dx_3dx_2dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}f(x_2/x_1)$$

$$\cdot E\{\xi(t_3)/\xi(t_2)=x_2\}dx_2dx_1$$

因为 $\xi(t)$ 为正态过程，$\xi(t_3)$、$\xi(t_2)$ 的联合概率密度为正态分布的，故 $\xi(t_3)$ 的条件平均值为

$$E\{\xi(t_3)/\xi(t_2)=x_2\}=\frac{E\{\xi(t_3)\xi(t_2)\}}{E\{[\xi(t_2)]^2\}}x_2$$

$$=\frac{C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}x_2$$

故

$$C(t_1,t_3)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}f(x_2/x_1)$$

$$\cdot\frac{C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}x_2dx_2dx_1$$

$$=\frac{C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1)f(x_2/x_1)dx_2dx_1$$

$$=\frac{C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\frac{C(t_1,t_2)C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}$$

实际上 $C(t_1,t_3)=\dfrac{C(t_1,t_2)C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}$ 是一实正态过程又是马尔可夫过程的充要条件(充分性未证明)，而且如果没有零均值的条件，上述结论也是正确的。

(二) 设 $\{\xi(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为正态分布、平稳实随机序列，且 $C(0)\neq0$，则 $C(n)=a^nC(0)$，$n\geqslant0$，$|a|\leqslant1$ 为 $\xi(n)$ 是马尔可夫过程的充分必要条件。

证 (1) 必要性的证明

如果 $\xi(n)$ 为马尔可夫过程，根据正态马尔可夫过程的性质知

$$C(t_1,t_3)=\frac{C(t_1,t_2)\,C(t_2,t_3)}{C(t_2,t_2)}\qquad(t_1<t_2<t_3)$$

由于$\xi(n)$为平稳序列，故

$$C(t_3-t_1)=\frac{C(t_2-t_1)\,C(t_3-t_2)}{C(0)}$$

设 $t=t_3-t_2$，$s=t_2-t_1$，则

$$C(t+s)=\frac{C(t)\,C(s)}{C(0)}$$

由此
$$C(n)=\frac{C(n-1)\,C(1)}{C(0)}$$

$$\frac{C(n)}{C(0)}=\frac{C(n-1)}{C(0)}\;\frac{C(1)}{C(0)}=\frac{C(n-2)}{C(0)}\left[\frac{C(1)}{C(0)}\right]^2$$

$$=\cdots=\left[\frac{C(1)}{C(0)}\right]^n\qquad(n\geqslant 1)$$

设 $a=\frac{C(1)}{C(0)}$，由于 $|C(1)|\leqslant C(0)$，故 $|a|\leqslant 1$

$$C(n)=a^nC(0)\qquad(n\geqslant 0)$$

（2）充分性的证明

如果$\frac{C(n)}{C(0)}=a^n$，设 $n=n_1+n_2$，则

$$\frac{C(n)}{C(0)}=a^n=a^{n_1}\cdot a^{n_2}$$

$$\frac{C(n)}{C(0)}=\frac{C(n_1)}{C(0)}\;\frac{C(n_2)}{C(0)}$$

即
$$C(n)=\frac{C(n_1)\,C(n_2)}{C(0)}$$

即它满足了马尔可夫过程的条件。

（三）设$\xi(t)$是一均方连续、平稳、实正态分布的随机过程，$C(\tau)$为其协方差函数，则 $C(\tau)=e^{a\tau}\cdot C(0)$，$\tau\geqslant0$，$a<0$是该过程具有马尔可夫性的充分必要条件。

证 （1）必要性的证明

因给定$\xi(t)$是一均方连续、平稳、实正态过程，它的协方差函数是连续函数，如果它又是马尔可夫过程则

$$C(\tau+s)=\frac{C(\tau)\,C(s)}{C(0)}$$

或
$$\frac{C(\tau+s)}{C(0)}=\frac{C(\tau)}{C(0)}\cdot\frac{C(s)}{C(0)}$$

设
$$\frac{C(\tau)}{C(0)}=f(\tau)$$

则 $f(\tau+s)=f(\tau)f(s)$

满足上述条件的连续函数为指数函数，即

$$f(\tau)=\alpha^{\tau}=e^{a\tau}$$

故
$$C(\tau)=e^{a\tau}\cdot C(0)$$

因为
$$|C(\tau)|<C(0)$$

故当
$$\tau>0\text{时 } a<0。$$

（2）充分性的证明

如果
$$C(\tau)=C(0)e^{a\tau}$$

则
$$\frac{C(\tau+s)}{C(0)}=e^{a(\tau+s)}=e^{a\tau}e^{as}$$

$$=\frac{C(\tau)}{C(0)}\cdot\frac{C(s)}{C(0)}$$

即
$$C(\tau)=\frac{C(\tau)\,C(s)}{C(0)}$$

所以$\xi(t)$是马尔可夫过程。

§10 维 纳 过 程*

（一）在第四章习题18中已经说明了从对称伯努利随机游动出发，取极限可以获得维纳过程。

设质点每隔一时间T在一直线上作一次随机游动ξj，ξj可取值$+a$、$-a$，且$P\{\xi i=+a\}=\frac{1}{2}$，$P\{\xi i=-a\}=\frac{1}{2}$，$j=1,2,3,\cdots$，经过n次游动，质点位于$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi i$，则

$E\eta_n=0$，$E\eta_n^2=\frac{a^2t}{T}$，$t=nT$。设$\frac{a^2}{T}=\beta$，定义

$$W(t)=\lim_{\substack{T\to 0\\ n\to\infty}}\eta_n\quad\left(\frac{a^2}{T}=\beta\right)$$

则$W(t)$为一正态分布的随机变量，$E\{W(t)\}=0$，$E\{W^2(t)\}=DW(t)=\beta t$，因此$f_{W(t)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta t}}e^{-\frac{x^2}{2\beta t}}$。$W(t)$称为维纳过程，也叫布朗运动。

维纳过程也是一独立增量过程。取$t_2>t_1$，$t_1=nT_1$，$t_2=n_2T$，$n_2>n_1$，则$\eta_{n_1}=\sum_{i=1}^{n_1}\xi j$，$\eta_{n_2}=\sum_{i=1}^{n_2}\xi i$，$\eta_{n_2}-\eta_{n_1}=\sum_{i=n_{1+1}}^{n_2}\xi i$，$\eta_{n_1}$和$[\eta_{n_2}-\eta_n]$是相互统计独立的，故它们的极限$W(t_1)$和$W(t_2)-W(t_1)$也是相互统计独立的，而

$$\lim\sum_{i=n_{1+1}}^{n_2}\xi i=\lim\left(\sum_{i=1}^{n_2}\xi j-\sum_{i=1}^{n_1}\xi j\right)$$

$$= W(t_2) - W(t_1)$$

$$E\{W(t_2) - W(t_1)\} = 0$$

$$D\{W(t_2) - W(t_1)\} = \beta(t_2 - t_1) \quad (t_2 > t_1)$$

由于$[W(t_2) - W(t_1)]$也是正态分布的，故

$$f_{W(t_2)-W(t_1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta(t_2 - t_1)}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2\beta(t_2 - t_1)}\right\}$$

若$t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_2 > t_1$，则$W(t_n) - W(t_{n-1})$，$W(t_{n-1}) - W(t_{n-2})$，…，$W(t_2) - W(t_1)$，$W(t_1)$是相互统计独立的，且均为正态分布的随机变量。因此$W(t_1)$，$W(t_2), \cdots, W(t_n)$的联合分布也是正态的，故维纳过程是正态过程。

（二）定义 随机过程$W_0(t)$，$t \geqslant 0$是一独立增量过程，$W_0(0) = 0$，当$t_2 > t_1 \geqslant 0$时，$W_0(t_2) - W_0(t_1)$为正态分布的随机变量，其概率密度为

$$f_{W_0(t_2)-W_0(t_1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_2 - t_1}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}\right\} \quad (-\infty < x < \infty, \quad t_2 > t_1)$$

则称$W_0(t)$为规范化维纳过程。

由此 $$E\{W_0(t)\} = 0$$

$$E\{W_0(t_2)W_0(t_1)\}$$

$$= E\{[W_0(t_2) - W_0(t_1) + W_0(t_1)][W_0(t_1)]\}$$

$$= E\{[W_0(t_1)]^2\} = t_1 \qquad (t_2 \geqslant t_1)$$

同理，当$t_1 \geqslant t_2$时

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\} = t_2$$

即 $E\{W_0(t_2)W_0(t_1)\} = R_{W_0}(t_2,t_1) = \min(t_2,t_1)$

（三）如果 $W(t) = \mu t + \sigma W_0(t)$

则 $E\{W(t)\} = \mu t$

μ为常数，称为偏移系数，

$$DW(t) = E\{[W(t) - \mu t]^2\} = \sigma^2 DW_0(t)$$
$$= \sigma^2 E\{[W_0(t)]^2\} = \sigma^2 t$$

σ^2为常数，称为过程的强度。

W(t)的一维概率密度为

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

由于$DW_0(t) = t$，$E\{W(t)\} = \mu t$，$DW(t) = \sigma^2 t$均为时间的函数，因此 $W_0(t)$、$W(t)$为非平稳过程。

结论（1）维纳过程是一独立增量过程，而且是齐次的增量过程，因此它是马尔可夫过程。

（2）增量的分布是正态分布，维纳过程是正态过程。

（3）维纳过程是非平稳过程。

（四）由于 $R_{W_0}(t_2,t_1)$是连续的，故 $W_0(t)$是均方连续的随机过程。而$\frac{\partial}{\partial t_1}R_{W_0}(t_2,t_1) = U(t_2 - t_1)$其中

$$u(t_2 - t_1) = \begin{cases} 1 & (t_2 > t_1) \\ 0 & (t_1 > t_2) \end{cases}$$

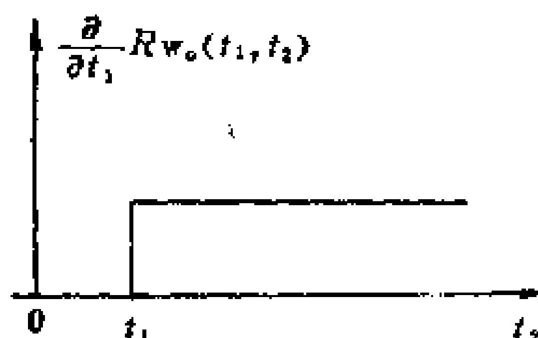


图 6-12

图 6-12 给出了$\frac{\partial}{\partial t_1}R_{W_0}(t_2,t_1)$与 t_2的关系，t_1为参量，因此

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1}R_{W_0}(t_2,t_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2 - t_1)$$

从上式可知，相关函数 $R_{W_0}(t_1, t_2)$不存在二阶偏导数，因此 $W_0(t)$的均方导数不存在。但在形式上上式可用δ函数表示之，即

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} R_{W_0}(t_2, t_1) = \delta(t_2 - t_1)$$

若在形式上定义 $W_0(t)$的均方导数为 $W_0'(t)$，则

$$E\{W_0'(t_2) W_0'(t_1)\} = R_{W_0'}(t_2, t_1)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} R_{W_0}(t_2, t_1) = \delta(t_2 - t_1)$$

当 $t_2 \neq t_1$时，$W_0'(t_1)$和 $W_0'(t_2)$的相关函数为零，均值也为零，则 $W_0'(t_1)$和 $W_0'(t_2)$是不相关的。均值为零、相关函数为δ函数的过程称为白噪声。由于 $W_0(t)$为正态过程，所以它的形式导数 $W_0'(t)$称为正态分布的白噪声。

（五）如有一正态分布的白噪声 $\xi(t)$，它的形式积分是$\int_0^t \xi(u)du$，$t \geqslant 0$，现研究积分 $\int_0^t \xi(u)du$的统计特性。

假定 $E\{\xi(t)\} = 0$，$R_\xi(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$。由于积分是一线性运算，$\int_0^t \xi(u)du$是一正态分布过程，且

（1）　$$E\left\{\int_0^t \xi(u)du\right\} = \int_0^t E\{\xi(u)\}du = 0$$

（2）　$$\int_0^0 \xi(u)du = 0$$

（3）当$0 \leqslant t_1 < t_2$时

$$E\left\{\int_0^{t_1} \xi(u)du \int_0^{t_2} \xi(v)dv\right\}$$

$$= E\left\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\xi(u)\xi(v)\,du\,dv\right\}$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sigma^2\delta(u-v)\,dv\,du$$

$$= \int_0^{t_1}\sigma^2 du = \sigma^2 t_1$$

当$0\leqslant t_2<t_1$时

$$E\left\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\right\}$$

$$= \int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\sigma^2\delta(u-v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{t_2}\sigma^2 dv = \sigma^2 t_2$$

即 $$E\left\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\right\} = \sigma^2\min(t_1, t_2)$$

所以$\int_0^t\xi(u)du$是一维纳过程。当$\sigma^2=1$时，$\xi(t)$的积分为一规范化维纳过程。故

$$\frac{d}{dt}W_0(t) = W_0'(t) \quad (W_0'(t)\text{为正态白噪声})$$

$$\int_0^t W_0'(t)dt = W_0(t)$$

§11 维 纳 积 分*

（一） 设$\{W_0(t),\ t\geqslant 0\}$是一规范化维纳过程，$b(t)$ $(t\geqslant 0)$是一确定性时间函数，且满足

$$\int_0^t |b(u)|^2 du < \infty$$

则维纳积分

$$U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u)$$

存在。其中 $U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u)$定义为

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} b(t_k')[W_0(t_{k+1}')-W_0(t_k')]$$

的均方极限，$0=t_0'<t_1'<t_2'<\cdots<t_{n-1}'<t_n'=t$，即$(t_0',t_1',\cdots,t_n')$为$[0,t]$上的诸分点。

证 要证明S_n的均方极限存在。考虑$[0,t]$内的另一种分点方法，即$0=t_0''<t_1''<t_2''<\cdots<t_{m-1}''<t_m''=t$，

作
$$S_m=\sum_{i=0}^{m-1} b(t_i'')[W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]$$

然后求
$$E\{S_nS_m\},$$

$$E\{S_nS_m\}=E\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} b(t_k')b(t_i'')$$

$$\cdot[W_0(t_{k+1}')-W_0(t_k')][W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]\Big\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} b(t_k')b(t_i'')E\{[W_0(t_{k+1}')$$

$$-W_0(t_k')][W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]\}$$

由于规范化维纳过程的均值为零，且是一独立增量过程，在上述两重求和的过程中只有当$I_k'=(t_k',t_{k+1}')$和$I_i''=(t_i'',t_{i+1}'')$这二个时间间隔有重叠时

$$E\{[W_0(t_{k+1}')-W_0(t_k')][W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]\}$$

才有值，当I_k'、I_i''不交叠时

$$E\{[W_0(t_{k+1}')-W_0(t_k')][W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]\}=0$$

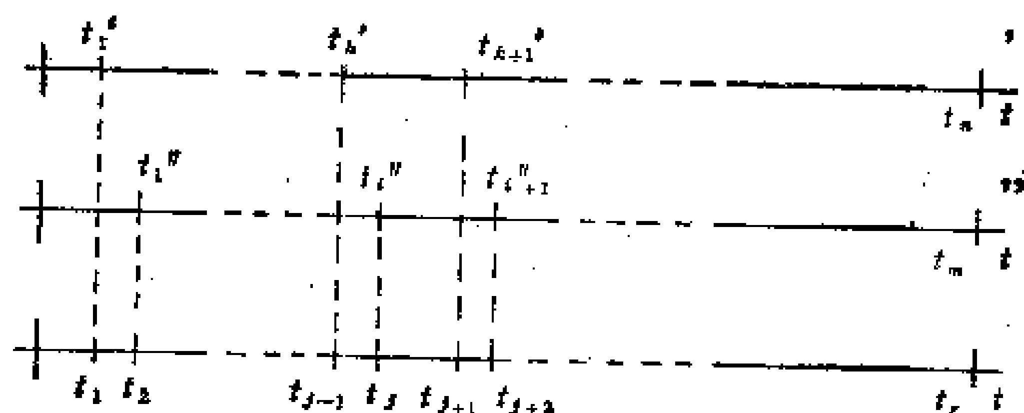


图 6-13

在图 6-13中，把 $0=t_0'<t_1'<t_2'<\cdots<t_{n-1}'<t_n'=t$ 和 $0=t_0''<t_1''<t_2''<\cdots<t_{m-1}''<t_m''=t$ 组合在一起，得到一组新的分点方法

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{r-1}<t_r=t$$

于是
$$E\{[W_0(t_{k+1}')-W_0(t_k')][W_0(t_{i+1}'')-W_0(t_i'')]\}$$
$$=E\{[W_0(t_{j+1})-W_0(t_j)]^2\}$$
$$=t_{j+1}-t_j$$

故
$$E\{S_nS_m\}=\sum_{j=0}^{r-1}b(t_{j-1})b(t_j)(t_{j+1}-t_j)$$

当 $n\to\infty, m\to\infty, \max(t_k', t_{k+1}')\to 0, \max(t_i'', t_{i+1}'')\to 0$时

$$\lim E\{S_nS_m\}=\int_0^t b^2(u)du$$

如果上述黎曼积分存在，根据Loève收敛准则，S_n均方收敛，即

$$U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ S_n$$

存在，且

$$E\{U(t)\}=E\left\{\int_0^t b(u)dW_0(u)\right\}=0$$

$$R_U(t_1,t_2)=E\left\{\int_0^{t_1}b(u)dW_0(u)\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^{t_2}b(v)\,dW_0(v)\right\}=\int_0^{\min(t_1,t_2)}b^2(u)du$$

例 求维纳积分

$$U(t)=\int_0^t\sin\omega u dW_0(u)\qquad(t\geqslant0)$$

的均值、相关函数，以及增量 $U(t_2)-U(t_1)$ 的均值和方差。

解 此例中 $b(t)=\sin\omega t$，

$$\int_0^t b^2(u)du=\int_0^t\sin^2\omega u du$$

是存在的，满足维纳积分存在的条件

$$E\{U(t)\}=0$$

$$R_U(t_1,t_2)=\int_0^{\min(t_1,t_2)}\sin^2\omega u du$$

$$=\int_0^{\min(t_1,t_2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega u\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\min(t_1,t_2)-\frac{1}{4\omega}\sin\{2\omega[\min(t_1,t_2)]\}$$

$$(t_1\geqslant0,t_2\geqslant0)$$

设 $t_2>t_1$，$\Delta U=U(t_2)-U(t_1)$，由于维纳过程是一正态过程，$U(t)$是正态分布的，ΔU仍是正态分布的，故

$$E\{\Delta U\}=0$$

$$\sigma^2_{\Delta U}=E\{[U(t_2)-U(t_1)]^2\}$$

$$=R_U(t_2,t_2)-2R_U(t_2,t_1)+R_U(t_1,t_1)$$

$$=\frac{1}{2}t_2-\frac{1}{4\omega}\sin2\omega t_2-2\cdot\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2\omega}\sin2\omega t_1$$

$$+\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{4\omega}\sin2\omega t_1=\frac{1}{2}(t_2-t_1)$$

$$-\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t_1+t_2)\sin\omega(t_2-t_1)$$

（二）维纳积分具有某些与黎曼积分相似的性质：

（1）线性

$$\int_0^t[a_1b_1(u)+a_2b_2(u)]dW_0(u)$$

$$=a_1\int_0^t b_1(u)dW_0(u)+a_2\int_0^t b_2(u)dW_0(u)$$

其中 a_1、a_2为常数，$b_1(u)$、$b_2(u)$为确定性函数，且

$$\int_0^t b_1^2(u)du,\ \int_0^t b_2^2(u)du \text{ 均存在。}$$

（2）可加性

$$\int_0^{t_1} b(u)dW_0(u)+\int_{t_1}^{t_2} b(u)dW_0(u)$$

$$=\int_0^{t_2} b(u)dW_0(u) \qquad (0\leqslant t_1\leqslant t_2)$$

注 在推广黎曼积分的性质到维纳积分时必须十分慎重。如当$t\geqslant 0, b(t)>0$时，并不说明积分$\int_0^t b(t)dW_0(t)>0$。

如选 $b(t)=1, \int_0^t 1\cdot dW_0(u)=W_0(t)$，$W_0(t)$为正态分布随机变量，它可为负值。

（三）维纳积分 $U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(t)$，$t\geqslant 0$的统计特性。

$U(t)$与规范化维纳过程具有相似的统计特性：（1）$U(0)=0$，（2）$U(t)$是正态分布过程，（3）它是独立增量过程。

$U(t)$的方差σ_0^2为

$$\sigma_U^2(t)=\int_0^t b^2(u)du$$

$U(t)$方差 $\sigma_U^2(t)$的导数为

$$\frac{d}{dt}\sigma_U^2(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t b^2(u)du = b^2(t) \quad (t \geqslant 0)$$

它是一个时间的函数，而维纳过程方差的导数是一个常数，因此称 $U(t)$为非齐次维纳过程。$b(t)$是 $U(t)$的强度函数。

因为$W_0'(t)=\frac{dW_0(t)}{dt}$，$W_0'(t)$为正态分布白噪声，则

$$U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u) = \int_0^t b(u)W_0'(u)du$$

如果把正态白噪声作为线性系统的输入，则该系统的输出为

$$\eta(t)=\int_0^t h(t,\tau)dW_0(\tau)=\int_0^t h(t,\tau)W_0'(\tau)d\tau$$

其中 $h(t,\tau)$为系统的冲激响应。上式说明了输出$\eta(t)$为一维纳过程（当然$\eta(t)$的存在要求 $h(t,\tau)$满足平方可积）。而

$$E\{\eta(t)\}=0$$

$$R_\eta(t_1,t_2)$$

$$=E\left\{\int_0^{t_1} h(t_1,u)W_0'(u)\,du\int_0^{t_2} h(t_2,v)W_0'(v)\,dv\right\}$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,u)h(t_2,v)E\{W_0'(u)W_0'(v)\}dudv$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,u)h(t_2,v)\delta(u-v)dudv$$

$$=\int_0^{\min(t_1,t_2)} h(t_1,u)h(t_2,u)du$$

（四）积分$\int_{-\infty}^{t} h(t,u)dW_0(u)$的讨论。积分下限为$-\infty$

时称为广义维纳积分。

研究广义维纳积分首先要推广规范化维纳过程的概念。原来的规范化维纳过程 $W_0(t)$ 定义在$[0,\infty)$间，而现在要定义在 $(-\infty,\infty)$ 间。

设有二个独立的规范化维纳过程$\{W_{01}(t),t\geqslant 0\}$和$\{W_{02}(t),t\geqslant 0\}$。定义

$$W_0(t)=\begin{cases}W_{01}(t) & (t\geqslant 0)\\ W_{02}(-t) & (t<0)\end{cases}$$

并假定
$$\int_{-\infty}^{t}|h(t,u)|^2du<\infty$$

定义
$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)dW_0(u)$$
$$=\lim_{t_0\to-\infty}\int_{t_0}^{t}h(t,u)dW_0(u)\quad(-\infty<t<\infty)$$

$\xi(t)$具有下列性质：

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}h(t_1,u)h(t_2,u)du$$
$$(-\infty<t_1,t_2<\infty)$$

例 设
$$h(t,u)=\begin{cases}\beta e^{-\alpha(t-u)} & (-\infty<u<t<\infty)\\ 0 & (-\infty<t<u<\infty,d,\beta>0)\end{cases}$$

研究广义维纳积分的统计性质。

解
$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-u)}dW_0(u)$$

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}e^{-\alpha(t_1-u)}e^{-\alpha(t_2-u)}du$$

当 $t_2>t_1$ 时

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\alpha(t_1+t_2)}e^{2\alpha u}\,du$$

$$=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

当 $t_1>t_2$ 时

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\alpha(t_1+t_2)}e^{2\alpha u}\,du$$

$$=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha(t_1-t_2)}$$

故
$$R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t_2-t_1|}$$

$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)}dW_0(u)$$

$$=\beta\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-u)}W_0'(u)du$$

其中 $W_0'(u)$ 为正态白噪声。正态过程通过线性系统仍然是正态过程，故 $\xi(t)$ 为正态过程。

$\xi(t)$ 称为平稳奥伦斯坦-乌伦贝克过程，它满足§9中的条件，它是正态马尔可夫过程，它的参数是 $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ 和 α。

§12 伊藤随机积分*

（一）问题的提出

在工程科学技术中经常遇到

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t))+g(t,x(t))\dot{W}(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

这类微分方程，其中$\dot{W}(t)=N(t)=\frac{dW(t)}{dt}$为正态白噪声。如果(1)式中没有$g(t,X(t))\dot{W}(t)$这一项，则上述微分方程即为普通的常微分方程，增加了这一项，则表示引入了随机因素，于是$X(t)$不再是普通的确定性函数，而是随机过程了。常微分方程在工程科学技术中起着重要的作用，而在精密的分析中必须考虑随机因素的存在，因此研究随机微分方程同样是十分重要的。

(1)式可改写为

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t)dt+g(t,X(t))dW(t) \\ X(t_0)=X_0 \end{cases} \tag{2}$$

或用积分的形式

$$X(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,X(t))dt + \int_{t_0}^{t}g(t,X(t))dW(t) \tag{3}$$

(3)式右边第一个积分为均方积分，第二个积分是另一种形式的积分，称为伊藤随机积分。(2)、(3)两式是等价的。(2)式是伊藤随机微分方程，(3)式为伊藤积分方程。

(二) 伊藤随机积分的定义

设$X(t)$为二阶矩过程，$W(t)$为维纳过程，在$[a,b]$，$b>a\geqslant0$上引入一组分点$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，

$$\Delta_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$$

设 $$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

若$\Delta_n\to0$、$n\to\infty$时η_n均方收敛，则其极限称为$X(t)$关于维纳过程$W(t)$的伊藤积分，记

$$\mathop{\mathrm{l.i.m}}_{\substack{n\to\infty\\ \Delta_n\to 0}} \eta_n = \int_a^b X(t)dW(t)$$

注 如果和式中$X(t)$的t值不是选取t_{k-1}，而是选取(t_{k-1},t_k)中的任意一点t'_k，$t_{k-1}\leqslant t'_k\leqslant t_k$，$1\leqslant k\leqslant n$，那么当$n\to\infty$、$\Delta_n\to 0$时和$\eta'_n=\sum_{k=1}^{n} X(t'_k)[W(t_k)-W(t_{k-1})]$并不存在均方极限，故在定义伊藤积分时，规定和式中的t'_k取该间隔的左端点t_{k-1}。

定理 设$X(t)$为均方连续的二阶矩过程，并且对任意的$s'_1,s'_2\leqslant t_{k-1}<t_k$及$s_1<s_2\leqslant t_{k-1}$，$[X(s'_1),X(s'_2),W(s_2)-W(s_1)]$与$W(t_k)-W(t_{k-1})$相互统计独立，则$X(t)$关于$W(t)$的伊藤积分存在且唯一。

证 根据Loève准则，只要证明下式的极限存在即可。

$$E\{\eta_m\eta_n\}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})$$
$$[W(s_i)-W(s_{i-1})][W(t_k)-W(t_{k-1})]\}$$

其中
$$a=s_0<s_1<\cdots<s_m=b$$
$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$
是$[a,b]$的两个分法。

上式右边各项可根据长方形$[s_{i-1},s_i]\times[t_{k-1},t_k]$是否与正方形$[a,b]\times[a,b]$的主对角线相交而分成两类，第一类是不相交的，第二类是相交的（见图6-14）。

先看第一类的各项。此时有$s_{i-1}<s_i\leqslant t_{k-1}<t_k$（或$t_{k-1}<t_k\leqslant s_{i-1}<s_i$），于是根据假设$\{X(s_{i-1}),X(t_{k-1}),[W(s_i)-W(s_{i-1})]\}$与$[W(t_k)-W(t_{k-1})]$相互统计独立，（或者$\{X(s_{i-1}),(t_{k-1}),W(t_k)-W(t_{k-1})\}$与$[W(s_i)-W(s_{i-1})]$相互统计独立），于是

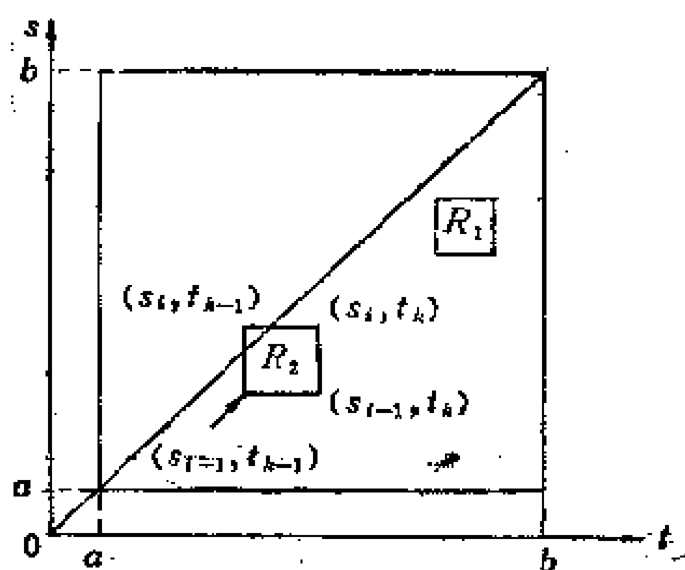


图 6-14

$$
\begin{aligned}
&E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(s_{i-1})] \\
&\quad\cdot[W(t_k)-W(t_{k-1})]\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(s_{i-1})]\} \\
&\quad\cdot E\{W(t_k)-W(t_{k-1})\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i) \\
&\quad-W(s_{i-1})]\}\cdot 0=0
\end{aligned}
$$

因此所有第一类项都为零。

观察第二类的各项。此时$[S_{i-1},S_i]$和$[t_{k-1},t_k]$在时间轴上有公共部分，若$S_{i-1}<t_{k-1}<S_i<t_k$，则

$$
\begin{aligned}
&E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(s_{i-1})] \\
&\quad\cdot[W(t_k)-W(t_{k-1})]\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(t_{k-1}) \\
&\quad+W(t_{k-1})-W(s_{i-1})][W(t_k) \\
&\quad-W(s_i)+W(s_i)-W(t_{k-1})]\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(t_{k-1})] \\
&\quad\cdot[W(t_k)-W(s_i)]\}+E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})
\end{aligned}
$$

$$\cdot[W(s_i)-W(t_{k-1})][W(s_i)-W(t_{k-1})]\}$$
$$+E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(t_{k-1})-W(s_{i-1})]$$
$$\cdot[W(t_k)-W(s_i)]\}+E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})$$
$$\cdot[W(t_{k-1})-W(s_{i-1})][W(s_i)-W(t_{k-1})]\}$$

上式中第一、三、四项均为零，仅剩下第二项。故

$$\begin{aligned}
&E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(s_{i-1})] \\
&\quad\cdot[W(t_k)-W(t_{k-1})]\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})[W(s_i)-W(t_{k-1})]^2\} \\
&=E\{X(s_{i-1})X(t_{k-1})\}E\{[W(S_i) \\
&\quad-W(t_{k-1})]^2\} \\
&=R_x(s_{i-1},t_{k-1})(s_i-t_{k-1})\beta
\end{aligned}$$

其中 $E\{[W(s_i)-W(t_{k-1})]^2\}=\beta(s_i-t_{k-1})$（这里假设 $W(t)$ 的强度为 $\beta=\sigma^2$），$R_x(s,t)$ 是 $X(t)$ 的相关函数，s_i-t_{k-1} 是 $[s_{i-1},s_i]$ 和 $[t_{k-1},t_k]$ 公共部分的长度。

若将两组分点 $a=s_0<s_1<\cdots<s_m=b$ 和 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 合并为一组，并以 $a_0=u_0<u_1<\cdots<u_{m+n-1}=b$ 表示这些分点（若 s_i、t_k 有相重点，则 u_j 的个数小于 $m+n$），因为相关函数 $R_x(s,t)$ 是连续的，于是可得

$$E\{\eta_m\eta_n\}=\sum_{j=1}^{m+n-1}\{R_x(u_{j-1},u_{j-1})(u_j-u_{j-1})\beta$$
$$+o(u_j-u_{j-1})\}$$

因 $X(t)$ 为均方连续的二阶矩过程，$R_x(u,u)$ 是可积的，当 $\Delta_n\to 0$ 时，

$$\lim E\{\eta_m\eta_n\}=\beta\int_a^b R_x(u,u)du$$

存在，故伊藤积分 $\int_a^b X(t)dW(t)$ 存在。由于均方极限是唯

一的，故$\int_a^b X(t)dW(t)$是唯一的。

当W(t)为规范化维纳过程$W_0(t)$时，过程强度$\sigma^2=\beta=1$，则$E\left\{\left(\int_a^b X(t)dW_0(t)\right)^2\right\}=\int_a^b E\{X^2(t)\}dt$

例 研究$\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$

由于$W_0(t)$是规范化维纳过程，它满足上述定理的条件，故$\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$存在。取[a,b]的一组分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,\Delta_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$$

作下列和式

$$\sum_{k=1}^{n} W_0(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

$$=-\sum_{k=1}^{n} W_0(t_{k-1})[W(t_{k-1})-W(t_k)]$$

$$\begin{aligned}=-\{&W_0^2(t_0)-W_0(t_0)W_0(t_1)+W_0^2(t_1)\\&-W_0(t_1)W_0(t_2)+\cdots+W_0^2(t_{n-1})\\&-W_0(t_{n-1})W_0(t_n)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=-\Big\{&\frac{1}{2}W_0^2(t_0)+\frac{1}{2}[W_0(t_0)-W_0(t_1)]^2\\&+\frac{1}{2}[W_0(t_1)-W_0(t_2)]^2+\cdots\\&+\frac{1}{2}[W_0(t_{n-1})-W_0(t_n)]^2-\frac{1}{2}W_0^2(t_n)\Big\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

因此 $$\int_a^b W_0(t)\,dW_0(t)=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

下面计算上式右边的均方极限。令

$$W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})=\Delta W_{0k}$$

$$t_k-t_{k-1}=\Delta t_k$$

因 $$E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_{0k})^2-(b-a)\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n}[(\Delta W_{0k})^2-\Delta t_k]\right\}^2$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n}[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{\substack{k,i=1\\k\neq i}}^{n}\cdot[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k][\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i]\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{\substack{k\neq i\\k,i=1}}^{n}\cdot E\{[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k][\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i]\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{\substack{k\neq i\\k,i=1}}^{n}\cdot E\{\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k\}E\{\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^4-2(\Delta W_{0k}^2)(\Delta t_k)+(\Delta t_k)^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [3(\Delta t_k)^2 - 2(\Delta t_k)(\Delta t_k) + (\Delta t_k)^2\}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} (\Delta t_k)^2 \leqslant 2\Delta_n \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k$$

$$= 2\Delta_n (b-a) \to 0 \quad (\Delta_n \to 0)$$

因此 $\quad \underset{\Delta_n \to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2 = b - a$

综合上述的分析，得

$$\int_a^b W_0(t) dW_0(t) = \frac{1}{2}[W_0^2(b) - W_0^2(a)]$$

$$- \frac{1}{2}(b-a)$$

从这个例子可以看到伊藤积分和黎曼积分不同，黎曼积分中$\int_a^b f(x) df(x) = \frac{1}{2}[f^2(b) - f^2(a)]$

注 在定义伊藤随机积分时，已经指出了在和式$\sum_{k=1}^{n}$ $X(\quad)[W(t_k) - W(t_{k-1})]$中$X(t)$的自变量必须选取$t_{k-1}$，而不能任意选取$(t_{k-1}, t_k)$内的任一时刻$t_k'$。现用$\int_a^b W_0(t) dW_0(t)$的例子来说明之。

伊藤随机积分是

$$\int_a^b W_0(t) dW_0(t)$$

$$= \text{l.i.m} \sum_{k=1}^{n} W_0(t_{k-1})[W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]$$

$$= \text{l.i.m} \ I_n$$

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}W_0(t_{k-1})[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]$$

作另一种和式

$$J_n=\sum_{k=1}^{n}W_0(t_k)[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]$$

现在的问题是l.i.m J_n能否也看作$\int_a^b W_0(t)\,dW_0(t)$呢？事实上

$$J_n-I_n=\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

这就是说　　l.i.m$(J_n-I_n)=b-a$

即I_n、J_n有两个不同的均方极限值。这个例子说明在和式$\sum_{k=1}^{n}X(t_k')[W(t_k)-W(t_{k-1})]$中$X(t_k')$的$t_k'$不能任意选取，不同的$t_k'$会取得不同的均方极限，因此，对于伊藤积分规定$t_k'$确定地选取$[t_{k-1},t_k]$内的左端点$t_{k-1}$。

（三）伊藤积分的几个性质

① 设下列伊藤积分存在

$$\int_a^b X(t)dW(t),\qquad \int_a^b Y(t)dW(t)$$

则对任意常数α、β有

$$\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dW(t)$$
$$=\alpha\int_a^b X(t)dW(t)+\beta\int_a^b Y(t)dW(t)$$

② 如有$a\leqslant b\leqslant c$，则

$$\int_a^c X(t)dW(t)=\int_a^b X(t)dW(t)+\int_b^c X(t)dW(t)$$

③ 设 $\int_a^b X(t)dW_0(t)$存在，则对于 $a \leqslant t \leqslant b$

$$Y(t)=\int_a^t X(u)dW_0(u)$$

存在并且关于 t、Y(t)是均方连续的。

证

$$E\{|Y(t+h)-Y(t)|^2\}$$
$$=E\left\{\left[\int_t^{t+h} X(u)dW_0(u)\right]^2\right\}$$
$$=\int_t^{t+h} E\{X^2(u)\}du$$

故当 $h\to 0$ 时，$\int_t^{t+h} E\{X^2(u)\}du=0$，即Y(t)均方连续。

④ 设 $\{X_n(t), t\in T=[a,b]\}$ 是均方连续的二阶矩过程，且满足伊藤随机积分存在的条件，$X_n(t)$，$n=1,2,3,\cdots$是随机函数序列。如果关于 $t\in T$ 一致地有

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\ X_n(t)=X(t)$$

则 X(t)也是均方连续的，X(t)也满足伊藤积分存在的条件，且对于一切 $a\leqslant t\leqslant b$一致地有

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\int_a^t X_n(u)dW_0(u)=\int_a^b X(u)dW_0(u)$$

证 因为 $X_n(t)$ 一致均方收敛于X(t)，$X_n(t)$ 是均方连续的，所以X(t) 也是均方连续的。不难证明X(t) 满足伊藤积分存在的条件。设

$$\int_a^t X_n(u)dW_0(u)=Y_n(u)$$

$$\int_a^t X(u)dW_0(u)=Y(u)$$

则

$$E\{[Y_n(t)-Y(t)]^2\}$$

$$= E\left\{\left[\int_a^t X_n(u)dW_0(u) - \int_a^t X(u)dW_0(u)\right]^2\right\}$$

$$= E\left\{\left[\int_a^t [X_n(u) - X(u)]\, dW_0(u)\right]^2\right\}$$

$$= \int_a^t E\{[X_n(u) - X(u)]^2\}du$$

$$\leqslant \int_a^b E\{[X_n(u) - X(u)]^2\}du \to 0 \quad (n \to \infty)$$

因为最后一项与 t 无关，因此关于 t 收敛是一致的。

（四）有了伊藤积分的定义，则可以求解（1）式所表示的微分方程。

例：研究线性微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = -\alpha X(t) + \beta \dot{W}_0(t) & (t \geqslant 0) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

其中 α、β是常数，$\alpha > 0$，$\beta > 0$。该微分方程是伊藤随机微分方程中最简单的一种，称为Langevin方程。

解 具有如下形式的一阶常微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \alpha x(t) = g(t) & (t \geqslant 0) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

的解是 $$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} g(u)du$$

而本例中激励为白噪声 $\beta \dot{W}_0(t)$，X(t)可以在形式上表示成

$$X(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} \beta \dot{W}_0(u)du$$

$$= \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\dot{W}_0(u)$$

即它可以表示成伊藤积分的形式。而

$$E\{X(t)\}=0$$

故 $R_X(t_1,t_2)=\int_0^{\min(t_1,t_2)}\beta^2 e^{-\alpha(t_1-u)}e^{-\alpha(t_2-u)}du$

$$=\beta^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)}\int_0^{\min(t_1,t_2)}e^{2\alpha u}du$$

$$=\beta^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)}\frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha u}\Big|_0^{\min(t_1,t_2)}$$

$$=\frac{\beta^2}{2\alpha}[e^{-\alpha|t_1-t_2|}-e^{-\alpha(t_1+t_2)}]$$

$$(t_1\geqslant 0,t_2\geqslant 0)$$

$X(t)$称为奥伦斯坦-乌伦贝克过程。

注 比较维纳积分和伊藤积分可知，如在伊藤积分中$X(t)$取确定性函数，则它就是维纳积分。

如果在本例中，把加上激励的时间$t=0$改为$t=-\infty$，则它的解为

$$E\{X(t)\}=0$$

$$R_x(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t_1-t_2|}$$

现把本微分方程的解用于液面上运动的粒子。设$X(t)$表示时刻t时在液面上运动的一个粒子在某一方向上的速度，m是粒子的质量，则$m\frac{dX(t)}{dt}$代表时刻t时作用在粒子上的总合力。另一方面，可以认为该合力由两部分组成：（1）粒子与液体摩擦而产生的阻尼力$-fX(t)$，其中f是一系数；（2）液体分子冲击粒子所产生的在这个方向上的总合力，它当然是随机的，根据中心极限定理的概念可以认为它是正态分布的。因此

$$mX'(t) = -fX(t) + N(t)$$

或
$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{f}{m}X(t) + \beta\dot{W}_0(t)$$

设 $\alpha = f/m$，于是可得到粒子在某一方向上速度 $X(t)$ 的统计特性：

$$E\{X(t)\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t_1 - t_2|}$$

如果用 $Y(t)$ 表示在时刻 t 粒子在一个方向上的位置，则

$$Y(t) - Y(0) = \int_0^t X(u)du$$

由此可知 $Y(t)$ 是一正态过程，且

$$E\{Y(t) - Y(0)\} = 0$$

$$E\{|Y(t) - Y(0)|^2\}$$

$$= E\left\{\int_0^t X(u)du\int_0^t X(v)dv\right\}$$

$$= \int_0^t\int_0^t R_X(u-v)dudv$$

$$= 2\frac{\beta^2}{2\alpha}\int_0^t\int_v^t e^{-\alpha(u-v)}dudv$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^t (1 - e^{-\alpha(t-v)})dv$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(t - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)$$

习　题

1. 设n维正态分布随机矢量$\xi' = (\xi_1 \quad \xi_2 \cdots \xi_n)$各分量的均值为零，即$E\{\xi_i\} = 0$，$i = 1,2,3,\cdots,n$，它的协方差矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ & & & & n-2 & n-2 & n-2 \\ & & & & & n-1 & n-1 \\ & & & & & & n \end{pmatrix}$$

求它的概率密度函数。

2. 设ξ，η是相互统计独立的、正态分布的随机变量，且它们具有相同的概率密度$N(\mu,\sigma^2)$，试求随机变量$U = \alpha\xi + \beta\eta$和$V = \alpha\xi - \beta\eta$间的相关系数以及U、V的二维概率密度。

3. 设有二维随机矢量$\xi^T = (\xi_1 \quad \xi_2)$，其概率密度为

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1 x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

在椭圆

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\lambda^2$$

（λ 为常数）

上其概率密度为常数，因此称该椭圆为等概率椭圆。求随机变量(ξ_1,ξ_2)落在等概率椭圆内的概率。

4．设有n维随机矢量$\xi^{\tau}=(\xi_1\quad\xi_2\cdots\xi_n)$服从正态分布，各分量的均值为$E\xi_i=a$，$i=1,2,\cdots,n$，其协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & \cdots & 0\\ & & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & \cdots & 0\\ & & & & \cdots\cdots & \\ & & & & & \sigma^2\end{pmatrix}$$

试求其特征函数。

5．设n维正态分布随机矢量$\xi^{\tau}=(\xi_1\quad\xi_2\cdots\xi_n)$各分量的均值为$E\xi_i=i$，$i=1,2,3,\cdots,n$，各分量间的协方差为

$$b_{m,i}=n-|m-i|,\quad m,i=1,2,\cdots,n,$$

设有随机变量$\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，求η的特征函数。

6．设有三维正态分布随机矢量$\xi'=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)$，其各分量的均值为零，即$E\xi_i=0$，$i=1,2,3$，其协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

其中　　$b_{11}=b_{22}=b_{33}=\sigma^2$，试求

（1）　$E\{\xi_1\xi_2\xi_3\}$

（2） $E\{\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2\}$

（3） $E\{(\xi_1^2-\sigma^2)(\xi_2^2-\sigma^2)(\xi_3^2-\sigma^2)\}$

7. 设三维正态分布随机矢量 $\xi'=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ 的概率密度为

$$f_\xi(x_1,x_2,x_3)=C\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(2x_1^2-x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+4x_3^2)\right\}$$

（1） 证明经过线性变换

$$\eta=A\xi=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$$

得随机矢量 $\eta'=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则 η_1、η_2、η_3 是相互统计独立的随机变量。

（2） 求C值。

8. 设 ξ_1、ξ_2 为相互统计独立、均值为零、方差为1的正态分布随机变量。定义二维随机矢量

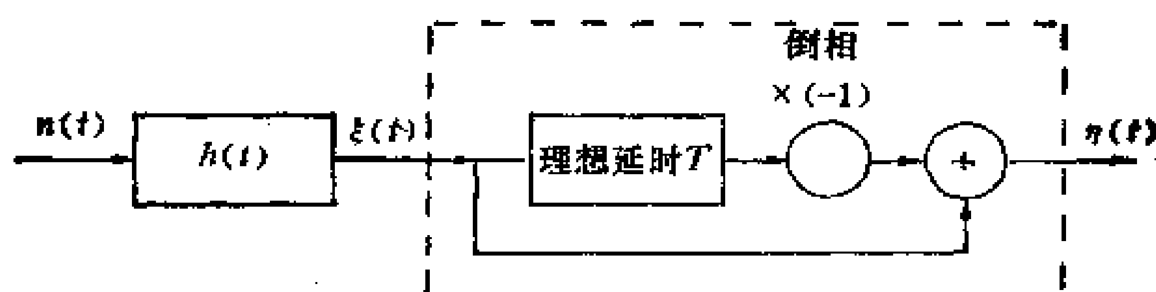
$$\eta'=(\eta_1\ \eta_2)=\begin{cases}(\xi_1 & |\xi_2|) & (\xi_1\geqslant 0)\\ (\xi_1 & -|\xi_2|) & (\xi_1<0)\end{cases}$$

试证（1） η_1 和 η_2 都是正态分布的；

（2） $\eta'=(\eta_1\ \ \eta_2)$ 不是二维正态分布。

9. 设有线性系统如图题6-9所示。输入为零均值白高斯噪声 $n(t)$，其功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$，冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$



图题 6-9

求输出 $\eta(t)$ 的一维概率密度 $f_{\eta_t}(y)$。

10. 设有线性系统如图题6-10所示。输入过程 $\xi(t)$ 为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为

$$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\qquad(\alpha>0)$$

图题 6-10

系统的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} & (t\geqslant 0,\beta>0,\beta\neq\alpha)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

如 $\xi(t)$ 是在 $t=-\infty$ 时接入系统的，

（1）求在 $t=0$ 时输出 $\eta(0)$ 大于y的概率 $P\{\eta(0)>y\}$；

（2）如果在 $t=-T$ 时 $\xi(-T)=0$，求 $\eta(0)>y$ 的条件概率 $P\{\eta(0)>y/\xi(-T)=0\}$，$T>0$。

（3）如果在 $t=T$ 时观察到的 $\xi(T)=0$，问 $\eta(0)>y$ 的概率如何？即求 $P\{\eta(0)>y/\xi(T)=0\}$，$T>0$。

11. 设有零均值平稳实高斯随机过程 $\xi(t)$，其功率谱密度为

$$S_{\xi}(f)=\begin{cases} S_0=\dfrac{P}{2(\Delta f)} & (|f|<\Delta f) \\ 0 & (\text{其他频率范围}) \end{cases}$$

如果对该过程每隔$\frac{1}{2\Delta f}$秒作一次抽样，得到样本值$\xi(0)$，

$\xi\left(\frac{1}{2\Delta f}\right)$，$\xi\left(\frac{2}{2\Delta f}\right)$，…

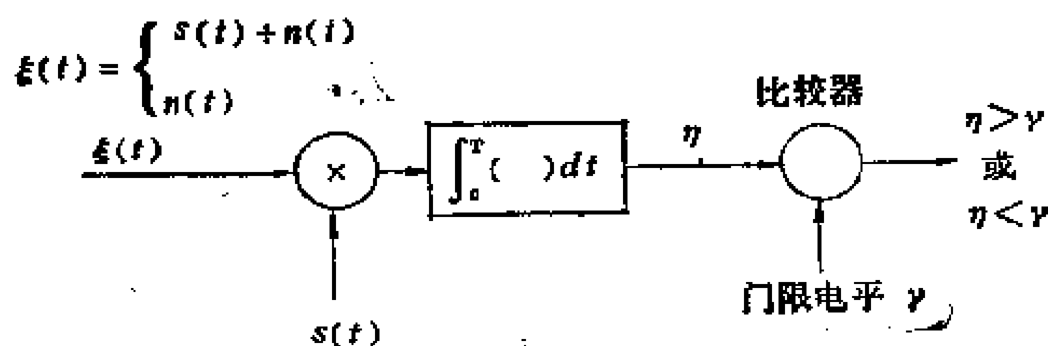
（1）写出前面n个样本点$\xi(t)$所取值$\left(\xi(0),\cdots,\right.$

$\left.\xi\left(\frac{n-1}{2\Delta f}\right)\right)$的n维联合概率密度。

（2）定义随机变量$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(\frac{k}{2\Delta f}\right)$求概率

$P\{|\eta_n|>\sqrt{\alpha P}\}$的表示式，$\alpha$为常数，$\alpha>0$。

12。设有图题 6-12 所示的接收机。



图题 6-12

接收机的输入有两种可能：

① 存在信号和噪声，$\xi(t)=s(t)+n(t)$

② 仅有噪声存在（信号不存在），$\xi(t)=n(t)$

$s(t)$ 代表信号，它是一确定性信号，在$(0,T)$内它具有能量$E_s=\int_0^T s^2(t)dt$。$n(t)$代表噪声，它是零均值白高斯随机过程，

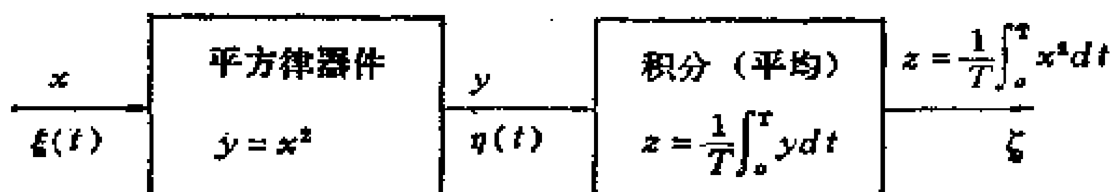
$$E\{n(t)n(u)\}=\frac{N_0}{2}\delta(t-u)$$

接收机的输出为η，把η和门限γ相比较，试求

① $P\{\eta>\gamma/$信号存在时$\}$，这就是发现概率；

② $P\{\eta>\gamma/$信号不存在时$\}$，这就是虚警概率。

13 设有图题6-13所示的非线性系统，它的输出、输入关系如图中所示。



图题 6-13

如果输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为

$$C_\xi(\tau)=Pe^{-\alpha|\tau|}$$

求 ① 输出均值$E\zeta$；

② 输出ζ的方差，$D\zeta$；

③ 设$u=\dfrac{D\zeta}{(E\zeta)^2}$，画出$u$对$(\alpha T)$的关系曲线。

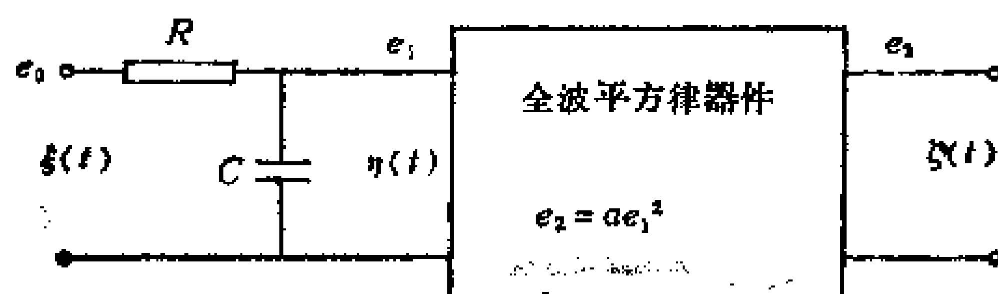
14 如上题，如果输入$\xi(t)$为零均值平稳实高斯过程，其功率谱密度为

$$S_\xi(f)=\begin{cases}\dfrac{A}{2\Delta f} & (|f|\leqslant\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率范围})\end{cases}$$

① 试证明 $E\zeta=A$；

② 假定$(\Delta f\cdot T)$之值很大，求ζ的方差$D\zeta$的近似表示式。

15 设有图题6-15所示的系统。



图题 6-15

若输入$\xi(t)$为零均值平稳实高斯过程，它的功率谱密度在本题感兴趣的频率范围内可以认为是平的，即假设$S_\xi(f)=N_0$，求输出$\zeta(t)$的相关函数和功率谱密度函数，并用草图绘出$\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$的相关函数和功率谱密度。

16 设有理想限幅器的输出、输入关系式为

$$y=L(x)=\begin{cases}+1 & (x\geqslant 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

又设输入$\xi(t)$为零均值、宽平稳实高斯过程，它的输出过程为$\eta(t)$，试证明输出、输入两个过程的相关函数间存在下列关系

$$R_\eta(\tau)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{R_\xi(\tau)}{R_\xi(0)}\right)$$

17　设有一非线性器件，它的输出、输入关系为

$$y(t)=a_1x(t)+a_3x^3(t)$$

又设随机输入$\xi(t)$为一零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为$R_\xi(t)$，试求$E\{\eta(t)\}$和$R_\eta(\tau)$，即求输出过程的均值和相关函数。

18　设有平稳奥伦斯坦-乌伦贝克过程$\xi(t)$，它的均值为零，相关函数为$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2e^{-\alpha|\tau|}$，$-\infty<\tau<\infty$，其中$\sigma_\xi^2$、$\alpha$为常数，$\alpha>0$。试证明该过程满足相关函数各态历经定理。

19　设有实平稳正态分布随机过程$\xi(t)$，其均值为零，其功率谱密度函数为

$$S_\xi(f)=\begin{cases}S_0 & \left(f_0-\dfrac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\dfrac{\Delta f}{2}\right)\\ 0 & (\text{其它频率})\end{cases}$$

求该过程在单位时间内到达极大值的平均次数。

20　设有实平稳正态分布随机过程$\xi(t)$，其均值为零，相关函数为$R_\xi(\tau)$，又设该过程均方可导，其导数过程为$\xi'(t)$，求在t_1，t_2两个时刻$\xi(t_1)$，$\xi'(t_1)$，$\xi(t_2)$，$\xi'(t_2)$的四维概率密度的表示式。

21　设有零均值的维纳过程$\{w(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$，其强度参数为$\sigma^2$，定义随机过程$\eta(t)$为

$$\eta(t)=\int_{t-1}^{t}[w(t)-w(u)]du\quad(1\leqslant t<\infty)$$

求随机过程$\eta(t)$的均值和相关函数。其中$w(t)=\sigma w_0(t)$。

22　设有规范化维纳过程$\{w_0(t),\ t\geqslant0\}$，设有时刻

$$0<t_1<t_2<t_3\cdots<t_m$$

求m个时刻$(W_0(t_1)\quad W_0(t_2)\cdots W_0(t_m))$所组成的m维随机矢量的协方差矩阵。

23　求下列微分方程的解

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt}+\alpha(t)X(t)=\beta(t)\dot{W}_0(t) \qquad (t\geqslant 0) \\ X(0)=X_0 \end{cases}$$

其中 $\alpha(t)$、$\beta(t)$ 均为时间函数，且均方可积，X_0 为常数。其解用维纳积分表示之。

24　设有微分方程

$$3\frac{dX(t)}{dt}+2X(t)=\dot{W}_0(t)$$

$X(t)$ 的初始值 $X(0)=X_0$ 为一常数，$W_0(t)$ 是规范化维纳过程，求随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的一维概率密度。

第七章 估值理论*

在随机信号受到噪声干扰的情况下，希望从观察到的样本函数中对信号的某些未知参数进行估计，这类问题称为估值问题。

如观察到的随机函数为 $\eta(t)=s(t)+\xi(t)$，其中 $\xi(t)$ 代表随机噪声，$s(t)$ 代表随机信号，$\eta(t)$ 代表观察得到的样本函数。现在的问题是从观察到的样本函数 $\eta(t)$ 中对信号 $s(t)$ 的某些未知参数进行估计。

§1 均方估值问题

设 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)'$ 和 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1\eta_2\cdots\eta_m)'$ 代表两随机矢量，两者存在联合分布。设 η 是观察到的值，现要通过 $\boldsymbol{\eta}$ 对 $\boldsymbol{\xi}$ 作估计。用 $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{Y})$ 表示对 $\boldsymbol{\xi}$ 的最佳估计。所谓最佳估计需要有一个准则，本章所采用的准则是均方误差最小的准则，

即 $E\{\|\boldsymbol{\xi}-\hat{\boldsymbol{\xi}}(\eta)\|^2/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\}=\min E\{\|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{K}\|^2/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\}$ (1)

其中 $\|\mathbf{u}\|^2=\mathbf{u}'\mathbf{u}$ 称为矢量 $\mathbf{u}$ 的范数，$\mathbf{K}$ 为任意矢量，$\mathbf{K}=(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n)'$ ($\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_n$ 可取任意值）。因

$$
\begin{aligned}
&E\{\|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{K}\|^2/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\\
&=E\{\|\boldsymbol{\xi}-E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta})+E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta})-\mathbf{K}\|^2/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\}\\
&=E\{\|\boldsymbol{\xi}-E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta})\|^2/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\}\\
&+E\{[\boldsymbol{\xi}-E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta})]^2\cdot[E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta}-\mathbf{K})]/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}\}\\
&+E\{[E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta}-\mathbf{K}]^2\cdot[\boldsymbol{\xi}-E(\boldsymbol{\xi}/\boldsymbol{\eta})]/\boldsymbol{\eta}=\mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

$+E\{\|E(\xi/\eta)-K\|^2/\eta=Y\}=E\{\|\xi-E(\xi/\eta)\|^2/\eta=Y\}$

$$+E\{\|E(\xi/\eta)-K\|^2/\eta=Y\} \quad (2)$$

在（2）式右边包含K的只有$E\{\|E(\xi/\eta)-K\|^2/\eta=Y\}=\|E(\xi/\eta=Y)-K\|^2$这一项。当这一项为零时，（2）式取最小值，因此

$$\hat{\xi}(Y)=E\{\xi/\eta=Y\} \quad (3)$$

或 $E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2/\eta=Y\}=\min E\{\|\xi-l\|^2/\eta=Y\}$ （4）

应注意，$\hat{\xi}(Y)$是一n维列矢量，且$\hat{\xi}(Y)$是随机矢量η的函数，如果一次测量取得的观察值为$\eta=Y$，则得到一列矢量$\hat{\xi}(\eta=Y)$。不同次测量所取得的观察值是不同的，则所得的$\hat{\xi}(Y)$也是不同的。

设$g(\eta)$是η的函数，使$R^m\to R^n$，并假设η的概率密度为$f_{[\eta]}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\neq 0$，从（4）式可知

$$E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2/\eta=Y\}\leqslant E\{\|\xi-g(\eta)\|^2/\eta=Y\} \quad (5)$$

（5）式用$g(\eta)$代替了（4）式中的K。如果（5）式中对η再取一次均值，则

$$E_{[\eta]}(E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2/\eta=Y\})$$
$$\leqslant E_{[\eta]}(E\{\|\xi-g(\eta)\|^2/\eta=Y\}) \quad (6)$$

$$E_{[\eta]}(E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2/\eta=Y\})$$
$$=E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2\} \quad (7)$$

$$E_{[\eta]}(E\{\|\xi-g(\eta)\|^2/\eta=Y\})$$
$$=E\{\|\xi-g(\eta)\|^2\} \quad (8)$$

（7）、（8）两式右边的数学期望值是对ξ、η两随机矢量的数学期望，它是无条件数学期望。根据（6）、（7）、（8）三式得

$$E\{\|\xi-\hat{\xi}(\eta)\|^2\}\leqslant E\{\|\xi-g(\eta)\|^2\} \quad (9)$$

（9）式指出了估值$\hat{\xi}(\eta)=E\{\xi/\eta\}$是无约束条件下的最

佳估计（在均方意义下的最佳估计）。

定理 设有两随机矢量ξ、η其联合概率密度为$f_{(\xi\eta)}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$，且$f_{(\eta)}(y_1, y_2, \cdots, y_m) \neq 0$，则$E\{\|\xi - g(\eta)\|^2\}$的最佳估计为

$$\hat{\xi}(\eta) = E\{\xi/\eta\} \qquad (10)$$

即
$$E\{\|\xi - \hat{\xi}(\eta)\|^2\} = \min E\{\|\xi - g(\eta)\|^2\} \qquad (11)$$

在统计学中称$\hat{\xi}(\eta) = E\{\xi/\eta\}$为$\xi$关于$\eta$的回归。

例 设随机变量ξ、η服从二元正态分布，其二元概率密度为

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

求最佳估计$\hat{\xi}(\eta)$。

解 从二元概率密度$f_{\xi\eta}(x, y)$可得η的概率密度为

$$f_\xi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

根据$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\eta(y)f_{\xi/\eta}(x/\eta = y)$

故
$$f_{\xi/\eta}(x/\eta = y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x - \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2\right\}$$

于是
$$\hat{\xi}(y) = E\{\xi/\eta = y\} = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

这是一个很简单的例子。在一般情况下$\hat{\xi}(\eta) = E\{\xi/\eta = Y\}$是$Y$的一个函数。

§2 最佳线性估计

对于正态分布的随机矢量，ξ 关于 η 的回归是线性的。对于非正态分布随机矢量，$\hat{\xi}(\eta)=E\{\xi/\eta=Y\}$ 一般不是线性函数。在非正态分布的情况下要从观察的数据资料中确定回归函数是十分困难的，此时常常找一个线性函数

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\eta})=\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}+\mathbf{b} \tag{12}$$

使

$$E\{\|\boldsymbol{\xi}-\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\eta})\|^2\}=E\{\|\boldsymbol{\xi}-(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}+\mathbf{b})\|^2\} \tag{13}$$

达到最小值，其中 $\mathbf{A}$ 为 $(n\times m)$ 矩阵，$\mathbf{b}$ 为 n 元列矢量，也就是说，选择 $\mathbf{A}$、$\mathbf{b}$ 中的矩阵元，以使（13）式为最小。

写出（12）式的每一行，

$$\hat{\xi}_i=A_{i1}\eta_1+A_{i2}\eta_2+\cdots+A_{im}\eta_m+b_i \tag{14}$$

要使 $E\{\|\boldsymbol{\xi}-\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\eta})\|^2\}$ 最小，则必须要求 $E\{[\xi_i-\hat{\xi}_i]^2\}$ 为最小，即使 $E\{\|\boldsymbol{\xi}-\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\eta})\|^2\}$ 展开式中每一项均为最小。记

$$\begin{aligned}
L(b_i,\mathbf{A}_i)&\triangleq E\{[\xi_i-\hat{\xi}_i]^2\}\\
&=E\{[\xi_i-(b_i+A_{i1}\eta_1+A_{i2}\eta_2\\
&\quad+\cdots+A_{im}\eta_m)]^2\}\\
&=E\{[(\xi_i-E\xi_i)-A_{i1}(\eta_1-E\eta_1)\\
&\quad-A_{i2}(\eta_2-E\eta_2)-\cdots-A_{im}(\eta_m-E\eta_m)\\
&\quad+E\xi_i-b_i-A_{i1}E\eta_1-A_{i2}E\eta_2-\cdots\\
&\quad-A_{im}E\eta_m]^2\}=[E\xi_i-(b_i+A_{i1}E\eta_1\\
&\quad+A_{i2}E\eta_2+\cdots+A_{im}E\eta_m)]^2\\
&\quad+\mathbf{A}_i\mathbf{C}_{[\eta\eta]}\mathbf{A}_i^\tau-2\mathbf{A}_i\mathbf{C}_{\xi_i[\eta]}+D\xi_i
\end{aligned} \tag{15}$$

（15）式中 $\quad\mathbf{A}_i=(A_{i1}\ A_{i2}\ A_{i3}\cdots A_{im})$

$$\mathbf{C}_{[\eta\eta]}\triangleq E\{(\boldsymbol{\eta}-E\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta}-E\boldsymbol{\eta})^\tau\}$$

$$
= \begin{pmatrix} D\eta_1 & cov(\eta_1, \eta_2) \cdots & cov(\eta_1, \eta_m) \\ cov(\eta_2, \eta_1) & D\eta_2 \quad \cdots & cov(\eta_2, \eta_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(\eta_m, \eta_1) & cov(\eta_m, \eta_2) \cdots & D\eta_m \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_{\xi_i[\eta]} \triangleq \begin{pmatrix} cov(\xi_i, \eta_1) \\ cov(\xi_i, \eta_2) \\ \vdots \\ cov(\xi_i, \eta_m) \end{pmatrix}
$$

令 $$\frac{\partial L(b_i, \mathbf{A}_i)}{\partial b_i} = 0$$

得 $$\hat{b}_i = E\xi_i - \hat{\mathbf{A}}_i E\boldsymbol{\eta} \tag{16}$$

令 $$\frac{\partial L(b_i, \mathbf{A}_i)}{\partial \mathbf{A}_{ik}} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

得 $$\mathbf{A}_{i1} cov(\eta_k, \eta_1) + \mathbf{A}_{i2} cov(\eta_k, \eta_2) + \cdots$$
$$+ \mathbf{A}_{im} cov(\eta_k, \eta_m) = cov(\xi_i, \eta_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

故 $$\hat{\mathbf{A}}_i^{\tau} = \mathbf{C}_{[\eta\eta]}^{-1} \mathbf{C}_{\xi_i[\eta]} \tag{17}$$

这里假定了 $\mathbf{C}_{[\eta\eta]}^{-1}$ 是存在的。从（16）式

$$\hat{\mathbf{b}} = E\boldsymbol{\xi} - \hat{\mathbf{A}} E\boldsymbol{\eta} \tag{18}$$

从（17）式 $$\hat{\mathbf{A}}_i = \mathbf{C}_{\xi_i[\eta]}^{\tau} \mathbf{C}_{[\eta\eta]}^{-1} \tag{19}$$

故 $$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_{[\xi\eta]} \mathbf{C}_{[\eta\eta]}^{-1} \tag{20}$$

其中

$$
\mathbf{C}_{[\xi\eta]} = \begin{pmatrix} cov(\xi_1, \eta_1) & cov(\xi_1, \eta_2) & \cdots & cov(\xi_1, \eta_m) \\ cov(\xi_2, \eta_1) & cov(\xi_2, \eta_2) & \cdots & cov(\xi_2, \eta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(\xi_n, \eta_1) & cov(\xi_n, \eta_2) & \cdots & cov(\xi_n, \eta_m) \end{pmatrix}
$$
$$= E\{(\boldsymbol{\xi} - E\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} - E\boldsymbol{\eta})^{\tau}\} \tag{21}$$

将（20）式代入（18）式得

$$\hat{b} = E\xi - C_{[\xi\eta]}C_{[\eta\eta]}^{-1}E\eta \tag{22}$$

将（20）、(22)式代入（12）式得

$$\hat{\xi}(\eta) = E\xi - C_{[\xi\eta]}C_{[\eta\eta]}^{-1}E\eta + C_{[\xi\eta]}C_{[\eta\eta]}^{-1}\eta$$

或

$$\hat{\xi}(\eta) - E\xi = C_{[\xi\eta]}C_{[\eta\eta]}^{-1}(\eta - E\eta) \tag{23}$$

利用（23）式，可以用 $\eta = Y$ 值来最佳估计 ξ。由于每次测量所得的 Y 是不同的，因此其估值 $\hat{\xi}(\eta)$ 是随机的。

如果 ξ、η 的均值均为零，则（23）式可改写为

$$\hat{\xi}(\eta) = C_{[\xi\eta]}C_{[\eta\eta]}^{-1}\eta \tag{24}$$

§3 正交性原理

本节将用另一种方法研究最佳线性估计。这种方法利用正交性原理，它比 § 2 中所讨论的方法方便。

定义 设有两复随机变量 η_1、η_2，如果满足条件

$$E\{\eta_1\bar{\eta}_2\} = E\{\bar{\eta}_1\eta_2\} = 0 \tag{25}$$

则称随机变量 η_1 与 η_2 正交。

由上述定义可导出如下结论：

设有一复随机变量 ξ，它与复随机变量 η_1，η_2，η_3，…，η_m 相互正交，即 $E\{\bar{\xi}\eta_i\} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$，

则
$$E\{\bar{\xi}(a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_m\eta_m)\} = 0$$

其中 a_1，a_2，…，a_m 为任意复常数。这就说明随机变量 ξ 与 η_1，η_2，…，η_m 的线性组合也是正交的。

为了简便起见，在下面的讨论中假设随机变量 ξ，η_1，η_2，…，η_m 的均值均为零，即 $E\{\xi\} = 0$，$E\{\eta_i\} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$，它们之间的协方差为 $C_{ij} = E\{\eta_i\bar{\eta}_j\}$

$$C_{\xi\eta j}=E\{\xi\bar{\eta}_j\}$$

现在的问题是如何利用 η_1, η_2, …, η_m 的观察值去估计 ξ，以使均方误差最小。

定理 若用η_1, η_2, …, η_m的线性组合$\hat{\xi}=a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m$去估计$\xi$，其误差为$\xi-\hat{\xi}=e$，若$e$和$\eta_1$, η_2, …, η_m正交，则此估计值为最小均方误差的估计值。

证明 给定的条件是

$$E\{e\bar{\eta}_j\}=E\{[\xi-\hat{\xi}]\bar{\eta}_j\}=E\{[\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)]\bar{\eta}_j\}$$

$$=0 \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

$$E\{\bar{e}\eta_j\}=E\{(\overline{\xi-\hat{\xi}})\eta_j\}=$$

$$E\{[\bar{\xi}-\overline{(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)}]\eta_j\}=0$$

$$(j=1,2,\cdots,m)$$

设另有 m 个常数 A_1, A_2, …, A_m, 用 $A_1\eta_1+\cdots+A_m\eta_m$ 去估计ξ，则其误差为

$$\xi-(A_1\eta_1+\cdots+A_m\eta_m)=\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)$$

$$+(a_1-A_1)\eta_1+\cdots+(a_m-A_m)\eta_m$$

则其均方误差为

$$E\{|\xi-(A_1\eta_1+\cdots+A_m\eta_m)|^2\}$$

$$=E\{|\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)|^2\}$$

$$+E\{[\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)]$$

$$\cdot\overline{[(a_1-A_1)\eta_1+\cdots+(a_m-A_m)\eta_m]}\}$$

$$+E\{[\bar{\xi}-\overline{(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)}][(a_1-A_1)\eta_1$$

$$+\cdots+(a_m-A_m)\eta_m]\}$$

$$+E\{|(a_1-A_1)\eta_1+\cdots+(a_m-A_m)\eta_m|^2\}$$

$$=E\{|\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)|^2\}$$

$$+E\{|(A_1-a_1)\eta_1+\cdots+(a_m-A_m)\eta_m|^2\}$$

$$\geqslant E\{|\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)|^2\}$$

只有当 $A_1=a_1$，$A_2=a_2\cdots$，$A_m=a_m$ 时上式才能取等号。定理得证。

该定理说明，如果能使 $e=\xi-\hat{\xi}$ 与 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 正交，得到的 a_1、a_2、$\cdots$，a_m 值就保证了 $\hat{\xi}=a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m$ 为 ξ 的最小均方误差估计。

如对本定理的条件作适当运算，可得下列结果：

（1）因 $E\{e\bar{\eta}_j\}=E\{[\xi-(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)\bar{\eta}_j]\}$

$$=0\quad (j=1,2,\cdots,m)$$

或 $C_{\xi\eta j}=a_1C_{1j}+a_2C_{2j}+\cdots+a_mC_{mj}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ （26）

（26）式代表一组联立方程，于是得

$$\mathbf{a}=(\mathbf{C}^{-1}_{[\eta\eta]})^{\prime}\mathbf{C}_{\xi[\eta]} \qquad (27)$$

其中 $\mathbf{a}^{\prime}=(a_1\quad a_2\cdots a_m)$

$$\mathbf{C}^{\prime}_{[\eta\eta]}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{m1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1m} & C_{2m} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{\prime}_{\xi[\eta]}=(C_{\xi\eta 1}\quad C_{\xi\eta 2}\cdots C_{\xi\eta m})$$

于是 $\hat{\xi}=\mathbf{a}^{\prime}\boldsymbol{\eta}=\mathbf{C}^{\prime}_{\xi[\eta]}\mathbf{C}^{-1}_{[\eta\eta]}\boldsymbol{\eta}$ （28）

（28）式相当于§2中的（24）式，其差别在于（28）式仅估计了（24）式中的一个 ξ 的分量。

（2）因 $E\{e\bar{\eta}_j\}=E\{(\xi-\hat{\xi})\bar{\eta}_j\}=0\quad (j=1,2,\cdots,m)$

则 $E\{(\xi-\hat{\xi})\overline{(a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_m\eta_m)}\}=0$

或 $E\{(\xi-\hat{\xi})\bar{\hat{\xi}}\}=0$ （29）

$$E\{\xi\bar{\hat{\xi}}\}=E\{|\hat{\xi}|^2\} \qquad (30)$$

在正交条件下的均方误差为

$$E\{|\xi-\hat{\xi}|^2\}=E\{[\xi-\hat{\xi}]\overline{[\xi-\hat{\xi}]}\}=E\{[\xi-\hat{\xi}]\bar{\xi}\}$$

$$=E\{|\xi|^2\}-E\{\hat{\xi}\bar{\xi}\} \qquad (31)$$

从(29)式 $E\{\overline{(\xi-\hat{\xi})}\hat{\xi}\}=0$，或 $E\{\bar{\xi}\hat{\xi}\}=E\{|\hat{\xi}|^2\}$ (32)

将(32)式代入(31)式

$$E\{|\xi-\hat{\xi}|^2\}=E\{|e|^2\}$$

$$=E\{|\xi|^2\}-E\{|\hat{\xi}|^2\} \qquad (33)$$

或 $E\{|\xi|^2\}=E\{|e|^2\}+E\{|\hat{\xi}|^2\}$

$$=E\{|\xi-\hat{\xi}|^2\}+E\{|\hat{\xi}|^2\} \qquad (34)$$

(29)、(32)式说明 $e=\xi-\hat{\xi}$ 与 $\hat{\xi}$ 正交，ξ 在 $a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m$ 上的投影为$\hat{\xi}$。(34)式满足毕达哥拉斯定理。由(31)式得

$$E\{|\xi-\hat{\xi}|^2\}=E\{|\xi|^2\}-E\{(a_1\eta_1+\cdots+a_m\eta_m)\bar{\xi}\}$$

$$=C_{\xi\xi}-(a_1C_{\eta1\xi}+a_2C_{\eta2\xi}+\cdots$$

$$+a_mC_{\eta m\xi}) \qquad (35)$$

讨论一　如果 ξ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 均不相关，即 $C_{\eta1\xi}=0$，$\cdots$，$C_{\eta m\xi}=0$，此时 ξ 与 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 均正交，无法用 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 去估计 ξ。

从(27)式，$a=0$，即 $\hat{\xi}=0=E\{\xi\}$，此时的最佳估计 $\hat{\xi}=0$。

从(35)式，此时的均方误差为 $E\{|e|^2\}=C_{\xi\xi}=D\xi$。

讨论二　如果 ξ 与 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 之间有一定的相关性，即可以利用 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 来估计 ξ，根据(35)式，其均方误差为

$$E\{|e|^2\}=C_{\xi\xi}-(a_1C_{\eta1\xi}+a_2C_{\eta2\xi}+\cdots+a_mC_{\eta m\xi})$$

即比 $D\xi$ 减少了 $(a_1C_{\eta1\xi}+a_2C_{\eta2\xi}+\cdots+a_mC_{\eta m\xi})$。

讨论三　如果 η_1，η_2，$\cdots$，η_m 彼此间是正交的，即当

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$ 时，$E\{\eta_i \bar{\eta}_j\} = 0$，在这种情况下

$$a_i = C_{\xi\eta_i}/C_{ii}$$

讨论四 一般说，增加新的数据 η_{m+1}，η_{m+2}，…可以更好地估计ξ。但是，如果$\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \cdots, \eta_{m+s}$和$[\xi - (a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_m\eta_m)] = e$正交时，$\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \cdots \eta_{m+s}$的增加无助于改善$\xi$的估计值（这并不说明$\eta_{m+1}$，$\eta_{m+2}$，…，$\eta_{m+s}$和$\xi$正交）。然而，如果在$\eta_1$，$\eta_2$，…，$\eta_m$内减少某些随机变量，则新增加的随机变量$\eta_{m+1}$，$\eta_{m+2}$，…就会起作用。

在本节开始时，我们假定了$E\{\eta_i\} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$，前面的讨论是在这个假设下进行的。如果随机变量η_1，η_2，…，η_m的均值不为零，虽然仍可用$\hat{\xi} = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m$估计$\xi$（因为在前面的定理证明中没有利用$E\{\eta_i\} = 0$这个条件），但为了更好的估计$\xi$，可采用下述方法：设$\hat{\xi} = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m + b$作为$\xi$的估计值，使$E\{|\xi - \hat{\xi}|^2\}$为最小，即增加一个参量$b$，用$m+1$个参数估计$\xi$。

使$E\{|\xi - \hat{\xi}|^2\}$为最小的条件是

$$E\{[\xi - (a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_m\eta_m + b)]\bar{\eta}_i\} = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m) \tag{36}$$

（共有m个方程式）和

$$E\{\xi - (a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_m\eta_m + b)\} = 0 \tag{37}$$

为什么用$\hat{\xi} = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m + b$估计$\xi$时，会出现条件(36)、(37)式呢？如果在$\eta_1$，$\eta_2$，…，$\eta_m$之外增添一个随机变量$\eta_{m+1}$，$\eta_{m+1} = 1 =$常数，此时共有$m+1$个数据用来估计$\xi$，那么$\hat{\xi} = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_m\eta_m + b\eta_{m+1}$是一个齐次式，它是$\eta_1$，$\eta_2$，…，$\eta_m$，$\eta_{m+1}$的线性组合。利用正交性原理使$E\{(\xi - \hat{\xi})\bar{\eta}_i\} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, m, m+1$，于是可得$m+1$

个方程，其中 m 个方程就是式(36)，第 m+1个方程中$\overline{\eta_{m+1}}=1$，故其表示式就是（37）式。因此，(36)、(37)式是使 $E\{|\xi-\hat{\xi}|^2\}$ 最小的条件。

从(37)式，$E\{\xi-\hat{\xi}\}=E\{e\}=0$，它说明误差的均值为零。而且，根据 $E\{\eta_i\}\neq 0$，则 $E\{\xi\}\neq 0$。

化简(36)式得

$$R_{\xi\eta i}=a_1R_{1i}+a_2R_{2i}+\cdots+a_mR_{mi}+bE\{\overline{\eta_i}\} \tag{39}$$

(39)式采用的是相关矩，而(26)式采用的是协方差。

根据(37)式

$$\begin{aligned} b &= E\xi-(a_1E\eta_1+a_2E\eta_2+\cdots+a_mE\eta_m) \\ &= E\xi-\mathbf{a}'E\eta \end{aligned} \tag{40}$$

在(40)式中

$$\mathbf{a}'=(a_1\ \ a_2\cdots a_m)$$
$$\eta=(\eta_1\ \ \eta_2\cdots\eta_m)'$$
$$E\eta=(E\eta_1\ \ E\eta_2\cdots E\eta_m)'$$

(40)式代入(39)式得

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta i}-E\xi E\overline{\eta_i} &= a_1(R_{1i}-E\eta_1E\overline{\eta_i})+\cdots \\ &\quad +a_m(R_{mi}-E\eta_mE\overline{\eta_i}) \end{aligned}$$

或

$$C_{\xi\eta i}=a_1C_{1i}+a_2C_{2i}+\cdots+a_mC_{mi} \tag{41}$$

其中 $C_{\xi\eta i}=R_{\xi\eta i}-E\xi E\overline{\eta_i}$

代表 ξ 和 ηi 间的协方差，

$$C_{1i}=R_{1i}-E_{\eta 1}E\overline{\eta_i}=E\{(\eta_1-E\eta_1)\overline{(\eta_i-E\eta_i)}\}$$

代表 η_1 和 η_i 间的协方差。

(41)式代表一组联立方程，解之得

$$\mathbf{a}=(\mathbf{C}^{-1}_{[\eta\eta]})'\mathbf{C}_{\xi[\eta]} \tag{42}$$

其中

$$\mathbf{C}'_{[\eta\eta]}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \cdots & C_{m1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \cdots & C_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1m} & C_{2m} & C_{3m} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix}.$$

$$C_{\xi[\eta]} = (C_{\xi\eta 1} C_{\xi\eta 2} \cdots C_{\xi\eta m})'$$

故 $\hat{\xi} = a'\eta + b = a'\eta + E\xi - a'E\eta$

或 $\hat{\xi} - E\xi = a'(\eta - E\eta) = C'_{\xi[\eta]} C^{-1}_{[\eta\eta]}(\eta - E\eta)$ (43)

比较(43)式与§2中的(23)式可知，(43)式中的ξ相当于(23)式中的一个分量。

因此，如采用正交性原理，通过$\eta = (\eta_1 \cdots \eta_m)'$，对$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \cdots \xi_n)'$进行最小均方误差估计，其估值为

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\eta) - E\boldsymbol{\xi} = C_{[\xi\eta]} C^{-1}_{[\eta\eta]}(\eta - E\eta)$$

式中 $C_{[\eta\eta]} = E\{(\eta - E\eta)(\bar{\eta} - E\bar{\eta})'\}$

$C_{[\xi\eta]} = E\{(\boldsymbol{\xi} - E\boldsymbol{\xi})(\bar{\eta} - E\bar{\eta})'\}$

例 设有随机变量ξ、η，已知$E\{\eta^n\} = m_n$，$n \geqslant 2$，$E\{\eta\} = 0$，以及$\xi = \eta^2$。若以η的观察值对ξ作线性估计，求其最佳估计。

解 根据题意$\mu_\xi = E\{\xi\} = E\{\eta^2\} = m_2 \neq 0$

于是最佳线性估计$\hat{\xi}$应具有如下形式

$$\hat{\xi} = a\eta + b$$

所谓最佳是指$E\{[\xi - \hat{\xi}]^2\} = E\{[\xi - (a\eta + b)]^2\}$取极小值，就是选择a、b值以使$E\{[\xi - \hat{\xi}]^2\}$最小。

现利用正交性原理求解。根据(37)式

$$E\{\xi - a\eta - b\} = 0$$

$$b = E\xi = m_2$$

根据(36)式 $E\{[\xi - (a\eta + b)]\eta\} = 0$

或 $E\xi\eta = aE\eta^2$

即 $$a = \frac{E\{\xi\eta\}}{E\{\eta^2\}} = \frac{E\{\eta^3\}}{E\{\eta^2\}} = \frac{m_3}{m_2}$$

故 $$\hat{\xi} = \frac{m_3}{m_2}\eta + m_2$$

§4 最小均方误差估值在随机过程中应用举例

本节利用正交性原理研究一些简单但有意义的随机过程的估值问题。为了简单起见，假定下述各例中的随机过程为零均值实平稳随机过程。

例一 预测问题 设有零均值实平稳过程$s(t)$，现在的问题是要利用已知值$s(t)$预测未来值$s(t+\lambda)$，其中λ为一常数，$\lambda>0$。

解 问题的实质是已知t时刻随机过程$s(t)$的值，它是一随机变量，对未知的随机变量$s(t+\lambda)$进行估计。可利用§3的正交性原理，设$t+\lambda$时的估计值为$\hat{s}(t+\lambda)$，则

$$\hat{s}(t+\lambda)=as(t)$$

选择合适的a值使

$$E\{[s(t+\lambda)-as(t)]s(t)\}=0$$

故

$$R_s(\lambda)=aR_s(0)$$

$$a=\frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)}\leqslant 1$$

式中$R_s(\lambda)$代表$s(t)$的相关函数。可用图7-1中所示电路获得$s(t+\lambda)$的预测值。

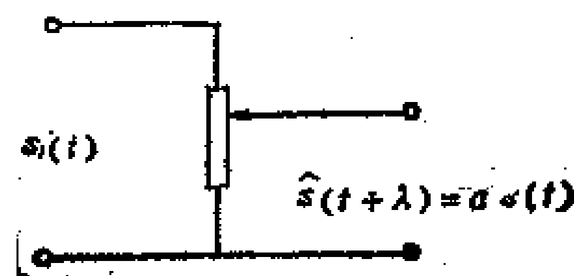


图 7-1

最佳预测时的最小均方误差为

$$
\begin{aligned}
&E\{[s(t+\lambda)-\hat{s}(t+\lambda)]^2\}\\
&=E\{[s(t+\lambda)-as(t)]s(t+\lambda)\}\\
&=R_s(0)-aR_s(\lambda)=R_s(0)-\frac{[R_s(\lambda)]^2}{R_s(0)}
\end{aligned}
$$

若随机过程 $s(t)$ 的相关函数为 $R_s(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$

则
$$a=\frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)}=e^{-\alpha\lambda}$$

最小均方误差为

$$E\{[s(t+\lambda)-\hat{s}(t+\lambda)]^2\}=\sigma^2(1-e^{-2\alpha\lambda})$$

如果 $e^{-2\alpha\lambda}\ll 1$，则虽然利用了 $s(t)$ 的信息，但对估计 $s(t+\lambda)$ 之值并无多大好处。

讨论 正交性原理利用了 $e=s(t+\lambda)-as(t)$ 与 $s(t)$ 的正交，即 $E\{[s(t+\lambda)-as(t)]s(t)\}=0$

若过程的相关函数为 $R_s(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$，又设 $u\leqslant t$，u 代表 t 以前的时刻，则 $s(t+\lambda)-as(t)$ 也与 $s(u)$ 正交。因为

$$
\begin{aligned}
&E\{[s(t+\lambda)-as(t)]s(u)\}=R_s(t+\lambda-u)\\
&\quad -aR_s(t-u)=\sigma^2[e^{-\alpha(t+\lambda-u)}\\
&\quad -e^{-\alpha\lambda}e^{-\alpha(t-u)}]=0
\end{aligned}
$$

这说明，当 $R_s(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$时，虽然$(-\infty,t)$内所有信号值都是已知的，但对 $s(t+\lambda)$ 的最佳估计仅仅利用了 t 时刻的信号值 $s(t)$，t 时刻以前的信息对估计 $s(t+\lambda)$ 并无帮助。

例二 在系统中信号总是伴随着噪声。设本系统的信号为一随机过程 $s(t)$，它所伴随的噪声也是一随机过程 $n(t)$，因此所能测量到的随机过程 $x(t)$ 为信号与噪声之和，即$x(t)=s(t)+n(t)$。现在的问题是利用测量到的 $x(t)$ 对信号 $s(t)$

进行估计。这就是过滤问题。若 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是相互统计独立的随机过程，求最佳估值 $\hat{s}(t)$。

解 设 $E\{s(t)\}=0$，$E\{n(t)\}=0$，则 $E\{x(t)\}=0$。利用正交性原理，设 $s(t)$ 的最佳估值为

$$\hat{s}(t)=ax(t)$$

则 $$E\{[s(t)-\hat{s}(t)]x(t)\}=E\{[s(t)-ax(t)]x(t)\}=0$$

即 $$R_{sx}(0)=aR_{xx}(0)$$

或 $$a=\frac{R_{sx}(0)}{R_{xx}(0)}$$

由于 $$x(t)=s(t)+n(t)$$

$$\begin{aligned}R_{xx}(\tau)&=E\{x(t+\tau)x(t)\}\\&=E\{[s(t+\tau)+n(t+\tau)][s(t)+n(t)]\}\\&=R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{sx}(\tau)&=E\{s(t+\tau)x(t)\}\\&=E\{[s(t+\tau)][s(t)+n(t)]\}=R_{ss}(\tau)\end{aligned}$$

因此 $$a=\frac{R_{ss}(0)}{R_{ss}(0)+R_{nn}(0)}$$

最小均方误差为

$$\begin{aligned}M.M.S.E&=E\{[s(t)-\hat{s}(t)]^2\}\\&=E\{[s(t)-ax(t)]s(t)\}\\&=R_{ss}(0)-aR_{sx}(0)=R_{ss}(0)-\frac{[R_{sx}(0)]^2}{R_{xx}(0)}\\&=R_{ss}(0)-\frac{[R_{ss}(0)]^2}{R_{ss}(0)+R_{nn}(0)}\\&=\frac{R_{ss}(0)R_{nn}(0)}{R_{ss}(0)+R_{nn}(0)}\end{aligned}$$

例三 内插法 设有零均值实平稳随机过程 $s(t)$，t 是

$[0,T]$内的一点。若已知$s(0)$、$s(T)$，利用$s(0)$、$s(T)$对$s(t)$进行最佳估计。

解 设$s(t)$的最佳估计为

$$\hat{s}(t)=as(0)+bs(T)$$

利用正交性原理得

$$E\{[s(t)-\hat{s}(t)]s(0)\}=E\{[s(t)-as(0)-bs(T)]s(0)\}=0$$

$$E\{[s(t)-\hat{s}(t)]s(T)\}$$
$$=E\{[s(t)-as(0)-bs(T)]s(T)\}=0$$

即
$$R_s(t)=aR_s(0)+bR_s(T)$$
$$R_s(T-t)=aR_s(T)+bR_s(0)$$

其中$R_s(\tau)$代表s(t)的相关函数。解上述联立方程得

$$a=\frac{R_s(t)R_s(0)-R_s(T-t)R_s(T)}{R_s^2(0)-R_s^2(T)}$$

$$b=\frac{R_s(0)R_s(T-t)-R_s(T)R_s(t)}{R_s^2(0)-R_s^2(T)}$$

其最小均方误差为

$$\begin{aligned}M.M.S.E&=E\{[s(t)-\hat{s}(t)]^2\}\\&=E\{[s(t)-as(0)-bs(T)]s(t)\}\\&=R_s(0)-aR_s(t)-bR_s(T-t)\end{aligned}$$

① 如果$t=\frac{T}{2}$，则

$$a=b=\frac{R_s\left(\frac{T}{2}\right)}{R_s(0)+R_s(T)}$$

② 若$R_s(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$，$0<t<T$，则

$$a=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\alpha(T-t)}e^{-\alpha T}}{1-e^{-2\alpha T}}=\frac{\sinh\alpha(T-t)}{\sinh(\alpha T)}$$

$$b=\frac{e^{-\alpha(T-t)}-e^{-\alpha T}e^{-\alpha t}}{1-e^{-2\alpha T}}=\frac{\sinh(\alpha t)}{\sinh(\alpha T)}$$

例四　利用 t 时刻随机过程 s(t) 的观测值和它的导数 s′(t) 观测值，对未来的 $s(t+\lambda)$，$\lambda>0$，进行估值。

解　设 $s(t+\lambda)$ 的最佳估值为 $\hat{s}(t+\lambda)$

$$\hat{s}(t+\lambda)=as(t)+bs'(t)$$

利用正交性原理得

$$E\{[s(t+\lambda)-\hat{s}(t+\lambda)]s(t)\}$$

$$=E\{[s(t+\lambda)-as(t)-bs'(t)]s(t)\}=0$$

$$E\{[s(t+\lambda)-\hat{s}(t+\lambda)]s'(t)\}$$

$$=E\{[s(t+\lambda)-as(t)-bs'(t)]s'(t)\}=0$$

根据实随机过程的相关函数是偶函数，当 $\tau=0$ 时 $R_s(\tau)$ 是连续可导的（由于 s′(t) 存在），故 $R_s'(0)=0$，

且　　$R_{ss'}(\tau)=-R_{ss}'(\tau)$

$$R_{s's'}(\tau)=-R_{ss}''(\tau)$$

故　　$R_{ss}(\lambda)=aR_{ss}(0)-bR_{ss'}(0)=aR_{ss}(0)$

$$R_{ss}'(\lambda)=bR_{ss}''(0)$$

$$a=\frac{R_{ss}(\lambda)}{R_{ss}(0)}$$

$$b=\frac{R_{ss}'(\lambda)}{R_{ss}''(0)}$$

最小均方误差为

$$\text{M.M.S.E}=E\{[s(t+\lambda)-\hat{s}(t+\lambda)]^2\}$$

$$=E\{[s(t+\lambda)-as(t)-bs'(t)]s(t+\lambda)\}$$

$$=R_{ss}(0)-aR_{ss}(\lambda)+bR_{ss}'(\lambda)$$

当 λ 足够小时，$a\approx1$，

$$R'_{ss}(\lambda) \approx R'_{ss}(0) + \frac{R''_{ss}(0)}{1!}\lambda = R''_{ss}(0)\lambda$$

即 $$b \approx \lambda$$

故 $$\hat{s}(t+\lambda) \approx s(t) + \lambda s'(t)$$

该结果与求函数增量的一般方法相一致。

例五 已知两个时刻 t_1、t_2，$t_1 > t_2$，用该两个时刻的观测值 $s(t_1)$，$s(t_2)$ 对未来值 $s(t)$ $(t > t_1 > t_2)$ 进行估计，求其最佳估值。若 t_2 的信息并不能改善对 $s(t)$ 的估值，则 $s(t)$ 的相关函数必须为负指数形式的函数，即 $R_s(t) = ce^{-\alpha|t|}$。

解 设 $s(t)$ 的最佳估值为

$$\hat{s}(t) = as(t_1) + bs(t_2)$$

利用正交性原理得

$$\begin{aligned} & E\{[s(t) - \hat{s}(t)]s(t_1)\} \\ = & E\{[s(t) - as(t_1) - bs(t_2)]s(t_1)\} = 0 \\ & E\{[s(t) - \hat{s}(t)]s(t_2)\} \\ = & E\{[s(t) - as(t_1) - bs(t_2)]s(t_2)\} = 0 \end{aligned}$$

即

$$R_s(t-t_1) = aR_s(0) + bR_s(t_1 - t_2)$$

$$R_s(t-t_2) = aR_s(t_1 - t_2) + bR_s(0)$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{R_s(0)R_s(t-t_1) - R_s(t_1-t_2)R_s(t-t_2)}{R_s^2(0) - R_s^2(t_1-t_2)} \\ b = \dfrac{R_s(0)R_s(t-t_2) - R_s(t_1-t_2)R_s(t-t_1)}{R_s^2(0) - R_s^2(t_1-t_2)} \end{cases}$$

若 t_2 的信息并不能改善对 $s(t)$ 的估值，则要求

$$b = 0，于是\ a = \frac{R_s(t-t_1)}{R_s(0)}，而$$

$$R_s(t-t_2) = aR_s(t_1 - t_2) = \frac{R_s(t-t_1)R_s(t_1-t_2)}{R_s(0)}$$

设时间差 $\lambda_1 = t - t_1$，$\lambda_2 = t_1 - t_2$，上式可改写为

$$R_s(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{R_s(\lambda_1)R_s(\lambda_2)}{R_s(0)}$$

$$\frac{R_s(\lambda_1+\lambda_2)}{R_s(0)} = \frac{R_s(\lambda_1)}{R_s(0)} \quad \frac{R_s(\lambda_2)}{R_s(0)}$$

不论 λ_1、λ_2 取何值都能满足上述关系式的唯一连续函数是指数形函数，且 $|R_s(0)| \geqslant |R_s(\tau)|$，故要求 $R_s(\tau)$ 的函数形式是 $R_s(\tau) = ce^{-a|\tau|}$。反之，根据例1可知，若 $R_s(\tau) = R_s(0)e^{-a|\tau|}$，则当 $t_2 < t_1$ 时，若 $E\{[s(t) - as(t_1)]s(t_1)\} = 0$，则 $E\{[s(t) - as(t_1)]s(t_2)\}$ 必为0。但是如果没有 t_1 时刻的观测值，那么 t_2 时刻的观测值对 $s(t)$ 的估值是有帮助的。具有这种特性的随机过程称为广义马尔可夫过程。

例六 有随机过程 $s(t)$，利用区间 $[0,T]$ 两个端点0、T的观测值 $s(0)$、$s(T)$ 对过程在区间 $[0,T]$ 内的积分 $\int_0^T s(t)dt$ 进行估计，求最佳估值。设 $E\{s(t)\} = 0$。

解 由于 $s(t)$ 是一随机过程，则积分 $\int_0^T s(t)dt$ 是一个随机变量，且 $E\left\{\int_0^T s(t)dt\right\} = 0$。现利用两端点观测值 $s(0)$、$s(T)$ 的线性组合对 $\int_0^T s(t)dt$ 进行估值。设

$\int_0^T s(t)dt = \eta$，$\hat{\eta}$ 为 $\int_0^T s(t)dt$ 的估值，

$$\hat{\eta} = as(0) + bs(T)$$

利用正交性原理得

$$E\left\{\left[\int_0^T s(t)dt - \hat{\eta}\right]s(0)\right\}$$
$$= E\left\{\left[\int_0^T s(t)dt - as(0) - bs(T)\right]s(0)\right\} = 0$$

$$E\left\{\left[\int_0^T s(t)dt-\hat{\eta}\right]s(T)\right\}$$
$$=E\left\{\left[\int_0^T s(t)dt-as(0)-bs(T)\right]s(T)\right\}=0$$

即 $$\int_0^T R_s(t)dt=aR_s(0)+bR_s(T)$$
$$\int_0^T R_s(T-t)dt=aR_s(T)+bR_s(0)$$

因 $$\int_0^T R_s(T-t)dt=\int_T^0 R_s(u)(-du)=\int_0^T R_s(t)dt$$

故 $$a=b=\frac{1}{R_s(0)+R_s(T)}\int_0^T R_s(t)dt$$

①若 $T\to0$，则 $\int_0^T R_s(t)dt\to TR_s(0)$，于是

$$a=b\to\frac{T}{2}$$

因此 $$\int_0^{\Delta T} s(t)dt\sim\frac{\Delta T}{2}[s(0)+s(\Delta T)]$$

上式就是熟知的梯形近似公式。

②若 $R_s(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$

则 $$\int_0^T R_s(t)dt=\sigma^2\int_0^T e^{-\alpha t}dt=\frac{\sigma^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})$$

因 $R_s(0)=\sigma^2$，$R_s(T)=\sigma^2 e^{-\alpha T}$

故 $$a=b=\frac{1}{\alpha}\frac{1-e^{-\alpha T}}{1+e^{-\alpha T}}=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{\frac{\alpha T}{2}}-e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{e^{\frac{\alpha T}{2}}+e^{-\frac{\alpha T}{2}}}=\frac{1}{\alpha}\tanh\left(\frac{\alpha T}{2}\right)$$

推广 上面是用两个端点的观测值 $s(0)$、$s(T)$ 对积分 $\int_0^T s(t)dt$ 进行最佳估值。也可用 $n+1$ 个采样点 $(n>1)$ 的观测值对积分 $\int_0^T s(t)dt$ 进行最佳估值。为了简便起见，假定采

样点是等间隔的，于是

$$\hat{\eta}=a_0 s(0)+a_1 s(t_1)+a_2 s(2t_1)+a_3 s(3t_1)+\cdots+a_n s(nt_1)$$

而 $T=nt_1$，$n=\dfrac{T}{t_1}$，此时共有 $n+1$ 个采样点。利用正交性原理得

$$\int_0^T R_s(t-kt_1)dt=a_0 R_s(kt_1)+a_1 R_s[(k-1)t_1]+\cdots+a_k R_s(0)+a_{k+1}R_s(t_1)+\cdots+a_n R_s[(n-k)t_1]$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

于是得到 $n+1$ 个方程式，有 $n+1$ 个未知数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，解此 $n+1$ 个联立方程式可得 a_0，a_1，$\cdots$，a_n。

例七 采用 $f'(t)\approx\dfrac{f(t)-f(t-\lambda)}{\lambda}$ 求给定函数的导数。λ 越小，上式给出的值越接近所求的导数。但正如例二中所指出的，系统中的信号必伴随着噪声，在系统中所测得的观测值是随机过程 $x(t)=s(t)+n(t)$，而不是 $s(t)$（$s(t)$ 代表随机信号，$n(t)$ 代表系统中不可避免的噪声）。即使噪声很“弱”，即 $E\{n^2(t)\}<<E\{s^2(t)\}$，如仍采用 $\dfrac{x(t)-x(t-\lambda)}{\lambda}$ 作为求信号导数的公式，则噪声带给它的影响是不可忽略的，而且 λ 的减小并不能改善对 $s'(t)$ 的估值。在存在噪声的情况下必须进一步研究如何利用观测值 $x(t)$、$x(t-\lambda)$ 对 $s'(t)$ 作最佳估值。现利用正交性原理研究 $s'(t)$ 的最佳估值。

解 设 $s'(t)$ 的最佳估值为

$$\widehat{s'}(t)=ax(t)+bx(t-\lambda)$$

利用正交性原理得

$$E\{[s'(t)-\widehat{s'}(t)]x(t)\}$$
$$=E\{[s'(t)-ax(t)-bx(t-\lambda)]x(t)\}=0$$
$$E\{[s'(t)-\widehat{s'}(t)]x(t-\lambda)\}$$
$$=E\{[s'(t)-ax(t)-bx(t-\lambda)]x(t-\lambda)\}=0$$

如例 2 所假设的，s(t)、n(t) 是相互统计独立的随机过程，且均值都为零，则 $R_{XX}(\tau)=R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)$

$$R_{s'X}(\tau)=E\{s'(t+\tau)x(t)\}$$
$$=E\left\{\left[\frac{s(t+\tau+\varepsilon)-s(t+\tau)}{\varepsilon}\right]\cdot\left[s(t)+n(t)\right]\right\}_{\varepsilon\to 0}$$
$$=E\left\{\left[\frac{s(t+\tau+\varepsilon)-s(t+\tau)}{\varepsilon}\right]s(t)\right\}_{\varepsilon\to 0}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R_{ss}(\tau+\varepsilon)-R_{ss}(\tau)}{\varepsilon}=R'_{ss}(\tau)$$

故

$$R'_{ss}(0)=aR_{XX}(0)+bR_{ss}(\lambda)$$
$$R'_{ss}(\lambda)=aR_{XX}(\lambda)+bR_{XX}(0)$$
$$a=\frac{R'_{ss}(0)R_{XX}(0)-R'_{ss}(\lambda)R_{XX}(\lambda)}{R^2_{XX}(0)-R^2_{XX}(\lambda)}$$
$$b=\frac{R'_{ss}(\lambda)R_{XX}(0)-R'_{ss}(0)R_{XX}(\lambda)}{R^2_{XX}(0)-R^2_{XX}(\lambda)}$$

由于 s(t) 和 n(t) 均为实平稳随机过程，故 $R_{ss}(\tau)$、$R_{nn}(\tau)$、$R_{XX}(\tau)$ 均为偶函数。若 s(t)、n(t) 均可导，则要求 $R'_{ss}(0)=0$，$R'_{nn}(0)=0$，$R'_{XX}(0)=0$。当 λ 足够小时，

$$R'_{ss}(0)R_{XX}(0)-R'_{ss}(\lambda)R_{XX}(\lambda)$$

$$= -R'_{ss}(\lambda)R_{xx}(\lambda)$$

$$= -[R'_{ss}(0) + R''_{ss}(0)\lambda + \cdots][R_{xx}(0) + \cdots]$$

$$\approx -R''_{ss}(0)R_{xx}(0)\lambda \quad R_{xx}(\lambda)$$

$$= R_{xx}(0) + \frac{R'_{xx}(0)}{1\,!}\lambda + \frac{R''_{xx}(0)}{2\,!}\lambda^2 + \cdots$$

$$= R_{xx}(0) + \frac{R''_{xx}(0)}{2}\lambda^2 + \cdots$$

$$[R_{xx}(0)]^2 - [R_{xx}(\lambda)]^2 \approx -R''_{xx}(0)R_{xx}(0)\lambda^2$$

于是 $a \approx \dfrac{R''_{ss}(0)}{R''_{xx}(0)}\;\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{R''_{ss}(0)}{R''_{ss}(0) + R''_{nn}(0)}\;\dfrac{1}{\lambda}$

同理，$R'_{ss}(\lambda)R_{xx}(0) - R'_{ss}(0)R_{xx}(\lambda)$

$$= R'_{ss}(\lambda)R_{xx}(0)$$

$$= [R'_{ss}(0) + R''_{ss}(0)\lambda + \cdots]R_{xx}(0)$$

$$\approx R''_{ss}(0)R_{xx}(0)\lambda$$

$$b \approx -\frac{R''_{ss}(0)}{R''_{xx}(0)}\frac{1}{\lambda} = -\frac{R''_{ss}(0)}{R''_{ss}(0) + R''_{nn}(0)}\frac{1}{\lambda}$$

$$\widehat{s'}(t) \approx \frac{R''_{ss}(0)}{R''_{ss}(0) + R''_{nn}(0)}\frac{x(t) - x(t-\lambda)}{\lambda}$$

最小均方误差为

$$M.M.S.E = E\{[s'(t) - \widehat{s'(t)}]^2\}$$

$$= E\{[s'(t) - ax(t) - bx(t-\lambda)]s'(t)\}$$

$$= R_{s's'}(0) - aR'_{ss}(0) - bR'_{ss}(\lambda)$$

$$= -R''_{ss}(0) - bR'_{ss}(\lambda)$$

只有当 $E\{(n'(t))^2\} = [-R''_{nn}(0)] \ll E\{(s'(t))^2\} = [-R''_{ss}(0)]$时，$R''_{xx}(0) \approx R''_{ss}(0)$，$a = (-b) \approx \dfrac{1}{\lambda}$，在这个条件下，才有可能采用

$$\widehat{s'(t)} \approx \frac{x(t)-x(t-\lambda)}{\lambda}$$

对$s'(t)$进行估值。

§5 连续随机信号的线性均方估值

系统中的信号总是伴随着噪声，因此在系统中观测到的过程是信号和噪声之和

$$\eta(t)=s(t)+n(t) \qquad (1)$$

其中 $s(t)$ 代表信号，在以下讨论中 $s(t)$ 既可以代表过程又可以代表它的样本函数，$n(t)$ 代表噪声。$s(t)$ 和 $n(t)$ 都是连续参数的过程，并假定 $s(t)$ 和 $n(t)$ 均是实宽平稳过程。

维纳-柯莫哥洛夫首先研究了从信号和噪声的混合体 $\eta(t)$ 中分离出信号的方法，亦即从观测到的 $\eta(t)$ 对 $s(t+\alpha)$ 进行最佳估值。设其最佳估值为$\hat{s}(t+\alpha)$。所谓“最佳”是指误差$e(t+\alpha)=s(t+\alpha)-\hat{s}(t+\alpha)$的均方值最小，即

$$E\{[e(t+\alpha)]^2\}=E\{[s(t+\alpha)-\hat{s}(t+\alpha)]^2\} \text{ 为最小。}$$

根据 α 的范围，可分为三种问题：

1. 若 $\alpha>0$，则 $\hat{s}(t+\alpha)$ 称为 $s(t+\alpha)$ 的最佳予测；
2. 若 $\alpha=0$，则 $\hat{s}(t)$ 称为 $s(t)$ 的最佳过滤；
3. 若 $\alpha<0$，则 $\hat{s}(t+\alpha)$ 称为 $s(t+\alpha)$ 的最佳平滑。

维纳-柯莫哥洛夫的理论实际上是一时域内的分析。为了处理方便，假设 $s(t)$、$n(t)$ 的均值均为零，$s(t)$、$n(t)$ 是不相关的，即$E\{s(t)n(t)\}=0$。

在 $\eta(t)$ 中提取有用信号，实际上就是对 $\eta(t)$ 进行处理，相当于把 $\eta(t)$ 送入一个线性时不变系统，使其输出是所要求的最佳线性估值。见图 7-2，若输出 $y(t)$ 是所要求的最佳线

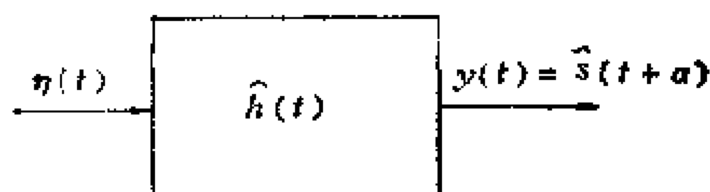


图 7-2

性估值，则称这样一个线性时不变系统为最佳滤波器，它的冲激响应为最佳滤波器的冲激响应，并用 $\hat{h}(t)$ 表示之，此时

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)\eta(t-\tau)d\tau \qquad (2)$$

而 $E\{[s(t+\alpha)-y(t)]^2\}=E\{[s(t+\alpha)]^2\}$

$$+E\{[y(t)]^2-2E\{s(t+\alpha)y(t)\}$$

因此本问题就是选择 $\hat{h}(t)$ 使上式达到最小。现化简上式中的各项：

$$E\{[s(t+\alpha)]^2\}=R_{ss}(0)$$

式中 $R_{ss}(\tau)$ 代表信号的相关函数，

$$E\{[y(t)]^2\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\eta(t-u)du\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(v)\eta(t-v)dv\right\}$$

$$=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)\eta(t-u)\eta(t-v)dudv\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)R_{\eta\eta}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)[R_{ss}(u-v)$$

$$+R_{nn}(u-v)]dudv$$

式中 $R_{nn}(\tau)$ 代表噪声的相关函数，

$$E\{s(t+\alpha)y(t)\}=E\left\{s(t+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\eta(t-u)du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)R_{ss}(\alpha+u)du$$

因此 $E\{[s(t+\alpha)-y(t)]^2\}$

$$= R_{ss}(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)R_{ss}(\alpha+u)du$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)[R_{ss}(u-v)$$

$$+ R_{nn}(u-v)]dudv \tag{3}$$

现在的问题是选择$\hat{h}(t)$，使(3)式为极小。维纳是用变分法处理这一个问题的。这里用正交性原理来处理。

由于在(3)式中出现的是 $R_{ss}(\tau)$、$R_{nn}(\tau)$，因此最佳估值仅和$s(t)$、$n(t)$的相关函数有关，$\hat{h}(t)$也仅和 $R_{ss}(\cdot)$、$R_{nn}(\cdot)$ 有关，而不直接决定于 $s(t)$ 和 $n(t)$。因此，当信号具有同一相关函数时，他们所给出的最佳滤波器是相同的。

下面用正交性原理选择合适的$y(t)$，使均方误差 $E\{[s(t+\alpha)-y(t)]^2\}$为极小。因为

$$y(t) = \int_{-0}^{\infty}h(\tau)\eta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\eta(\tau)d\tau \tag{4}$$

所以 $y(t)$ 是 $\eta(t)$ 的线性组合。如果构成系统的网络是可实现的，则当 $t<0$ 时要求 $h(t)=0$，此时(4)式应写成

$$y(t) = \int_{-0}^{\infty}h(\tau)\eta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)\eta(\tau)d\tau \tag{5}$$

所以 $y(t)$ 应该是 $(-\infty,t)$ 范围内 $\eta(\cdot)$ 的线性组合，而且这个线性组合是由积分形式的卷积所构成。这一点是§3、§4所讨论的几个观测值的线性组合的推广。根据正交性原理，要求 $E\{[s(t+\alpha)-y(t)]^2\}$ 极小，则可得

$$E\{[s(t+\alpha)-y(t)]\eta(\theta)\} = 0 \qquad (-\infty<\theta<t)$$

即
$$R_{s\eta}(t+\alpha-\theta) = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)\eta(t-\tau)\eta(\theta)d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(t-\tau-\theta)d\tau$$

$$(-\infty<\theta<t) \tag{6}$$

设 $t-\theta=u$，则

$$R_{s\eta}(u+\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau \quad (u\geqslant 0) \tag{7}$$

(7)式是一积分方程，解此方程可得$\hat{h}(t)$。在(7)式中$\hat{h}(t)$是一可实现网络的冲激响应，因此在(7)式中要求 $u>0$。由于有了这个条件，使在求解(7)式时，增添了不少麻烦。下面的讨论先不考虑网络的可实现性，于是(5)式改写为

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\eta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\eta(\tau)d\tau$ $\eta(\theta)$的观测范围为$(-\infty,\ \infty)$，即认为(6)式中θ在$(-\infty,\ \infty)$都是正确的，也就是说(7)式中 u 在$(-\infty,\ \infty)$都是正确的，即

$$R_{s\eta}(u+\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau$$

$$(-\infty<u<\infty) \tag{8}$$

(7)和(8)式统称为维纳-霍夫方程式。对(8)式两边取傅氏变换，因

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_{s\eta}(u+\alpha)e^{-j\omega u}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{s\eta}(v)e^{-j\omega(v-\alpha)}dv=e^{j\omega\alpha}S_{s\eta}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega u}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(u-\tau)e^{-j\omega u}\hat{h}(\tau)dud\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\lambda)e^{-j\omega(\lambda+\tau)}\hat{h}(\tau)d\lambda d\tau=S_{\eta\eta}(\omega)\ \widehat{H}(j\omega)$$

因此
$$\widehat{H}(j\omega)=\frac{S_{s\eta}(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_{\eta\eta}(\omega)} \tag{9}$$

根据 s(t) 和 n(t) 是不相关的，且s(t)、n(t) 的均值为零，故

$$R_{s\eta}(\tau)=E\{s(t+\tau)\eta(t)\}=E\{s(t+\tau)[s(t)+n(t)]\}$$
$$=E\{s(t+\tau)s(t)\}=R_{ss}(\tau)$$

(9)式可改写为 $$\hat{H}(j\omega)=\frac{S_{ss}(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_{\eta\eta}(\omega)} \tag{10}$$

而 $$S_{\eta\eta}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega) \tag{11}$$

(10)式取反变换，得

$$\hat{h}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{ss}(\omega)e^{j\omega(t+\alpha)}}{S_{\eta\eta}(\omega)}d\omega \tag{12}$$

最佳估值时的最小均方误差为

$$M.M.S.E=E\{[s(t+\alpha)-y(t)]^2\}$$
$$=R_{ss}(0)-2\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)R_{s\eta}(\alpha+u)du$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)R_{\eta\eta}(u-v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{ss}(\omega)d\omega$$
$$-\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\int_{-\infty}^{\infty}S_{ss}(\omega)e^{j\omega(u+\alpha)}d\omega du$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\hat{h}(v)\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)e^{j\omega(u-v)}d\omega dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{ss}(\omega)d\omega-\frac{1}{2\pi}2\int_{-\infty}^{\infty}S_{ss}(\omega)$$
$$\cdot e^{j\omega\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)e^{j\omega u}dud\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)e^{j\omega u}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(v)$$

$$\cdot e^{-j\omega\tau} dv du d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - 2\hat{H}(j\omega)e^{j\omega\tau}]S_{ss}(\omega)d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{H}(j\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[1 - \frac{2S_{ss}(\omega)}{S_{\eta\eta}(\omega)}\right]S_{ss}(\omega)\right.$$

$$\left. + \left[\frac{S_{ss}(\omega)}{S_{\eta\eta}(\omega)}\right]^2 S_{\eta\eta}(\omega)\right\}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_{ss}(\omega) - \frac{[S_{ss}(\omega)]^2}{S_{\eta\eta}(\omega)}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{ss}(\omega)S_{nn}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}d\omega \qquad (13)$$

从上述分析中可以看到，如果 $s(t)$ 和 $n(t)$ 的功率谱密度互相不交叠，即 $S_{ss}(\omega)S_{nn}(\omega) = 0$，如图 7-3 所示，在这种情况下选

$|\hat{H}(j\omega)| = 1$ （ω处于 $S_{ss}(\omega) \neq 0$ 的频率范围内）

$|H(j\omega)| = 0$ （ω处于$S_{ss}(\omega) = 0$，且$S_{ss}(\omega) \neq 0$的频率范围内）

图 7-3 说明，如果功率谱密度 $S_{ss}(\omega)$、$S_{nn}(\omega)$互相不交叠，而网络是一带通滤波器，只允许信号通过而把所有噪声谱都滤去，则它的输出可以没有误差，达到理想的过滤。

例一 如果 $\eta(t) = s(t) + n(t)$，$s(t)$、$n(t)$ 为零均值实互不相关的平稳随机过程，

且 $\quad S_{ss}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \qquad S_{nn}(\omega) = 1$

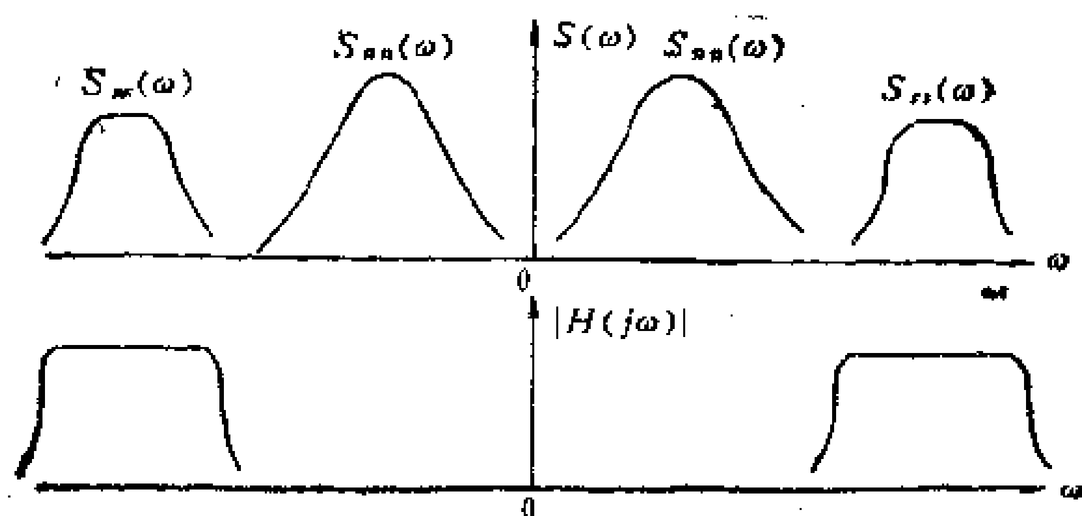


图 7-3

若不考虑网络的可实现性，求最佳滤波的方法。

解 最佳滤波是指对 S(t) 的最佳估值，即求$\hat{s}(t)$，这时 $\alpha=0$，故

$$S_{\eta\eta}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}+1=\frac{2+\omega^2}{1+\omega^2}$$

$$\hat{H}(j\omega)=\frac{S_{ss}(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_{\eta\eta}(\omega)}=\frac{1}{2+\omega^2}e^{j\omega\alpha}$$

$$\hat{h}(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|}$$

由于 $t<0$时，$\hat{h}(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}\neq 0$，该网络不满足网络的因果性，因此是不能实现的。

例二 若 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，$s(t)$和$n(t)$ 为零均值互不相关的实平稳随机过程，且 $R_{ss}(\tau)=Ae^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau$，$\beta\ll\omega_0$，$n(t)$ 为白噪声，即 $S_{nn}(\omega)=N_0$。若不考虑网络的可实现性，求最佳过滤的方法。

解　由于目的是最佳过滤，故 $\alpha=0$，

$$S_{ss}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ss}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\beta|\tau|}e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\beta|\tau|}e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{S(\omega+\omega_0)+S(\omega-\omega_0)\}$$

上式中　$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\beta|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{2\beta A}{\omega^2+\beta^2}$

由于 $\beta\ll\omega_0$，故当$\omega>0$时

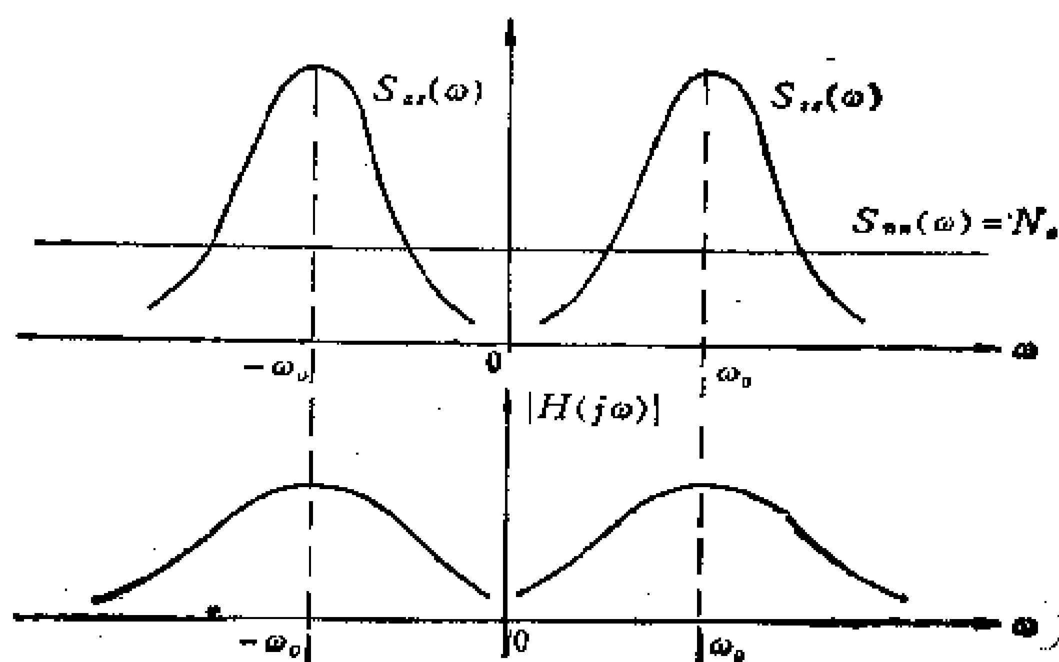


图　7-4

$$S_{ss}(\omega)=\frac{\beta A}{(\omega-\omega_0)^2+\beta^2}$$

$$\widehat{H}(j\omega)=\frac{\beta A}{\beta A+N_0[(\omega-\omega_0)^2+\beta^2]}$$

最佳估值时的最小均方误差为

$$\begin{aligned}
M.M.S.E&=E\{[s(t)-y(t)]^2\}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\frac{S_{ss}(\omega)S_{nn}(\omega)}{S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)}d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta AN_0}{\beta A+N_0[(\omega-\omega_0)^2+\beta^2]}d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\frac{\beta AN_0}{\beta A+N_0\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\dfrac{N_0(\omega-\omega_0)^2}{\beta A+N_0\beta^2}}d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\frac{\beta AN_0}{\beta A+N_0\beta^2}\sqrt{\frac{\beta A+N_0\beta^2}{N_0}}\pi=\frac{A}{\sqrt{1+\dfrac{A}{N_0\beta}}}
\end{aligned}$$

若不利用观测值 $\eta(t)$ 的数据，则 $s(t)$ 的估值为零，这时的均方误差为

$$E\{[s(t)-0]^2\}=R_{ss}(0)=A$$

若$N_0\gg\dfrac{A}{\beta}$，则最佳估值时的最小均方误差为$M.M.S.E\approx A$，

这种最佳滤波方法并不能改善它的估值。但如果$\dfrac{A}{\beta}=3N_0$，

则 $M.M.S.E=\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}R_{ss}(0)$。

§6 可实现的最佳系统
(具有因果性的最佳系统)

§5中已讨论了如果不考虑网络的可实现性，可以采用傅氏变换方法求解维纳-霍夫方程式。但是在实际问题中必须考虑网络的可实现性，这就必需求解§5中的方程式(7)，即该方

$$R_{s\eta}(u+\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}\hat{h}(t)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau$$

$$(0\leqslant u<\infty) \tag{7}$$

程式仅在 $0\leqslant u<\infty$ 时才有效，在 $u<0$ 时该式是否正确我们并不知道。这里定义一个函数

$$\phi(u)=R_{s\eta}(u+\alpha)-\int_{0}^{\infty}\hat{h}(\tau)R_{\eta\eta}(u-\tau)d\tau \tag{14}$$

则当 $u\geqslant0$时，$\phi(u)=0$，而当 $u<0$时，并没有给出 $\phi(u)$为何。若 $\phi(u)$ 的付氏变换存在，对(14)式两边取傅氏变换，得

$$\Phi(j\omega)=S_{s\eta}(\omega)e^{j\omega\alpha}-S_{\eta\eta}(\omega)\ \hat{H}(j\omega) \tag{15}$$

$$\Phi(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u)e^{-j\omega u}du$$

$$S_{s\eta}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{s\eta}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$S_{\eta\eta}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda$$

$$\hat{H}(j\omega)=\int_{0}^{\infty}\hat{h}(t)e^{-j\omega t}dt$$

用 p 置换(15)式中的 $j\omega$，可得 $\phi(u)$ 的双边拉氏变换

$$\Phi(p) = S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{pa} - S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)\widehat{H}(p) \tag{16}$$

由于 $u \geqslant 0$ 时 $\phi(u) = 0$，故

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{0} \phi(u)e^{-pu}du$$

$\Phi(p)$ 在左半平面内无极点，故 $\phi(p)$ 在左半平面内为解析函数。

现在假定 $R_{\eta\eta}(\tau)$ 是有限项指数函数之和，则 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 是 ω^2 的有理函数。在这个假设之下，维纳-霍夫方程式就可以比较容易地求解。然而，在许多实际问题中，往往可以用有限项指数性函数之和去逼近 $\eta(t)$ 的相关函数，即 $R_{\eta\eta}(\tau)$ 往往可表示为 $\Sigma A_i e^{-\alpha_i|\tau|}$ 的形式，因此这一假设的限制性并不十分苛刻。在这个假设下，$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$ 就是 p^2 的函数（即 p 的偶函数），而且可表示成如下形式

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{A(p^2)}{B(p^2)} \tag{17}$$

(17)式中 $A(p^2)$、$B(p^2)$ 均为 p^2 的多项式，且其系数均为实数。多项式 $A(p^2)$ 的最高幂小于或等于多项式 $B(p^2)$ 的最高幂。因此可把(17)式中 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$ 分解成如下形式

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = S^{+}_{\eta\eta}(p)S^{-}_{\eta\eta}(p) \tag{18}$$

(18)式中 $S^{+}_{\eta\eta}(p)$ 的零点和极点均位于左半平面内，即 $S^{+}_{\eta\eta}(p)$ 在右半平面内为解析函数。$S^{-}_{\eta\eta}(p)$ 的零点和极点均位于右半平面内，即 $S^{-}_{\eta\eta}(p)$ 在左半平面内为解析函数。

(16)式可改写为

$$\Phi(p)=S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}-S^{+}_{\eta\eta}(p)S^{-}_{\eta\eta}(p)\widehat{H}(p)$$

$$\frac{\Phi(p)}{S^{-}_{\eta\eta}(p)}=\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S^{-}_{\eta\eta}(p)}-S^{+}_{\eta\eta}(p)\widehat{H}(p) \tag{19}$$

(19)式中$\dfrac{\Phi(p)}{S^{-}_{\eta\eta}(p)}$在左半平面内是解析函数。

因$\hat{h}(t)$是可实现网络的冲激响应，故$\widehat{H}(p)$在右半平面内是解析函数，因此$S^{+}_{\eta\eta}(p)\widehat{H}(p)$在右半平面内是解析函数。设

$$G(p)=\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S^{-}_{\eta\eta}(p)} \tag{20}$$

根据(19)式，为了保证(19)式左边$\dfrac{\phi(p)}{S^{-}_{\eta\eta}(p)}$在左半平面内为解析函数，要求$G(p)$在左半平面内的极点就是$\widehat{H}(p)S^{+}_{\eta\eta}(p)$在左半平面内的极点，而且它们在极点的留数应该一致。

对$G(p)$按分项分式分解，使$G(p)=G_1(p)+G_2(p)$，$G_1(p)$的极点均在左半平面内，$G_2(p)$的极点均位于右半平面内。因此

$$G_1(p)=\widehat{H}(p)S^{+}_{\eta\eta}(p)$$

即
$$\widehat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S^{+}_{\eta\eta}(p)} \tag{21}$$

(21)式给出了维纳-霍夫方程式(7)式的解。该解满足网络因果性的条件，因此用这种方法得到的解是一个可实现网

络的冲激响应。这种方法是由山农和波特(Shannon和Bode)两人提出的。

例 3 若 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，$s(t)$、$n(t)$ 为零均值互不相关的实平稳随机过程，且 $R_{ss}(\tau)=\frac{3}{2}e^{-|\tau|}$，$R_{nn}(\tau)=\delta(t)$，利用 $(-\infty,t)$ 范围内 $\eta(t)$ 的观测值求 $s(t)$ 的最佳估值 $\hat{s}(t)$。

解 本题的要求是从 $(-\infty,t)$ 范围内 $\eta(t)$ 的观测值中获得 $s(t)$ 的最佳估值，因此 $\alpha=0$，根据(16)式得

$$\Phi(p)=S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)-S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)\hat{H}(p)$$

因 $$R_{ss}(\tau)=\frac{3}{2}e^{-|\tau|}$$

则 $$S_{ss}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ss}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{3}{1+\omega^2}$$

因 $$R_{nn}(\tau)=\delta(\tau)$$

则 $$S_{nn}(\omega)=1$$

所以 $$S_{\eta\eta}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)=\frac{3}{1+\omega^2}+1=\frac{4+\omega^2}{1+\omega^2}$$

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=\frac{p^2-4}{p^2-1}=\frac{(p+2)(p-2)}{(p+1)(p-1)}$$

分解 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$，使 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=S^+_{\eta\eta}(p)S^-_{\eta\eta}(p)$，

其中 $S^+_{\eta\eta}(p)=\frac{p+2}{p+1}$，其零点、极点均位于左半平面内，

$S^-_{\eta\eta}(p)=\frac{p-2}{p-1}$，其零点、极点均位于右半平面内。

$$R_{s\eta}(\tau)=E\{s(t+\tau)\eta(t)\}$$

$$=E\{s(t+\tau)[s(t)+n(t)]\}=R_{ss}(\tau)$$

$$S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=S_{ss}=\left(\frac{p}{j}\right)\frac{-3}{p^2-1}$$

$$\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}=\frac{-\dfrac{3}{p^2-1}}{\dfrac{p-2}{p-1}}=\frac{-3}{(p-2)(p+1)}$$

因此 $\dfrac{S_{s\eta}\left(\dfrac{p}{j}\right)}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}$ 有一个极点位于左半平面内，一个极点位于右半平面内。设

$$G(p)=\frac{S_{s\eta}(p/j)}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}=-\frac{3}{(p-2)(p+1)}$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-2}=G_1(p)+G_2(p)$$

又设 $G_1(p)=\dfrac{1}{p+1}$，则 $G_1(p)$ 的极点为 -1，它位于左半平面内，其留数为 1。$\hat{H}(p)S_{\eta\eta}^{+}(p)$ 的极点应和 $G_1(p)$ 的极点一致，而且 $\hat{H}(p)S_{\eta\eta}^{+}(p)$ 在该极点的留数就是 $G_1(p)$ 在该极点的留数，故

$$\hat{H}(p)S_{\eta\eta}^{+}(p)=G_1(p)=\frac{1}{p+1}$$

$$\hat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S_{\eta\eta}^{+}(p)}=\frac{\dfrac{1}{p+1}}{\dfrac{p+2}{p+1}}=\frac{1}{p+2}$$

所以 $$\hat{h}(t)=\begin{cases}e^{-2t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

根据$\widehat{H}(p)$可绘出其相应的网络原理图，见图7-5，图中C = 1。

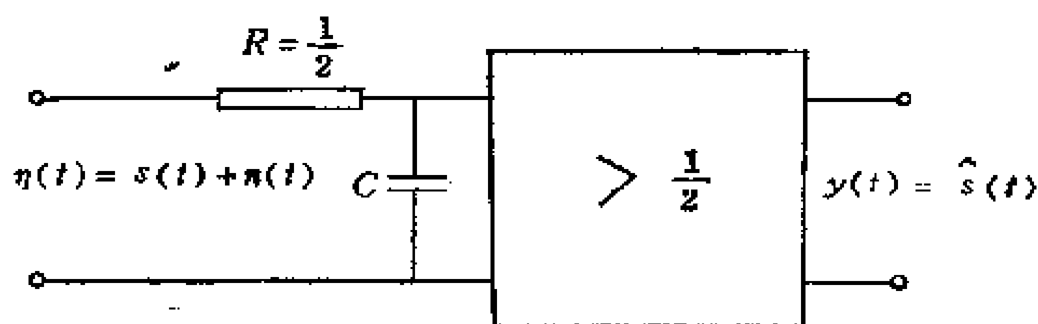


图 7-5

例二 如把例一中的过滤问题改为最佳预测问题，即利用 $(-\infty,t)$ 内 $\eta(t)$ 的观测值对 $s(t+t_0)$ 进行最佳预测，求实现最佳预测的方法。

解 本例中 $\alpha=t_0$，而 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$、$S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$均由例一给出。根据(19)式

$$\frac{\Phi(p)}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}=\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}-\widehat{H}(p)S_{\eta\eta}^{+}(p)$$

$$\text{而}\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}=G(p)=\frac{\frac{-3}{p^2-1}e^{pt_0}}{\frac{p-2}{p-1}}$$

$$=\frac{-3}{(p+1)(p-2)}e^{pt_0}$$

G(p)在左半平面内的极点为 -1，G(p) 在 $p=-1$ 处的留数为 $\lim\limits_{p\to-1}(p+1)G(p)=e^{-t_0}$

故 $$G_1(p)=\frac{e^{-t_0}}{p+1}$$

根据(21)式得

$$\hat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S^+_{\eta\eta}(p)}=\frac{\frac{e^{-t_0}}{p+1}}{\frac{p+2}{p+1}}=\frac{e^{-t_0}}{p+2}$$

上式给出了预测系统的原理图，见图 7-6。

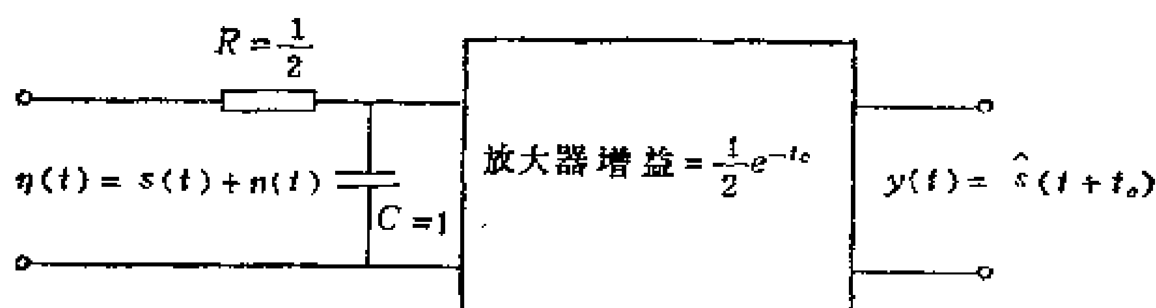


图 7-6

如果要改变预测时间 t_0，只要相应地调整放大器的增益，就可以获得 $s(t+t_0)$的最佳估值。

例三 纯预测问题

设有零均值实平稳随机过程 s(t)，它的相关函数为

$$R_{ss}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

利用 $(-\infty、t)$内对s(·)的观测值求对 $s(t+t_0)$的最佳估值$\hat{s}(t+t_0)$。

解 由于本例为纯预测问题，无噪声存在。

$$S_{ss}(\omega)=S_{\eta\eta}(\omega)=S_{s\eta}(\omega)=\frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2+\beta^2}$$

$$S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=\frac{2\beta\sigma^2}{\beta^2-p^2}=\frac{\sqrt{2\beta}\sigma}{\beta+p}\ \frac{\sqrt{2\beta}\sigma}{\beta-p}=S^+_{\eta\eta}(p)S^-_{\eta\eta}(p)$$

设 $S^+_{\eta\eta}(p)=\dfrac{\sqrt{2\beta}\sigma}{p+\beta}$，$S^-_{\eta\eta}(p)=\dfrac{\sqrt{2\beta}\sigma}{\beta-p}$

$$G(p)=\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{pt_0}}{S^-_{\eta\eta}(p)}=\frac{\sqrt{2\beta}\sigma}{p+\beta}e^{pt_0}$$
$$=G_1(p)+G_2(p)$$

$G(p)$ 在左半平面内的极点为 $-\beta$，在极点上的留数为

$$\lim_{p\to-\beta}(p+\beta)G_1(p)=\lim_{p\to-\beta}(p+\beta)G(p)=\sqrt{2\beta}\sigma e^{-\beta t_0}$$

$$\widehat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S^+_{\eta\eta}(p)}=\frac{\sqrt{2\beta}\sigma e^{-\beta t_0}}{p+\beta}\Big/\frac{\sqrt{2\beta}\sigma}{p+\beta}=e^{-\beta t_0}$$

$$\hat{h}(t)=e^{-\beta t_0}\delta(t)$$

$$\hat{s}(t+t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)\eta(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^{\infty}\hat{h}(\tau)s(t-\tau)d\tau$$
$$=e^{-\beta t_0}s(t)$$

图 7-7 给出了最佳预测网络。

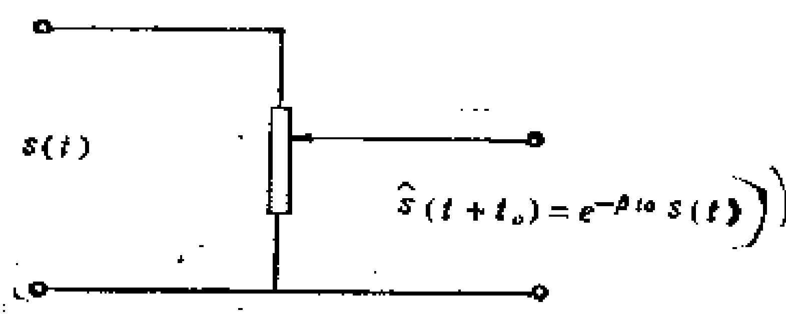


图 7-7

其预测误差为

$$
\begin{aligned}
M.M.S.E &= E\{[s(t+t_0)-\hat{s}(t+t_0)]^2\} \\
&= E\{[s(t+t_0)-\hat{s}(t+t_0)]s(t+t_0)\} \\
&= R_{ss}(0)-e^{-\beta t_0}R_{ss}(t_0)=\sigma^2(1-e^{-2\beta t_0})
\end{aligned}
$$

本例实质上就是§4中的例一，这里是用另一种方法获得了相同的结果。

例四　纯预测问题

设有零均值实平稳随机过程 $s(t)$，其功率谱密度函数为

$$S_{ss}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^4}$$

利用 $(-\infty,t)$ 内 $s(t)$ 的观测值求 $s(t+t_0)$ 的最佳预测值 $\hat{s}(t+t_0)$。

解　该过程的相关函数为

$$R_{ss}(\tau)=\frac{e^{-\frac{|\tau|}{\sqrt{2}}}}{2}\cos\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

由于本例为纯预测问题，故

$$S_{\eta\eta}(\omega)=S_{s\eta}(\omega)=S_{ss}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^4}$$

$$
\begin{aligned}
S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)&=\frac{1}{1+p^4} \\
&=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}\,p+1}\ \frac{1}{p^2-\sqrt{2}\,p+1} \\
&=S^+_{\eta\eta}(p)S^-_{\eta\eta}(p)
\end{aligned}
$$

设　$$S^+_{\eta\eta}(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}\,p+1}$$

$S^+_{\eta\eta}(p)$ 的极点位于 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$，即均在左半平面内，

$S^{+}_{扰扰}(p)$ 在右半平面内是解析函数。设

$$S^{-}_{扰扰}(p)=\frac{1}{p^2-\sqrt{2}\,p+1}$$

$S^{-}_{扰扰}(p)$ 的极点位于$\frac{1}{\sqrt{2}}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$，即均在右半平面内，$S^{-}_{扰扰}(p)$ 在左半平面内是解析函数。

$$G(p)=\frac{S_{sn}\left(\frac{p}{j}\right)e^{pt_0}}{S^{-}_{扰扰}(p)}=\frac{e^{pt_0}}{p^2+\sqrt{2}\,p+1}$$

$G(p)$ 在右半平面内是解析函数，$G(p)$ 在极点$p_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$上的留数为

$$\lim_{p\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(p+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{e^{pt_0}}{p^2+\sqrt{2}\,p+1}$$

$$=\frac{e^{\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]t_0}}{j2\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$G(p)$在$p_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}$上的留数为

$$\lim_{p\to-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(p+\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{e^{pt_0}}{p^2+\sqrt{2}\,p+1}$$

$$=\frac{e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)t_0}}{-j\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

$$G_1(p)=\frac{e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)t_0}}{j\frac{2}{\sqrt{2}}}\ \frac{1}{p+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$+\frac{e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)t_0}}{-j\frac{2}{\sqrt{2}}}\ \frac{1}{p+\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}\left(\frac{\left(p+\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{j\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}}{p^2+\sqrt{2}p+1}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(p+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-j\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}}{p^2+\sqrt{2}p+1}\right)$$

$$=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}$$

$$\cdot\left(\frac{\left(p+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}{p+\sqrt{2}p+1}\right)$$

$$\hat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S^{+}_{nn}(p)}=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}\,p\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t_0$$

$$+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t_0+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t_0\right)$$

$$=Kp+L$$

其中 $K=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t_0$

$$L=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t_0+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t_0\right)$$

所以 $\hat{h}(t)=K\delta'(t)+L\delta(t)$

即最佳预测网络的冲激响应 $\hat{h}(t)$ 由两个奇异函数组成，它说明了 $s(t+t_0)$ 的最佳估值仅利用了 t 时刻的 $s(t)$ 值和 t 时刻 $s(t)$ 的导数 $s'(t)$ 值，即

$$\hat{s}(t+t_0)=Ks'(t)+Ls(t)$$

§7　离散形式的维纳滤波

§5、§6中讨论了连续随机信号的维纳滤波。若输入过程是离散参数的随机过程，则对§5、§6两节中所采用的研究方法作适当的变化后，可推广为离散形式的维纳滤波。

$s[n]$ 和 $\nu[n]$ 是零均值离散参数的实平稳过程，而且

$$\eta[n]=s[n]+\nu[n] \qquad (1)$$

式中 $s[n]$ 代表随机信号，$\nu[n]$ 代表噪声，现在的问题是用 $\eta[m]$ 的观测值的线性组合对 $s[n]$ 进行估值，

$$\hat{s}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta[n-k]h[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\eta[m]h[n-m] \qquad (2)$$

问题可归纳为选择 $h[k]$ 使均方误差 $E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\}$ 为最小。

根据正交性原理，均方误差最小的条件为

$$E\left\{\left(s[n]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta[n-k]\hat{h}[k]\right)\eta[n-m]\right\}=0$$

$$(-\infty<m<\infty) \qquad (3)$$

或

$$R_{s\eta}[m]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[m-k]\hat{h}[k]$$

$$(-\infty<m<\infty) \qquad (4)$$

（3）、（4）式中没有考虑网络的可实现性。（4）式代表一线性方程组，解之可得 $\hat{h}[k]$。

对（4）式两边取 Z 变换（$Z=e^{j\omega T}$）

$$S_{s\eta}(Z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{s\eta}[m]Z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{s\eta}[m]e^{-jm\omega T}$$

$$S_{\eta\eta}(Z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[k]Z^{-k}$$

$$\hat{H}(Z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{h}[k]Z^{-k}$$

于是
$$S_{s\eta}(Z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{s\eta}[m]Z^{-m}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[m-k]\hat{h}[k]\right\}Z^{-m}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[m-k]Z^{-(m-k)}\hat{h}[k]Z^{-k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[n]Z^{-n}\hat{h}[k]Z^{-k}$$

$$=\hat{H}(Z)S_{\eta\eta}(Z)$$

所求最佳系统的系统转移函数为

$$\hat{H}(Z)=\frac{S_{s\eta}(Z)}{S_{\eta\eta}(Z)} \tag{5}$$

最佳估值时的最小均方误差为

$$M.M.S.E=E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\}$$
$$=E\{(s[n]-\hat{s}[n])s[n]\}$$

$$= R_{ss}[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{sx}[k]\hat{h}[k] \tag{6}$$

如果 s[n] 和 ν[n] 是互不相关的，则

$$R_{sx}[k] = E\{s[n+k](s[n]+\nu[n])\} = R_{ss}[k]$$

$$R_{xx}[k] = E\{(s[n+k)+\nu[n+k])(s[n]+\nu[k])\}$$

$$= R_{ss}[k] + R_{\nu\nu}[k]$$

于是 $S_{sx}(Z) = S_{ss}(Z)$

$$S_{xx}(Z) = S_{ss}(Z) + S_{\nu\nu}(Z)$$

$$\hat{H}(Z) = \frac{S_{ss}(Z)}{S_{ss}(Z) + S_{\nu\nu}(Z)} \tag{7}$$

例一 如 s[n] 为二阶矩过程，它的相关函数为 $R_{ss}[m] = a^{|m|}$，其中 $0<a<1$，ν[n] 是白噪声，即 $R_{\nu\nu}[m] = N\delta[m]$，$x[n] = s[n] + \nu[n]$。现从 x[m] 的观测值中对 s[n] 进行最佳估值。若不考虑系统的可实现性，求s[n]。

解 $S_{\nu\nu}(Z) = N$

$$S_{ss}(Z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} a^{-m}Z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} a^{m}Z^{-m}$$

$$= \frac{a - a^{-1}}{(Z+Z^{-1}) - (a+a^{-1})}$$

$$\hat{H}(Z) = \frac{S_{ss}(Z)}{S_{ss}(Z) + S_{\nu\nu}(Z)}$$

$$= \frac{a - a^{-1}}{N(Z+Z^{-1}) - N(a+a^{-1}) + (a-a^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}(a-a^{-1})}{(Z+Z^{-1}) - (a+a^{-1}) + \frac{1}{N}(a-a^{-1})}$$

设 $$b+b^{-1}=a+a^{-1}+\frac{1}{N}(a^{-1}-a)$$

则 $$\hat{H}(Z)=\frac{\frac{1}{N}(a-a^{-1})}{(Z+Z^{-1})-(b+b^{-1})}$$

$$=\frac{\frac{1}{N}(a-a^{-1})}{b-b^{-1}}\ \frac{b-b^{-1}}{(Z+Z^{-1})-(b+b^{-1})}$$

故 $$\hat{h}[k]=\frac{a^{-1}-a}{N(b^{-1}-b)}b^{|k|}$$

根据(6)式，最小均方误差为

$$M.M.S.E=R_{s,s}[0]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{s,r}[k]\hat{h}[k]$$

$$=a^{0}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{|k|}\cdot\frac{a^{-1}-a}{N(b^{-1}-b)}b^{|k|}$$

$$=1-\frac{a^{-1}-a}{N(b^{-1}-b)}\left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}(ab)^{-k}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}(ab)^{k}\right\}$$

$$=1-\frac{a^{-1}-a}{N(b^{-1}-b)}\ \frac{1+ab}{1-ab}=\frac{a^{-1}-a}{b^{-1}-b}$$

如 $a=0.8$，$N=1$，则

$$b+b^{-1}=a+a^{-1}+\frac{1}{N}(a^{-1}-a)=2a^{-1}$$

$$=\frac{2}{0.8}=2.5\quad b=0.5$$

所以 $\hat{h}[k] = \dfrac{a^{-1}-a}{N(b^{-1}-b)} b^{|k|} = \dfrac{\dfrac{1}{0.8}-0.8}{\dfrac{1}{0.5}-0.5} 0.5^{|k|}$

$$= 0.3 \times 2^{-|k|}$$

$$M.M.S.E = \frac{a^{-1}-a}{b^{-1}-b} = 0.3$$

上面的分析中没有考虑系统的可实现性（即没有考虑系统的因果性），这是因为在(2)式中数据 $\eta[m]$ 的观测范围是从 $-\infty$ 到 ∞。事实上，在具有因果性的系统中，当 $k<0$ 时，$h[k]=0$。

为了修正上述分析，规定当 $k<0$ 时，$h[k]=0$，即系统必须遵从因果性原理。于是(2)式改写成

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \eta[n-k]h[k] = \sum_{m=-\infty}^{n} \eta[m]h[n-m] \qquad (8)$$

(8)式规定了数据 $\eta[m]$ 的观测范围是 $(-\infty, n]$，利用正交性原理

$$E\{(s[n]-\hat{s}[n])\eta[n-k]\} = 0 \quad (k \geqslant 0)$$

或
$$E\{(s[n]-\sum_{l=0}^{\infty} \eta[n-l]\hat{h}[l])\eta[n-k]\} = 0 \qquad (k \geqslant 0)$$

或
$$R_{s\eta}[k] = \sum_{l=0}^{\infty} R_{\eta\eta}[k-l]\hat{h}[l] \ (k \geqslant 0) \qquad (9)$$

(9)式称为离散形式的维纳-霍夫方程式。它仅对 $k \geqslant 0$ 是正确的，$k<0$ 时是否成立，我们并不知道。

设 $$\phi[k]=R_{s\eta}[k]-\sum_{l=0}^{\infty}R_{\eta\eta}[k-l]\hat{h}[l] \tag{10}$$

因此，当 $k\geqslant0$时，$\phi[k]=0$，当 $k<0$时，$\phi[k]$为何，并没有确定。而当 $l<0$ 时，$\hat{h}[l]=0$。

对（10）式取 Z变换，得

$$\Phi(z)=S_{s\eta}(Z)-S_{\eta\eta}(z)\hat{H}(z) \tag{11}$$

（11）式中 $\Phi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\phi[k]z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\phi[k]z^{-k}$

$$S_{s\eta}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{s\eta}[k]z^{-k}$$

$$S_{\eta\eta}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}[k]z^{-k}$$

$$\hat{H}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{h}[k]z^{-k}$$

$\Phi(z)$为 $\phi[k]$的 Z变换，故 $\Phi(z)$在$|z|<1$内为解析函数，$\hat{H}(z)$在$|z|>1$内为解析函数。利用(11)式以及 $\Phi(z)$、$\hat{H}(z)$为解析函数的条件可以求$\hat{H}(z)$。其方法与 §6 所讨论的方法相似。

由于 $S_{\eta\eta}(z)=S_{\eta\eta}(e^{j\omega})=S_{\eta\eta}(\omega)\geqslant0$，而且是 ω 的偶函数，故 $S_{\eta\eta}(z)$可以分解为

$$S_{\eta\eta}(z)=A^{+}(z)A^{-}(z)$$

的形式，并使 $A^{+}(z)$和它的逆在$|z|>1$内解析，$A^{-}(z)$和它的逆在$|z|<1$内解析（即在$|z|<1$内 $A^{-}(z)$无零点、极点）

于是 $$\Phi(z)=S_{s\eta}(z)-A^{+}(z)A^{-}(z)\hat{H}(z)$$

或 $$\frac{\Phi(z)}{A^{-}(z)}=\frac{S_{s\eta}(z)}{A^{-}(z)}-A^{+}(z)\hat{H}(z) \tag{12}$$

(12) 式中 $\dfrac{\Phi(z)}{A^-(z)}$ 在 $|z|<1$ 内为解析函数，另一方面 $A^+(z)\widehat{H}(z)$ 在 $|z|>1$ 内为解析函数。$A^+(z)\widehat{H}(z)$ 如果在 z 平面内有极点，则该极点必位于 $|z|<1$ 内。若 $\dfrac{S_{s\eta}(z)}{A^-(z)}$ 可表示为

$$\frac{S_{s\eta}(z)}{A^-(z)}=B^+(z)+B^-(z)$$

其中 $B^+(z)$ 的极点必需是 $A^+(z)\widehat{H}(z)$ 的极点，且 $B^+(z)$ 在极点的留数必需等于 $A^+(z)\widehat{H}(z)$ 在极点上的留数，即

$$B^+(z)=A^+(z)\widehat{H}(z) \tag{13}$$

而 $B^-(z)$ 在 $|z|<1$ 内为解析函数以满足(12)式的要求。因此

$$\widehat{H}(z)=\frac{B^+(z)}{A^+(z)} \tag{14}$$

例二 与本节例一的假设相同，若考虑系统的可实现性，求 $s[n]$ 的最佳估值 $\hat{s}[n]$，即求最佳过滤的方法。

解 因 $\eta[n]=s[n]+\nu[n]$

$$E\{s[n]\nu[m]\}=0$$

$$S_{\nu\nu}(z)=N$$

$$S_{s\nu}(z)=0$$

$$S_{ss}(z)=\frac{a-a^{-1}}{(z+z^{-1})-(a+a^{-1})}$$

$$S_{s\eta}(z)=S_{ss}(z)$$

$$S_{\eta\eta}(z)=S_{ss}(z)+S_{\nu\nu}(z)$$

$$=N\left[\frac{(z+z^{-1})-(a+a^{-1})+\dfrac{1}{N}(a-a^{-1})}{(z+z^{-1})-(a+a^{-1})}\right]$$

设 $$a+a^{-1}+\frac{1}{N}(a^{-1}-a)=b+b^{-1}$$

则 $$S_{\eta\eta}(z)=N\frac{(z+z^{-1})-(b+b^{-1})}{(z+z^{-1})-(a+a^{-1})}$$

$$=N\frac{(b-z)(1-b^{-1}z^{-1})}{(a-z)(1-a^{-1}z^{-1})}$$

设 $$S_{\eta\eta}(z)=A^{+}(z)A^{-}(z)$$

其中 $$A^{+}(z)=\frac{z-b}{z-a}$$

$$A^{-}(z)=N\frac{z-b^{-1}}{z-a^{-1}}$$

因根据题意 $a<1$，并规定 $b<1$，即 $b^{-1}>1$，于是 $A^{+}(z)$的零点、极点均位于单位圆内（即在$|z|<1$内），故 $A^{+}(z)$在$|z|>1$内是解析的，$[A^{+}(z)]^{-1}$在$|z|>1$内也是解析的。而 $A^{-}(z)$的零点、极点均位于单位圆之外。

$$\frac{S_{s\eta}(z)}{A^{-}(z)}=\frac{(a-a^{-1})z}{N(z-a)(z-b^{-1})}$$

$$=\frac{cz}{z-a}-\frac{cz}{z-b^{-1}}$$

$$c=1-ba^{-1}$$

故 $$B^{+}(z)=\frac{1-ba^{-1}}{z-a}z$$

$$B^{-1}(z)=\frac{-(1-ba^{-1})}{z-b^{-1}}z$$

$$\hat{H}(z)=\frac{B^{+}(z)}{A^{+}(z)}=\frac{1-ba^{-1}}{z-b}z=\frac{1-ba^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$$=(1-ba^{-1})(1+bz^{-1}+b^{2}z^{-2}+\cdots+b^{n}z^{-n}+\cdots)$$

$$\hat{h}[n]=\begin{cases}(1-ba^{-1})b^{n} & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$

$\hat{H}(z)$代表获得最佳估值时网络的转移函数。$\hat{h}[n]$为其冲激响应。它是具有因果性的网络，是一阶系统，其原理图见图 7-8。代表该系统的差分方程为

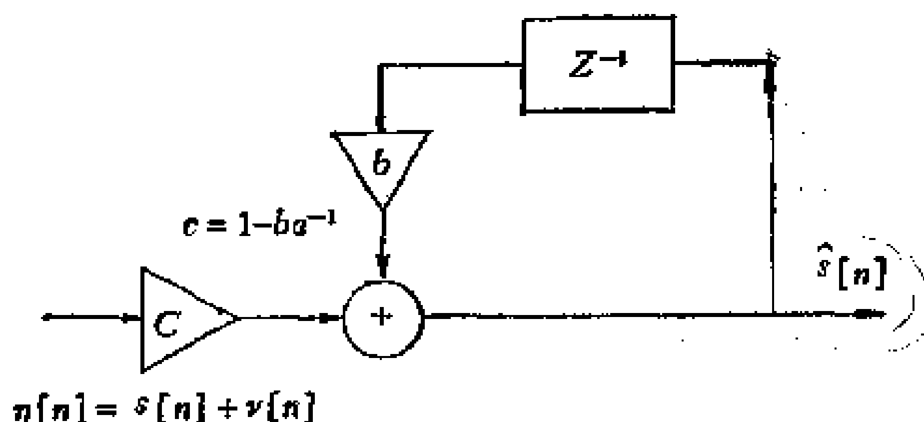


图 7-8

$$\hat{s}[n]-b\hat{s}[n-1]=c\eta[n]$$

如果 $a=0.8$，$N=1$，则 $b=0.5$，

$$c=1-ba^{-1}=1-\frac{0.5}{0.8}=1-0.625=0.375$$

$$\hat{h}[n]=\begin{cases}0.375\times 2^{-n} & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$

最佳估计时的最小均方误差为

$$\begin{aligned}M.M.S.E&=E\{(s[n]-\hat{s}[n])^{2}\}\\&=E\left\{\left(s[n]-\sum_{l=0}^{\infty}\eta[n-l]\hat{h}[l]\right)s[n]\right\}\\&=R_{ss}[0]-\sum_{l=0}^{\infty}R_{s\eta}[l]\hat{h}[l]\end{aligned}\qquad(15)$$

由于本例中 $\qquad R_{ss}[m]=a^{|m|}$

$$R_{sr}[k]=R_{ss}[k]$$

故

$$M.M.S.E=1-\sum_{l=0}^{\infty}a^{l}\times 0.375\times 2^{-l}$$

$$=1-0.375\frac{1}{1-\frac{a}{2}}=1-\frac{0.375}{0.6}=0.375$$

比较例一和例二中最小均方误差可知，具有因果性的系统产生的最小均方误差较大。

§8 匹配滤波器

以上各节讨论最佳估值时，均利用了均方误差最小作为最佳的准则，因此均属于均方意义下的最佳估值问题。其实，还可以采用其他的一些准则来定义最佳。本节采用输出信杂比达到最大作为最佳的准则。雷达系统中采用的最佳接收技术就是利用这一准则。

在雷达系统中，设 $s(t)$ 代表雷达接收到的目标回波信号，它是一确定性信号，其傅氏变换为 $S(j\omega)$。设接收系统输入端背景噪声的功率谱密度为 $S_n(\omega)$。将目标回波信号和噪声同时送入线性时不变系统（接收系统）。设该系统的转移函数为 $H(j\omega)$。设 $Y_s(t)$ 代表回波信号经过线性时不变系统 $H(j\omega)$ 后在 t 时的输出信号值，$Y_n(t)$ 代表噪声经过 $H(j\omega)$ 后在 t 时的输出值。于是在 $t=t_1$ 时，该系统的输出信杂比为

$$\rho(t_1)=\frac{Y_s^2(t_1)}{E\{Y_n^2(t_1)\}} \tag{1}$$

（1）式中 $Y_s^2(t_1)$ 代表 t_1 时刻输出的信号功率，而 $E\{Y_n^2$

$(t_1)\}$代表 t_1时刻输出的噪声功率。

现在的问题是如何选择最佳的转移函数$\widehat{H}(j\omega)$，使 $t=t_1$时刻输出信杂比为最大。这里利用了输出信杂比最大作为最佳接收的准则。

为了求最佳的转移函数$\widehat{H}(j\omega)$，先作如下分析。

因 $$F\{Y_s(t)\}=H(j\omega)S(j\omega) \tag{2}$$

故 $$Y_s(t)==\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3}$$

因 $$S_{Y_n}(\omega)=|H(j\omega)|^2S_n(\omega)$$

故 $$E\{Y_n^2(t)\}=R_{Y_n}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2S_n(\omega)d\omega \tag{4}$$

于是，根据(1)式，在 $t=t_1$时输出端的信杂比为

$$\rho(t_1)=\frac{Y_s^2(t_1)}{E\{Y_n^2(t_1)\}}=\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_1}d\omega\right]^2}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2S_n(\omega)d\omega} \tag{5}$$

现利用(5)式，研究如何选择最佳的转移函数$\widehat{H}(j\omega)$以使$\rho(t_1)$达到最大。

定理 如果选择

$$\widehat{H}(j\omega)=k\frac{\overline{S(j\omega)}}{S_n(\omega)}\exp(-j\omega t_1) \tag{6}$$

其中 k为任意常数，则可使(5)式中的$\rho(t_1)$达到最大。

证 利用柯西-许瓦尔兹不等式

$$\left|\int f(\omega)g(\omega)d\omega\right|^2\leqslant\int|f(\omega)|^2d\omega\cdot\int|g(\omega)|^2d\omega \tag{7}$$

设 $$f(\omega)=H(j\omega)|S_n(\omega)|^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

$$g(\omega)=\frac{S(j\omega)}{|S_n(\omega)|^{\frac{1}{2}}}e^{j\omega t_1} \tag{9}$$

则
$$\rho(t_1)=\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)|S_n(\omega)|^{\frac{1}{2}}\frac{S(j\omega)}{|S_n(\omega)|^{\frac{1}{2}}}e^{j\omega t_1}d\omega\right]^2}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|S_n(\omega)|^{\frac{1}{2}}|^2d\omega}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{S_n(\omega)}d\omega \tag{10}$$

从柯西-许瓦尔兹不等式可知，只有当 $f(\omega)=k\overline{g(\omega)}$ 时，（7）式中才使用等式号。因此当

$$\hat{H}(j\omega)=k\frac{\overline{S(j\omega)}}{|S_n(\omega)|}e^{-j\omega t_1}$$

时，$\rho(t_1)$才达到最大值，此时

$$\rho_{max}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{S_n(\omega)}d\omega \tag{11}$$

讨论 如果背景噪声为白噪声，即 $S_n(\omega)=N_0$，则

$$\hat{H}(j\omega)=\frac{k}{N_0}\overline{S(j\omega)}e^{-j\omega t_1}$$

其中$\frac{k}{N_0}$是系统（滤波器）的增益。如选$\frac{k}{N_0}=1$，并不失去普遍性，那么选$\hat{H}(j\omega)=\overline{S(j\omega)}e^{-j\omega t_1}$，即最佳滤波器的频率响应等于信号频谱的共轭乘以$e^{-j\omega t_1}$。因此，该滤波器可称为共轭滤波器，更通用的术语称之为匹配滤波器。

从物理上讲，这种滤波器让信号中的各频谱分量通过，而信号中没有的频率都是滤波器的阻止频率，因此，这些频率上的噪声分量都被抑制掉，从而使输出信杂比到达最大

值。

例一 设混有白噪声的信号

$$\eta(t)=s(t)+n(t)$$

其中 $s(t)$ 代表信号，$s(t)$ 为 $(0,\tau_0)$ 间的一方波脉冲，其幅度为 1，脉宽为 τ_0，$n(t)$ 代表白噪声，其功率密度为 N_0。求在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。

解 输入信号的频谱为

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\tau_0}e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau_0})$$

根据题意，要求在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比，故匹配滤波器的 $\widehat{H}(j\omega)$ 为

$$\widehat{H}(j\omega)=\frac{k}{N_0}\overline{\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau_0})}e^{-j\omega\tau_0}$$

$$=\frac{k}{N_0}\frac{1}{j\omega_0}(1-e^{-j\omega\tau_0})$$

根据匹配滤波器的复转移函数 $\widehat{H}(j\omega)$，可画出匹配滤波器的原理图，见图 7-9。

图 7-9 中包括理想积分电路、理想延时器和相减器。匹配滤波器的冲激响应为

$$\hat{h}(t)=\frac{k}{N_0}[u(t)-u(t-\tau_0)]$$

式中 $u(t)$ 为阶跃函数，于是可知，在匹配滤波器的输出端信号 $s(t)$ 的响应为一三角波脉冲，见图 7-10。图中(a)图表示 $s(t)$，(b)图表示匹配滤波器的冲激响应，(c)图表示在

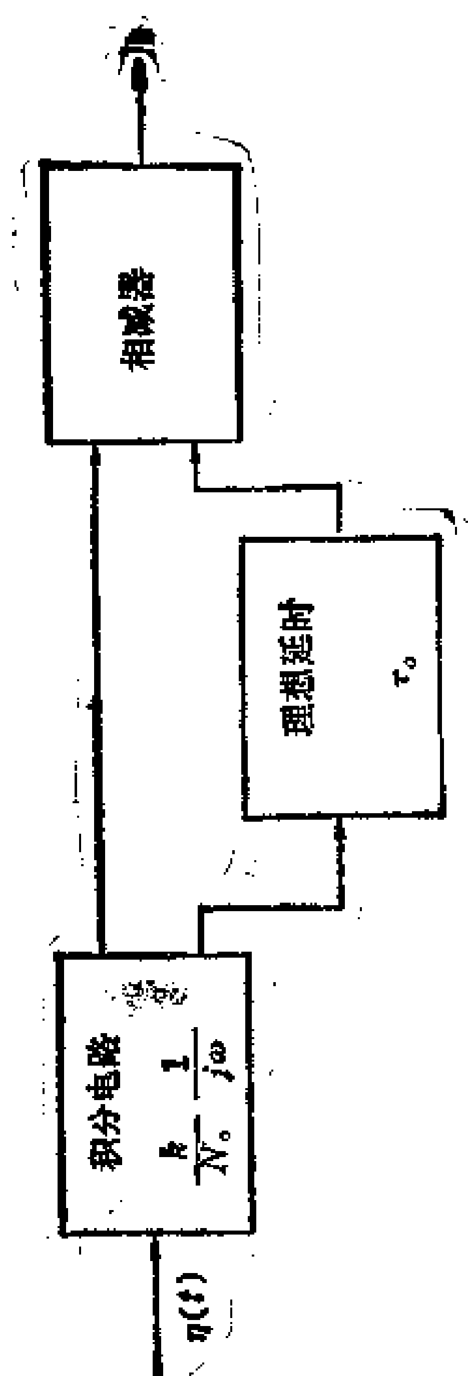


图 7-9

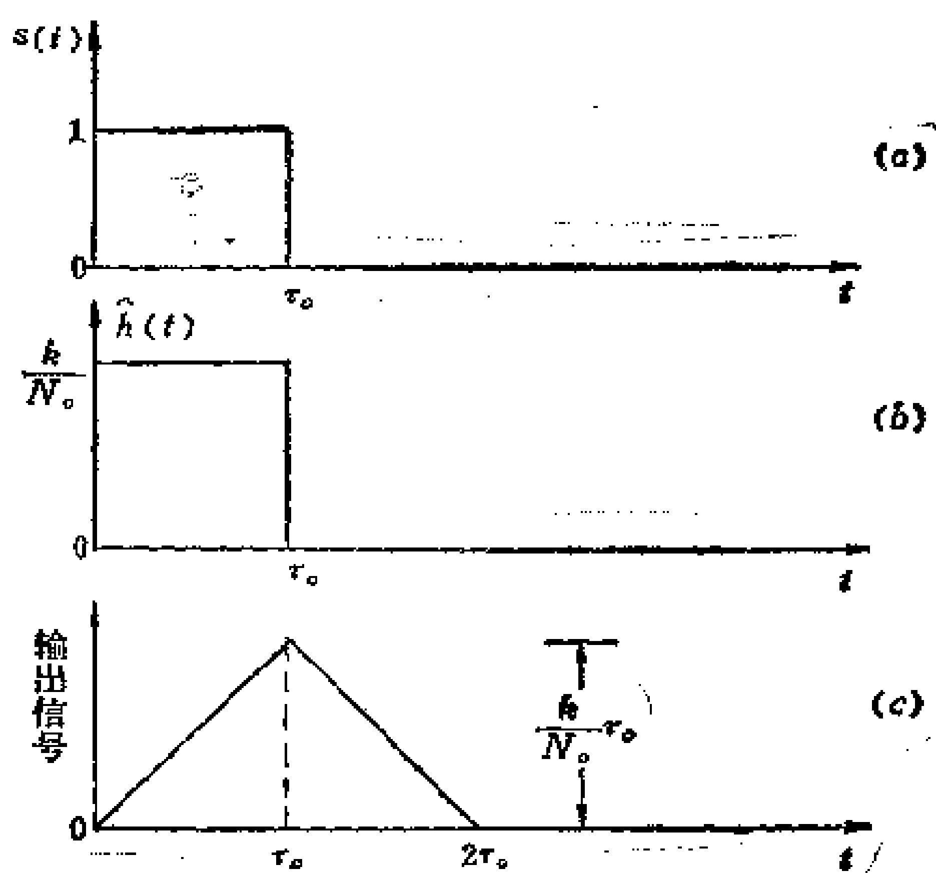


图 7-10

匹配滤波器输出端信号 (t)的输出波形，这输出波形与s(t)相比有了很大的畸变。匹配滤波器的作用是使 $t=\tau_0$时输出信杂比最大，以便识别信号的存在，虽然波形有很大的畸变。

§9 递归线性均方估计

在本章§1中讨论了均方估值问题。§2讨论了线性均方估值问题。§3讨论了用正交性原理研究线性均方估值问题，即利用正交性原理在信号与噪声之和中估计随机信号的参数，

在这种方法中需要解一组联立方程，如果观测值的数目不断增加，每增加一个观测值，就要进行一次新的估值，即要解一次联立方程组，因此它的运算量是十分繁重的。为了简化运算，提出了一种递归方法。下面先举一例。

设有混有噪声 $n(t)$ 的信号 s，其和为 η，对 η 进行取样观察，其观测值为 $\eta_i = s + n_i$，$i = 1, 2, \cdots, k$，i 代表第 i 次观测，n_i 代表附加噪声的样本，s 代表信号，在本例中它不是时间的函数，而是一随机变量。为了简化讨论，假定 s 和 n_i，$i = 1, 2, \cdots$ 均是零均值的随机变量，还假定 $i \neq j$ 时 $E\{n_i n_j\} = 0$，即不同时刻的样本是不相关的，又 $E\{n_i^2\} = \sigma_n^2$，$i = 1, 2, \cdots$，$E\{s^2\} = \sigma_s^2$，且 $E\{s n_i\} = 0$。现在要利用 k 次观测值 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k$ 估计 s，估计的准则是均方误差最小。

现采用线性估计。设 $\hat{s}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i$，利用正交性原理可以证明①，若 $\hat{s}_k$ 是 s 的最小均方误差的估值，则 $a_i = \dfrac{1}{k+b}$，其中 $b = \dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}$，$i = 1, 2, \cdots, k$，而最小均方误差为

$$(M.M.S.E)_k = e_k = E\{(s - \hat{s}_k)^2\} = \frac{1}{k+b}\sigma_n^2$$

如果增加一个观测值 η_{k+1}，利用 $k+1$ 次观测值 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \eta_{k+1}$ 对 s 进行估值，仍采用线性最小均方误差准则，设其最小均方误差估值为 $\hat{s}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \eta_i$，

则
$$a_i = \frac{1}{(k+1)+b} \quad (i = 1, 2, \cdots, k, k+1)$$

---

① 本章习题1

而 $(M.M.S.E)_{k+1}=e_{k+1}=E\{(s-\hat{s}_{k+1})^2\}$

$$=\frac{1}{(k+1)+b}\sigma_n^2$$

下面比较利用k次观测值和利用k+1次观测值两种情况。为了区别两种情况下获得的各系数 a_i，在k次观测值时用 $a_i(k)$ 表示各系数，在 k+1次观测时用 $a_i(k+1)$ 表示各系数。

在利用k次观测值的情况下，设

$$p_k=\frac{e_k}{\sigma_n^2}=\frac{1}{k+b}=a_i(k) \tag{1}$$

在利用k+1次观测值的情况下，设

$$p_{k+1}=\frac{e_{k+1}}{\sigma_n^2}=\frac{1}{(k+1)+b}=a_i(k+1) \tag{2}$$

于是 $$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k+b}{(k+1)+b}=\frac{1}{p_k+1} \tag{3}$$

p_k和 p_{k+1}分别代表k个和k+1个观测值时最小均方误差对于σ_n^2的归一化值。(3)式给出了 p_k和 p_{k+1}间的关系式，也就是得到了p_k的递归公式。利用(3)式，如果知道了 p_k，则就可以求得 p_{k+1}，从而可以依次求得 $p_{k+2}, p_{k+3}, \cdots$。

由于 $$\hat{s}_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}a_i(k+1)\eta_i=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(k+1)+b}\eta_i$$

$$=\frac{b+k}{b+(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{b+k}\eta_i+\frac{1}{(k+1)+b}\eta_{k+1}$$

$$=\frac{b+k}{b+(k+1)}\hat{s}_k+\frac{1}{(k+1)+b}\eta_{k+1}$$

$$=\frac{p_{k+1}}{p_k}\hat{s}_k+p_{k+1}\eta_{k+1} \qquad (4)$$

（4）式也是一个递归关系式。当出现新的观测值 η_{k+1} 时，则按（4）式的递归关系，$\hat{s}_{k+1}$ 为上次的最佳估值 $\hat{s}_k$ 和新的观测值 η_k 的线性组合，因而不再需要重新利用一组联立方程求 k+1个观测值时的各个系数 $a_i(k+1)$。因此，今后可以直接利用递归公式

$$\hat{s}_{k+1}=a_{k+1}\hat{s}_k+b_{k+1}\eta_{k+1} \qquad (5)$$

研究最小均方误差的估值问题。

现仍用上例的各种假设条件说明如何利用递归公式（5）。

（一）进行第一次估计。这时只有一个样本值 η_1，

设
$$\hat{s}_1=b_1\eta_1 \qquad (6)$$

比较（5）、（6）式可知，在利用一次观测值进行估值时，认为上次的估值为0，即 $\hat{s}_0=0$。根据正交性原理

$$E\{(s-\hat{s}_1)\eta_1\}=0$$

或
$$E\{\varepsilon_1\eta_1\}=0$$

因
$$\eta_1=s+n_1$$

故
$$\sigma_s^2-b_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)=0$$

$$b_1=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_n^2}=\frac{1}{1+b}\quad\left(b=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}\right) \qquad (7)$$

$$e_1=E\{\varepsilon_1^2\}=E\{(s-\hat{s}_1)^2\}=E\{(s-\hat{s}_1)s\}$$

$$=\sigma_s^2-b_1\sigma_s^2=\sigma_s^2\frac{b}{1+b}=\frac{\sigma_n^2}{1+b}=b_1\sigma_n^2 \qquad (8)$$

$$\frac{e_1}{\sigma_n^2}=p_1=b_1 \qquad (9)$$

（二）当有了第二个样本 η_2 时，可以利用二个样本

η_1、η_2对 s进行估计。设

$$\hat{s}_2 = a_2\hat{s}_1 + b_2\eta_2 \tag{10}$$

利用正交性原理

$$E\{\varepsilon_2\eta_2\} = E\{(s-\hat{s}_2)\eta_2\} = 0 \tag{11}$$

$$E\{\varepsilon_2\eta_1\} = E\{(s-\hat{s}_2)\eta_1\} = 0 \tag{12}$$

因

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= s-\hat{s}_2 = s - a_2\hat{s}_1 - b_2\eta_2 \\ &= (s-\hat{s}_1)a_2 + s(1-a_2) - b_2\eta_2\end{aligned} \tag{13}$$

(13)式代入(12)式，又利用 $E\{(s-\hat{s}_1)\eta_1\}=0$

故 $(1-a_2)E\{s\eta_1\} - b_2E\{\eta_1\eta_2\} = 0$

因 $E\{s\eta_1\} = E\{s(s+n_1)\} = \sigma_s^2$

$$\begin{aligned}E\{\eta_1\eta_2\} &= E\{(s+n_1)(s+n_2)\} \\ &= E\{s^2\} + E\{sn_1\} + E\{sn_2\} + E\{n_1n_2\} \\ &= E\{s^2\} = \sigma_s^2\end{aligned}$$

故

$$1-a_2 = b_2 \tag{14}$$

从(11)式 $E\{s\eta_2\} - a_2E\{\hat{s}_1\eta_2\} - b_2E\{\eta_2\eta_2\} = 0$

而 $E\{s\eta_2\} = E\{s^2\} = \sigma_s^2$

$$E\{\eta_2\eta_2\} = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

故

$$b_2\sigma_n^2 = \sigma_s^2(1-b_2) - a_2E\{\hat{s}_1\eta_2\} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(M.M.S.E)_2 = e_2 &= E\{(s-\hat{s}_2)^2\} = E\{(s-\hat{s}_2)s\} \\ &= \sigma_s^2 - E\{\hat{s}_2 s\} = \sigma_s^2 - a_2E\{\hat{s}_1 s\} - b_2E\{s\eta_2\} \\ &= \sigma_s^2(1-b_2) - a_2E\{\hat{s}_1 s\}\end{aligned} \tag{16}$$

由于 $E\{\hat{s}_1\eta_2\} = E\{\hat{s}_1 s\} + E\{\hat{s}_1 n_2\} = E\{\hat{s}_1 s\}$

于是(15)式可改写为

$$b_2\sigma_n^2 = \sigma_s^2(1-b_2) - a_2E\{\hat{s}_1 s\} \tag{17}$$

比较(16)、(17)两式知 $e_2 = b_2\sigma_n^2$，或

$$p_2 = \frac{e_2}{\sigma_n^2} = b_2 \tag{18}$$

又因 $E\{\hat{s}_1 s\} = E\{b_1\eta_1 s\} = b_1 E\{\eta_1 s\} = b_1\sigma_s^2$ (19)

(19)式代入(17)式 $b_2\sigma_n^2 = \sigma_s^2(1-b_2) - a_2 b_1\sigma_s^2$ (20)

由(14)式可知 $a_2 = 1 - b_2$ (21)

利用 $b = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}$, $b_1 = \frac{1}{1+b}$ (22)

(21)、(22)式代入(20)式，整理化简得

$$p_2 = \frac{p_1}{1+p_1} \tag{23}$$

（三）重复上述过程求 a_{k+1} 和 b_{k+1}。根据正交性原理

$$E\{\varepsilon_{k+1}\eta_i\} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k, k+1) \tag{24}$$

而 $\varepsilon_{k+1} = s - \hat{s}_{k+1} = s - a_{k+1}\hat{s}_k - b_{k+1}\eta_{k+1}$

$= a_{k+1}(s - \hat{s}_k) + s(1 - a_{k+1}) - b_{k+1}\eta_{k+1}$ (25)

已知 $E\{(s - \hat{s}_k)\eta_i\} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ (25)

则 $E\{[s(1 - a_{k+1}) - b_{k+1}\eta_{k+1}]\eta_i\} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$

因此 $1 - a_{k+1} = b_{k+1}$

或 $a_{k+1} = 1 - b_{k+1}$ (26)

(26)式和(14)式是一致的。(26)式给出了 a_{k+1} 和 b_{k+1} 的关系，因而

$$\hat{s}_{k+1} = \hat{s}_k + b_{k+1}(\eta_{k+1} - \hat{s}_k) \tag{27}$$

(27) 式说明了第 $(k+1)$ 次估值是第 k 次估值 $\hat{s}_k$ 加上一个校正项。校正项正比于第 $k+1$ 次观测值和 $\hat{s}_k$ 之差，其比例因子为 b_{k+1}。(27)式是一个递归公式。

下面进一步计算 b_{k+1}。因

$$E\{(s - \hat{s}_{k+1})\eta_{k+1}\} = 0$$

$$E\{s\eta_{k+1}\} = \sigma_s^2 = E\{\hat{s}_{k+1}\eta_{k+1}\}$$

$$= E\{(a_{k+1}\hat{s}_k + b_{k+1}\eta_{k+1})\eta_{k+1}\}$$

故 $b_{k+1}\sigma_n^2 = \sigma_s^2(1 - b_{k+1}) - a_{k+1}E\{\hat{s}_k\eta_{k+1}\}$ (28)

而 $$(M.M.S.E)_{k+1}=e_{k+1}=E\{(s-\hat{s}_{k+1})^2\}$$
$$=E\{(s-\hat{s}_{k+1})s\}=\sigma_s^2-a_{k+1}E\{\hat{s}_k s\}$$
$$-b_{k+1}\sigma_s^2=(1-b_{k+1})\sigma_s^2-a_{k+1}E\{\hat{s}_k s\} \quad (29)$$

且因 $$E\{\hat{s}_k\eta_{k+1}\}=E\{\hat{s}_k(s+n_{k+1})\}=E\{\hat{s}_k s\} \quad (20)$$

(30)式代入(28)式，然后与(29)式相比较可知

$$e_{k+1}=b_{k+1}\sigma_n^2$$

或 $$b_{k+1}=\frac{e_{k+1}}{\sigma_n^2}=p_{k+1} \quad (31)$$

从(9)式、(18)式、(31)式可知

$$b_k=p_k \qquad (k=1,2,\cdots) \quad (32)$$

且 $$e_{k+1}=E\{(s-\hat{s}_{k+1})s\}$$
$$=E\{[s-\hat{s}_k-b_{k+1}(\eta_{k+1}-\hat{s}_k)]s\}$$
$$=e_k-b_{k+1}E\{(s+n_{k+1}-\hat{s}_k)s\}$$
$$=e_k-b_{k+1}e_k=e_k(1-b_{k+1})$$

$$\frac{e_{k+1}}{\sigma_n^2}=p_{k+1}=\frac{e_k}{\sigma_n^2}(1-b_{k+1})=p_k(1-p_{k+1})$$

故 $$(1+p_k)p_{k+1}=p_k$$

或 $$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{1}{1+p_k} \quad (33)$$

(33)式是 p_k 的递推公式，通过它计算出 p_k，于是可知 $b_k(k=1,2,\cdots)$。为了递推 p_k，(一)中已假定 $\hat{s}_0=0$，则

$$e_0=E\{(s-\hat{s}_0)^2\}=E\{s^2\}=\sigma_s^2$$

故 $$p_0=\frac{e_0}{\sigma_n^2}=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}=\frac{1}{b}$$

根据(7)、(9)式

$$p_1 = b_1 = \frac{1}{1+b} = \frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b}} = \frac{p_0}{1+p_0} \tag{34}$$

(34)式和(33)式是一致的。于是，p_k的递推可以从$\hat{S}_0 = 0$，$p_0 = \frac{1}{b}$开始。根据

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k+1} &= a_{k+1}\hat{s}_k + b_{k+1}\eta_{k+1} \\ &= \hat{s}_k + b_{k+1}(\eta_{k+1} - \hat{s}_k) \end{aligned}$$

可画出两个递归估值器的方块图，见图 7-11。

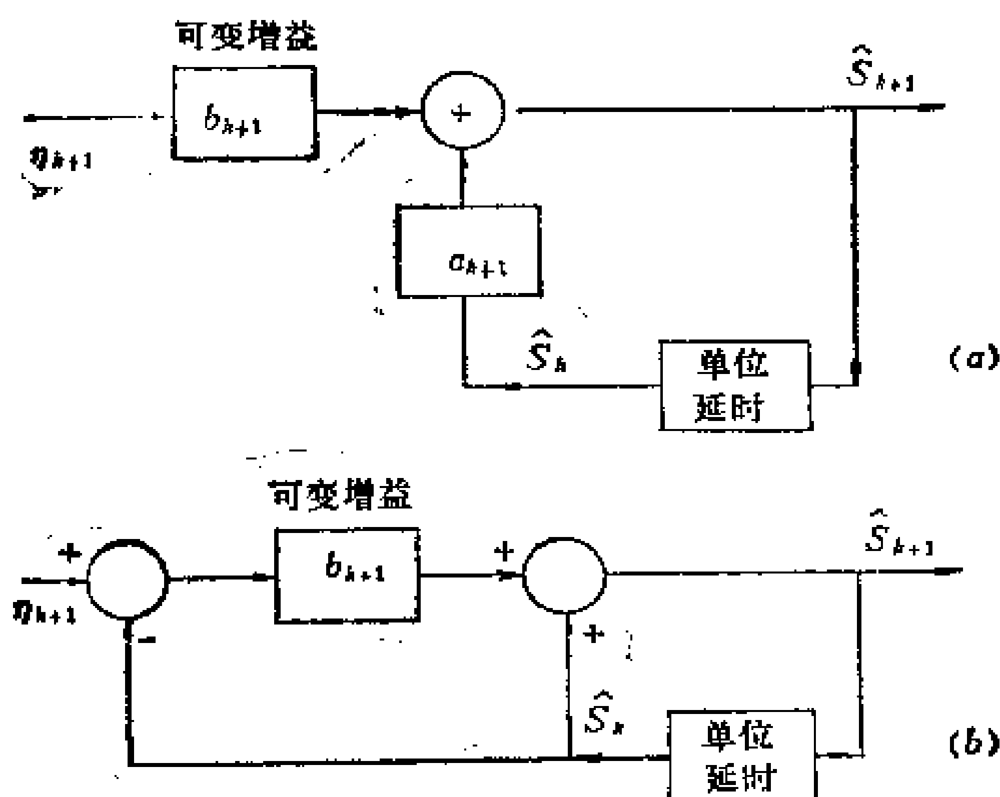


图 7-11

§10 随机信号的递归线性均方估计

上节提出了采用递归方法进行线性均方估计。要指出的是上节中对所讨论的信号作了一个严格的限制，认为被估计的信号是不随时间变化的随机变量。但是在实际问题中随机信号是一个过程，是以时间为参数的随机过程。现在的问题是，当信号是以时间为参数的随机过程并且又混有噪声，那么，能否利用递归方法对混有噪声的随机过程进行估计。为了便于讨论，假定被估计的随机信号是一阶自回归过程（也称 AR 模型，或一阶递归过程）。

（一）什么是一阶自回归过程?

一阶自回归过程由下面的动态方程所决定

$$s(k)=as(k-1)+w(k-1) \quad (a<1) \tag{1}$$

(1)式中 w(k)是均值为零的白噪声样本，即

$$E\{w(k)\}=0$$

$$E\{w(k)w(l)\}=\begin{cases}0 & (k\neq l)\\ \sigma_w^2 & (l=k)\end{cases}$$

(1)式中 a是系统的参数。(1)式可用图 7-12所示的方框

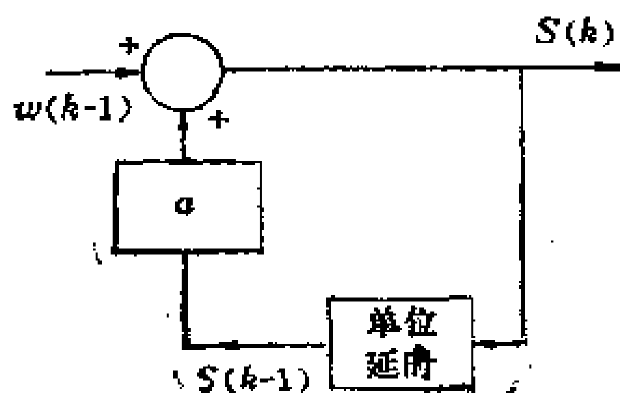


图 7-12

图说明。

图7-12说明，如果以w(k-1)作为输入，则在输出端可获得一阶自回归过程s(k)。图7-12所代表的系统具有转移函数

$$H(j\omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$$

因为 $E\{w(k)\}=0 \qquad (k=1,2,\cdots)$

故s(k)的均值也为零，或

$$E\{s(k)\}=0 \tag{2}$$

而 $S_s(\omega)=\sigma_w^2|H(j\omega)|^2$

$$=\frac{\sigma_w^2}{(1+a^2)-2a\cos\omega} \tag{3}$$

$$R_s(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_s(\omega)e^{j\omega k}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma_w^2}{(1+a^2)-2a\cos\omega}e^{j\omega k}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{\sigma_w^2}{(1-az^{-1})(1-az)}z^{k-1}dz$$

$$=\frac{\sigma_w^2}{1-a^2}a^{|k|} \qquad (a<1)$$

故 $$\sigma_s^2=R_s(0)=\frac{\sigma_w^2}{1-a^2} \tag{4}$$

$$R_s(k)=\sigma_s^2a^{|k|} \qquad (a<1) \tag{5}$$

从(5)式可知参数a起着时间常数的作用。当a值较大时，s(k)的相关时间长，过程变化较为缓慢。

(1)式中如果$\sigma_w^2=0$，它表明输入白噪声消失。若

$\sigma_w^2=0$，且 $a=1$，则输出信号 $s(k)$ 是一不随时间改变而变化的随机变量。

（二）设有随机过程 $s(k)$，$s(k)$ 系一阶自回归过程，有白噪声 $n(k)$，两者相加得到被观测信号 $\eta(k)$，即在第 k 次取样观测时得到的观测值为

$$\eta(k)=s(k)+n(k) \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{6}$$

现在的问题是利用 k 次及以前各次的的观测值 $\eta(1),\eta(2),\cdots,\eta(k-1)$，$\eta(k)$ 对 k 时的信号 $s(k)$ 进行估值。估计的准则仍是最小均方误差准则，因此这一问题是一最佳滤波问题。现在采用线性递归方法来处理它。

请注意，不要把出现在一阶递归过程内的白噪声 $w(k)$ 与（6）式中白噪声相混淆。而且假定 $n(k)$ 和 $w(j)$ 是统计独立的。

假定（6）式中的噪声为零均值的白噪声，且其方差为 σ_n^2，即

$$E\{n(k)\}=0, \qquad E\{[n(k)]^2\}=\sigma_n^2$$

同时假定信号 $s(k)$ 和噪声 $n(l)$ 是相互统计独立的。

用下列递归方程对信号 $s(k)$ 作估值

$$\hat{s}(k)=a_k\hat{s}(k-1)+b_k\eta(k) \tag{7}$$

（7）式中 $\hat{s}(k-1)$ 代表上次对信号的估值，$\eta(k)$ 为第 k 次观测值，a_k 和 b_k 是时变的增益。要选择合适的 a_k 和 b_k 值，使

$$e_k=E\{[s(k)-\hat{s}(k)]^2\}$$

为最小。利用正交性原理得

$$E\{[s(k)-\hat{s}(k)]\eta(i)\}=0 \quad (i=1,2,3,\cdots,k)$$

若 $i=k-1$，则

$$E\{[s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b_k\eta(k)]\eta(k-1)\}=0$$

$$E\{[s(k-1)-\hat{s}(k-1))a_k+s(k)-a_ks(k-1)$$

$$-b_k\eta(k)]\eta(k-1)\}=0$$

因 $$E\{[s(k-1)-\hat{s}(k-1)]\eta(k-1)\}=0$$

$$E\{s(k)\eta(k-1)\}$$
$$=E\{s(k)[s(k-1)+n(k-1)]\}$$
$$=E\{s(k)s(k-1)\}=R_s(1)=\sigma_s^2\cdot a$$
$$E\{s(k-1)\eta(k-1)\}$$
$$=E\{s(k-1)[s(k-1)+n(k-1)]\}=\sigma_s^2$$
$$E\{\eta(k)\eta(k-1)\}$$
$$=E\{[s(k)+n(k)][s(k-1)+n(k-1)]\}$$
$$=E\{s(k)s(k-1)\}=R_s(1)=\sigma_s^2\cdot a$$

故 $$\sigma_s^2\cdot a-a_k\sigma_s^2-b_k a\sigma_s^2=0$$

$$a_k=a(1-b_k) \tag{8}$$

(8)式代入(7)式得

$$\hat{s}(k)=a\hat{s}(k-1)+b_k[\eta_k-a\hat{s}(k-1)] \tag{9}$$

(9)式说明，第k次观测时，其最佳估值是由二部分组成的，(1)第$k-1$次观测时的最佳估值$\hat{s}(k-1)$乘以a，它代表过去的观测值对k时的预测，(2)是一校正项，即第k次观测值$\eta(k)$和$a\hat{s}(k-1)$之差乘以b_k。

(8)式给出了a_k和b_k的关系，下一个问题是求b_k。

$$e_k=(M.M.S.E)_k=E\{[s(k)-\hat{s}(k)]^2\}$$
$$=E\{[s(k)-\hat{s}(k)]s(k)\}$$
$$=\sigma_s^2-E\{[a_k\hat{s}(k-1)+b_k\eta(k)]s(k)\}$$
$$=\sigma_s^2-b_k\sigma_s^2-a_kE\{\hat{s}(k-1)s(k)\} \tag{10}$$

$$0=E\{[s(k)-\hat{s}(k)]\eta(k)\}$$
$$=\sigma_s^2-E\{[a_k\hat{s}(k-1)+b_k\eta(k)]\eta(k)\}$$
$$=\sigma_s^2-a_kE\{\hat{s}(k-1)\eta(k)\}-b_k\sigma_s^2-b_k\sigma_n^2 \tag{11}$$

其中 $$E\{\hat{s}(k-1)\eta(k)\}$$

$$= E\{\hat{s}(k-1)[s(k)+n(k)]\}$$

$$= E\{\hat{s}(k-1)s(k)\} \tag{12}$$

(12)式代入(11)式，再与(10)式相比较，得

$$e_k = b_k \sigma_n^2$$

或

$$p_k = \frac{e_k}{\sigma_n^2} = b_k \tag{13}$$

在(12)式的运算过程中，利用了 $E\{\hat{s}(k-1)n(k)\}=0$，这是因为$\hat{s}(k-1)$是一估值，它只与$(k-1)$以前的$n(1)$ $n(2),\cdots,n(k-1)$有关，而与$n(k)$是统计独立的。

因

$$s(k)-\hat{s}(k) = s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b_k\eta(k)$$

$$e_k = E\{[s(k)-\hat{s}(k)]^2\} = E\{[s(k)-\hat{s}(k)][s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b\eta(k)]\}$$

根据正交性原理

$$E\{[s(k)-\hat{s}(k)]\eta(k)\}=0$$

故

$$\begin{aligned} e_k &= E\{[s(k)-\hat{s}(k)][s(k)-a_k\hat{s}(k-1)]\} \\ &= \{[s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b_k\eta(k)][s(k)-a_k\hat{s}(k-1)]\} \\ &= E\{[s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b_ks(k)-b_kn(k)][s(k)-a_k\hat{s}(k-1)]\} \\ &= E\{[s(k)-a_k\hat{s}(k-1)-b_ks(k)][s(k)-a_k\hat{s}(k-1)]\} \end{aligned}$$

已知S(k)是一阶递归过程

$$s(k)=as(k-1)+W(k-1)$$

故

$$\begin{aligned} e_k = E\{&[(1-b_k)(as(k-1)+w(k-1)) \\ &-a_k\hat{s}(k-1)][as(k-1)+w(k-1) \\ &-a_k\hat{s}(k-1)]\} \end{aligned}$$

因 $s(k-1)$ 只与 $w(k-2), w(k-3), \cdots$ 有关，而与 $w(k-1)$ 是统计独立的，故

$$E\{w(k-1)s(k-1)\}=0$$

且 $\hat{s}(k-1)$ 只与 $s(k-1), s(k-2), \cdots$ 有关，故 $w(k-1)$ 与 $\hat{s}(k-1)$ 是统计独立的，故

$$E\{w(k-1)\hat{s}(k-1)\}=0$$

而
$$E\{[w(k-1)]^2\}=\sigma_w^2$$

故
$$\begin{aligned}e_k &= E\{[a(1-b_k)s(k-1)-a_k\hat{s}(k-1)]\\ &\quad\cdot[as(k-1)-a_k\hat{s}(k-1)]\}+(1-b_k)\sigma_w^2\\ &= E\{a_k[s(k-1)-\hat{s}(k-1)][a_k(s(k-1)\\ &\quad-\hat{s}(k-1))+(a-a_k)s(k-1)]\}+(1-b_k)\sigma_w^2\\ &= a_k^2e_{k-1}+a_k(a-a_k)E\{[s(k-1)\\ &\quad-\hat{s}(k-1)]s(k-1)\}+(1-b_k)\sigma_w^2\\ &= a_k^2e_{k-1}+ab_ka_ke_{k-1}+(1-b_k)\sigma_w^2\end{aligned}\tag{14}$$

(14)式两边除以 σ_n^2，并已知

$$b_k=p_k=\frac{e_k}{\sigma_n^2}$$

$$b_{k-1}=p_{k-1}=\frac{e_{k-1}}{\sigma_n^2}$$

则
$$p_k=a_k^2p_{k-1}+aa_kp_kp_{k-1}+(1-p_k)A\tag{15}$$

式中
$$A=\frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2}\tag{16}$$

根据(8)式
$$a_k=a(1-b_k)=a(1-p_k)\tag{17}$$

(17)式代入(15)式得

$$\begin{aligned}p_k &= a^2(1-p_k)^2p_{k-1}+a^2(1-p_k)p_kp_{k-1}\\ &\quad+(1-p_k)A\\ &= a^2(p_{k-1}-p_kp_{k-1})+(1-p_k)A\end{aligned}$$

即 $$p_k=\frac{A+a^2p_{k-1}}{A+1+a^2p_{k-1}} \tag{18}$$

(18)式给出了 p_k、p_{k-1}间的递归公式，亦即给出了 b_k、b_{k-1}间的递归公式。

利用递归公式需要有始起值。由于所有处理的信号是零均值信号，故取$\hat{s}(0)=0$（在没有观测数据时，其最佳估值为0），于是

$$\hat{s}(1)=b_1\eta(1)$$

$\eta(1)$是第一次观测值。利用正交性原理

$$E\{[s(1)-\hat{s}(1)]\eta(1)\}=0$$

$$E\{[s(1)-b_1\eta(1)]\eta(1)\}=0$$

或 $$\sigma_s^2=b_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)$$

$$b_1=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_n^2}=p_1$$

或 $$p_1=\frac{[(1-a^2)+a^2]\sigma_s^2}{(1-a^2+a^2)\sigma_s^2+\sigma_n^2}=\frac{\sigma_w^2+a^2\sigma_s^2}{\sigma_w^2+a^2\sigma_s^2+\sigma_n^2}$$

$$=\frac{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2}+a^2\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}}{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2}+a^2\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}+1}=\frac{A+a^2p_0}{A+1+a^2p_0} \tag{19}$$

设 $$p_0=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \tag{20}$$

于是可以看到，(19)式符合递归公式。利用$p_0=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$可以求

出 $p_1, p_2, \cdots, p_k \cdots$。

例一 若 $A = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} = 1$，$a^2 = \frac{1}{2}$，求 $p_1, p_2, \cdots$。

解

$$p_0 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_n^2} = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} \quad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$p_1 = \frac{A + a^2 p_0}{A + 1 + a^2 p_0} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

$$= 0.6667 = b_1$$

$$p_2 = \frac{A + a^2 p_1}{A + 1 + a^2 p_1} = \frac{1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{1 + 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{4}{7}$$

$$= 0.5713 = b_2$$

$$p_3 = \frac{A + a^2 p_2}{A + 1 + a^2 p_2} = \frac{1 + \frac{2}{7}}{2 + \frac{2}{7}} = \frac{9}{16} = 0.5625 = b_3$$

可以看出，当 k 增大时，p_k 趋于某一个极限。在本例中设其极限为 p，则

$$p = \frac{1 + \frac{1}{2}P}{2 + \frac{1}{2}p}, \text{ 或 } p = 0.5615$$

从而可知当多次递归后，$b_k = p_k = \frac{e_k}{\sigma_n^2} = 0.5615$

讨论一 因 $A = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2}$，它代表信号内（一阶递归过程内）白噪声部分的方差与观测时白噪声方差之比，它本质上代表观测时的信杂比。如果A增加（或由于附加观测噪声下降，或一阶递归过程的起伏增加），则 $p_k = b_k \to 1$，在这种极限情况时

$$\hat{s}_k = \eta(k)$$

即所有以前各次对信号的估值都可以忽略不计，而只要用本次的观测值作为这一次的估值，即 $s(k)$ 的最佳估值 $\hat{s}(k)$ 为本次观测样本值 $\eta(k)$。

反之，如果 $A \to 0$，即 $\sigma_w^2 = 0$，则 $b_k = p_k = \frac{a^2 p_{k-1}}{1 + a^2 p_{k-1}}$，特别是当 $a = 1$时，$s(k) = s$，它是一随机变量。这就是§9中讨论的情况，即 $b_k = p_k = \frac{p_{k-1}}{1 + p_{k-1}}$。

讨论二 信号模型 $s(k)$ 和最佳滤波方法可用图 7-13 所示的方块图描述。比较图 7-13中两个方块图，(a)一阶递归过程，即信号产生的模型，(b)实现最佳估值的方块图，可以看出(a)、(b)图中有一部分是十分相似的。

（三）上面所讨论的问题是用k次及k次以前各次的观测样本估计k次时信号值 $s(k)$，因此这个问题属于滤波问题。而在实际问题中，特别是在控制和数据压缩中，所要求的是用k次及k次以前的观测样本估计k以后（$k+1, k+$

2, …)的信号 s (k + l)，求其最佳估值 $\hat{s}(k+l)$。这类问题是最佳预测问题。预测可以分为一步预测，即求 $\hat{s}(k+1)$，二步预测，l 步预测，即求 $\hat{s}(k+l)$。为了简化运算而又能说明预测的概念，现只讨论一步预测问题。仍如(二)中所讨论的那样假定信号的模型是一阶递归过程，即

$$s(k) = as(k-1) + w(k-1) \tag{21}$$

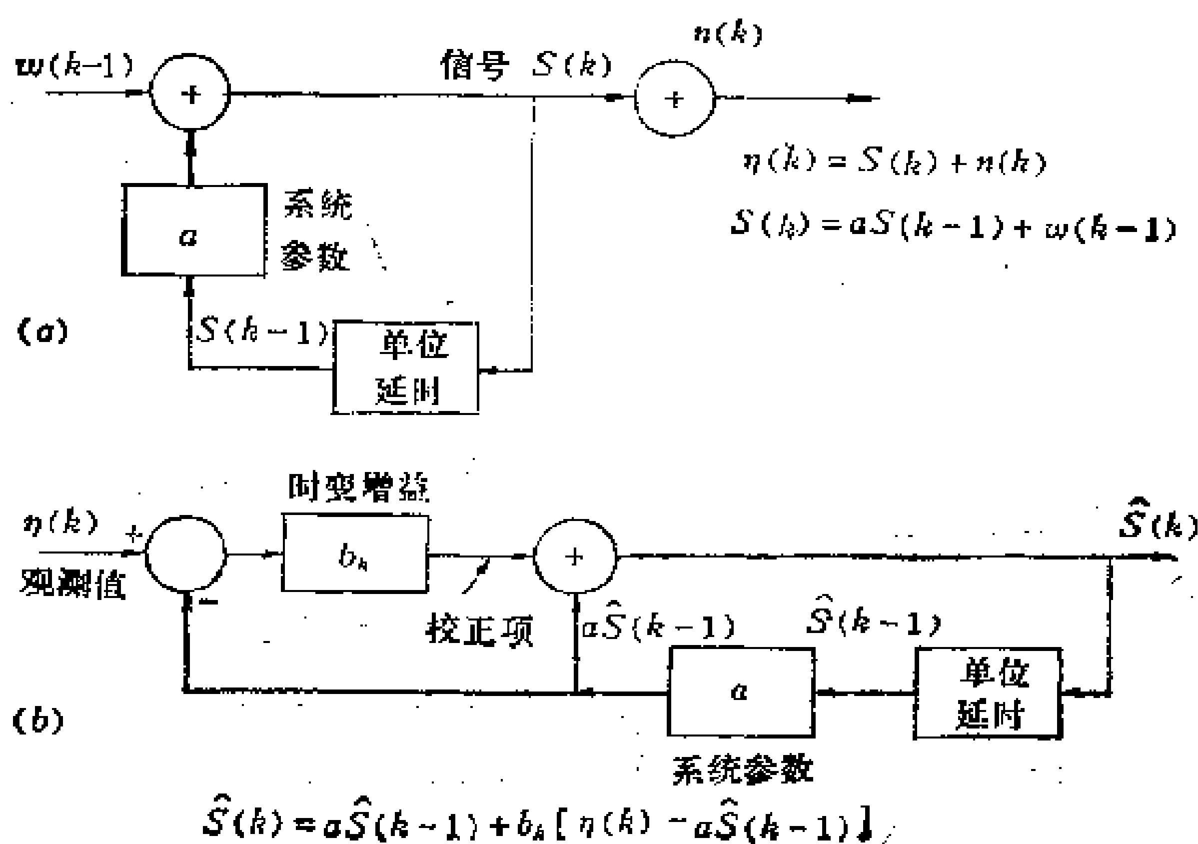


图 7-13

$$E\{s(k)\} = 0 \tag{22}$$

$$E\{w(k)\} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{23}$$

$$E\{w(k)\,w(l)\} = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \sigma_w^2 & (k = l) \end{cases} \tag{24}$$

$$E\{s(k)w(k)\}=0 \tag{25}$$

在观测数据时，观测值内除信号外，混有附加白噪声

$$\eta(k)=s(k)+n(k) \tag{26}$$

$n(k)$和$w(l)$是相互统计独立的，

$$E\{n(k)\}=0 \tag{27}$$

$$E\{n^2(k)\}=\sigma_n^2 \tag{28}$$

现在的问题是利用k次及k次以前各次的观测样本对未来$k+1$时的信号$s(k+1)$进行最佳线性估计，其最佳准则是均方误差最小。

今后采用$\hat{s}(k+1/k)$代表一步最佳预测。

最佳的准则是使

$$E\{[s(k+1)-\hat{s}(k+1/k)]^2 = (M.M.S.E)_k = v(k+1/k) \tag{29}$$

（按照现在采用的符号，那么（二）中讨论的最佳估值（滤波）应采用符号$\hat{s}(k/k)$）。和（二）中采用的方法相似，可以得下列结果：

（1）如果设$\hat{s}(k+1/k)=\alpha_k\hat{s}(k/k-1)+\beta_k\eta(k)$

(30)

则 $$\alpha_k=a-\beta_k \tag{31}$$

于是估值的递归关系式可改写为

$$\hat{s}(k+1/k)=a\hat{s}(k/k-1)+\beta_k[\eta(k)-\hat{s}(k/k-1)] \tag{32}$$

（2）递归关系中的时变增益β_k为

$$\beta_k=\frac{ap'_{k-1}}{1+p'_{k-1}} \tag{33}$$

其中　　$p'_{k-1}=\frac{v(k/k-1)}{\sigma_n^2}$　　(34)

p'_{k-1}称为归一化的均方预测误差。

（3）p'_k为递推关系式

$$p'_k=\frac{v(k+1/k)}{\sigma_n^2}=A+\frac{a^2p'_{k-1}}{1+p'_{k-1}}$$

$$=A+a\beta_k \tag{35}$$

其中　　$A=\frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2}$　　(36)

讨论一　比较最佳滤波和最佳预测两种情况下的一些结论。在最佳预测情况中

$$\hat{s}(k+1/k)=a\hat{s}(k/k-1)+\beta_k[\eta(k)-\hat{s}(k/k-1)] \tag{32}$$

即第 k 次估值是前次估值乘以 a 和校正项之和，而校正项为 β_k乘以第 k 次观测样本和前次估计值之差。在最佳滤波情况中

$$\hat{s}(k)=a\hat{s}(k-1)+b_k[\eta(k)-a\hat{s}(k-1)] \tag{9}$$

两种情况中的校正项是不同的。同时，两种情况中的时变增益也是不同的，在最佳预测中为 β_k，而在最佳滤波中为 b_k，两者不等。若滤波处理和预测处理同时需要时，预测处理是否独立于滤波处理呢？其回答是否定的，两种处理是有联系的。其实，由于信号的模型相同，估值中采用的准则相同，因而预测中的$\hat{s}(k+1/k)$和滤波中的$\hat{s}(k)$是有联系的。实际上　$\hat{s}(k+1/k)=a\hat{s}(k)$

而　　$\beta_k=ab_k$

因此两种处理是直接联系着的。

讨论二　在一步预测器中，如果在观测样本 $\eta(k)$中不存在观测噪声，即 $\sigma_n^2=0$，这时用 s(1)、s(2)，…，s(k)来估计s(k+1)。在这种条件下，最佳予测值为

$$\hat{s}(k+1/k)=as(k)$$

而其最小均方误差为

$$\begin{aligned} v(k+1/k) &= E\{[s(k+1)-\hat{s}(k+1/k)]^2\} \\ &= E\{[s(k+1)-as(k)]^2\} \\ &= \sigma_s^2-2a\cdot a\sigma_s^2+a^2\sigma_s^2 \\ &= (1-a^2)\sigma_s^2=\sigma_w^2 \end{aligned}$$

利用(32)式，画出其相应的方块图，可得到一个最佳预测的方块图，见图 7-14(a)。

根据(9)式把最佳滤波的方块图也同时画在一个图中(见图 7-14(b))。比较最佳预测和最佳滤波的两个方块图，发现两者的特征是相似的。如果把图(a)、图(b)两者结合起来，则同时可以得到最佳滤波和最佳预测，见图 7-14(c)。

（四）上面所讨论的仅限于一阶自回归过程的信号模型下的最佳估值问题。但是所用的递归方法可应用到各种复杂的信号模型中。

如有一信号模型，它受二阶差分方程所控制，

$$s(k)=as(k-1)+bs(k-2)+w(k-1) \tag{37}$$

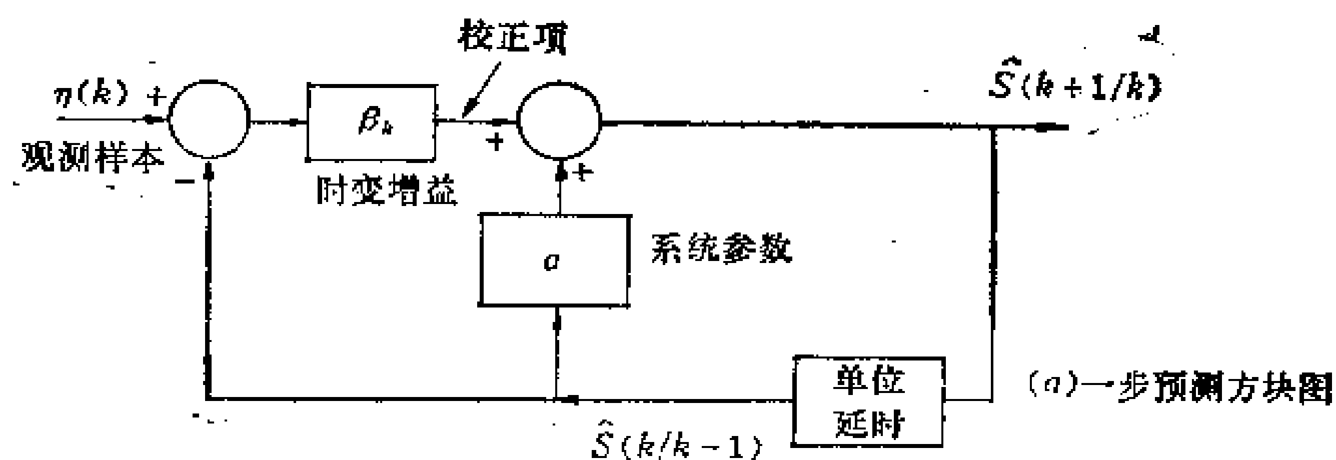
这时可以用状态变量法将二阶差分方程变成离散系统的状态方程。设

$$s_1(k)=s(k)$$

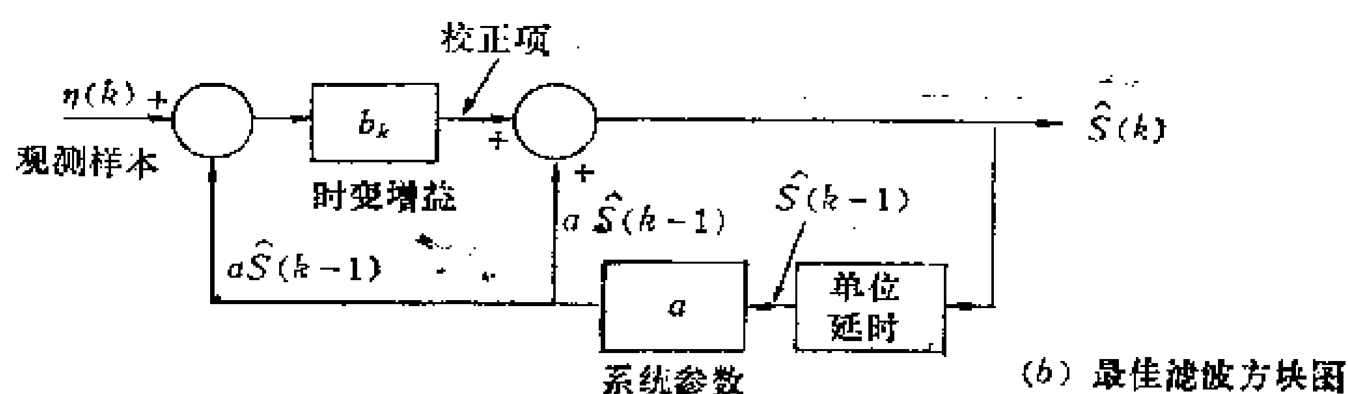
则　$s(k-1)=s_1(k-1)$

设　$s_2(k)=s(k-1)=s_1(k-1)$

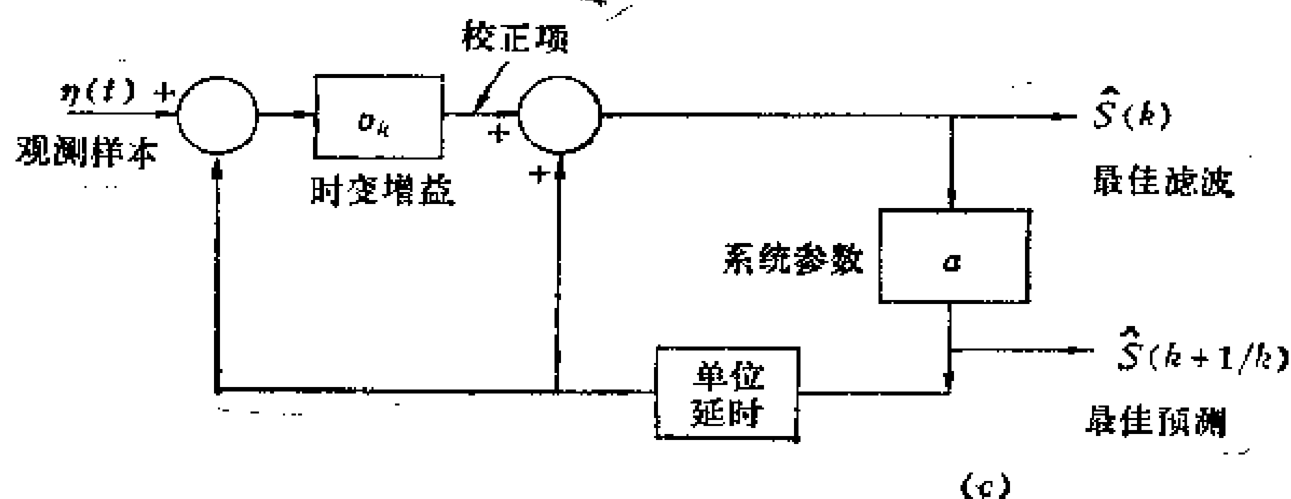
则　$s(k-2)=s(k-1-1)=s_2(k-1)$



(a)一步预测方块图



(b) 最佳滤波方块图



(c)

图 7-14

于是(23)式可变换成下列联立一阶差分方程组。

$$\begin{cases} s_1(k) = as_1(k-1) + bs_2(k-1) + w_1(k-1) \\ s_2(k) = s_1(k-1) \end{cases} \tag{38}$$

$S_1(k)$、$S_2(k)$为两个状态变量。可把(38)式改写成二维矢量形式，设

$$\mathbf{S}(k) = \begin{pmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \end{pmatrix}$$

则 $$\mathbf{S}(k) = \begin{pmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(k-1) \\ s_2(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

或 $$\mathbf{S}(k) = \mathbf{AS}(k-1) + \mathbf{BW}(k-1) \tag{39}$$

其中 $$\mathbf{S}(k) = \begin{pmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}(k-1) = \begin{pmatrix} w_1(k-1) \\ w_2(k-1) \end{pmatrix} \tag{40}$$

从而可知任何离散动态系统可以表示成

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{AS}(k-1) + \mathbf{BW}(k-1) \tag{41}$$

其中 $\mathbf{S}(k)$为n维矢量，$\mathbf{A}$为 $n \times n$矩阵，$\mathbf{B}$为 $n \times p$ 矩阵，$\mathbf{W}(k)$为 p维矢量。(41) 式说明被估计的信号组服从一阶矢量差分方程，其中$\mathbf{W}(k)$为白噪声。

而在观测样本值中有信号和附加噪声，即

$$\eta(k) = \mathbf{CS}(k) + \nu(k)$$

$\eta(k)$是一组 q 个观测样本，即 $\eta(k)$是q维矢量，即在时刻k取得的 q个观测样本，$\nu(k)$是在观测时附加的噪声，$\mathbf{C}$为 $q \times n$ 矩阵。

假定$\mathbf{W}(k)$和$\boldsymbol{\nu}(k)$有下列性质：

$$E\{\mathbf{W}(k)\}=0$$

$$E\{\boldsymbol{\nu}(k)\}=0$$

$$E\{\mathbf{W}(k_1)\mathbf{W}'(k_2)\}=\mathbf{Q}\Delta(k_2-k_1)$$

$$E\{\boldsymbol{\nu}(k_1)\boldsymbol{\nu}'(k_2)\}=\mathbf{L}\Delta(k_2-k_1)$$

$$E\{\mathbf{W}(k_1)\boldsymbol{\nu}'(k_2)\}=0$$

其中$\mathbf{Q}$为$p\times p$正定矩阵，$\mathbf{L}$为$q\times q$正定矩阵，

$$\Delta(k_2-k_1)=\begin{cases}1 & (k_1=k_2)\\ 0 & (\text{其他情况})\end{cases}$$

现在的问题是要从观测样本$\eta(k)$中对$\mathbf{S}(k)$进行最佳估计（滤波问题）或对$\mathbf{S}(k+1)$进行最佳估计（一步预测，$\hat{s}(k+1/k)$），其模型就是（二）、（三）中讨论的对一阶自回归过程估值问题的推广，方法仍然是递归法，所采用的最佳准则仍然是最小均方误差准则。这类最佳线性估计问题就是所谓卡曼滤波问题。在经典方法中一个线性系统是用冲激响应或转移函数来描述的，而目前采用状态方程来描述它。卡曼滤波问题是用状态方法来研究的。卡曼滤波问题是60年代的一个发展。本课程的目的是研究随机信号和噪声的分析方法，估值问题只作为一个应用的例子，因此，在本课程中仅对递归问题作一些探讨。至于卡曼滤波以及其它检测估值问题将由其他课程研究。

习　　题

1．设有信号s，它是一随机变量，其均值为0，方差为σ_s^2，即$E\{s\}=0$，$E\{s^2\}=\sigma_s^2$。设观测信号时有附加噪声$n(t)$，它的样本值为n_i，且$n(t)$是均值为零的白噪声，即

$E\{n_i\}=0$, $E\{n_i n_j\}=0$, $i\neq j$, $E\{n_i^2\}=\sigma_n^2$, $i=1,2,\cdots$。于是得到的观测样本（即信号与附加白噪声样本之和）为

$$\eta_i = s + n_i \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

现利用 k 个观测值 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 的线性组合估计 s，即设估值为$\hat{s}=\sum_{i=1}^{k} a_i\eta_i$，若$\hat{s}$是它的最小均方误差估值，求各 a_i 之值，并求在最佳估值时的最小均方误差。

2. 设有实平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$。现考虑采用 $\xi(t)$、$\xi'(t)$、$\xi''(t)$的值对 $\xi(t+\lambda)$进行线性预测，其中 $\lambda>0$，即设 $\hat{\xi}(t+\lambda)=a_1\xi(t)+a_2\xi'(t)+a_3\xi''(t)$，为了获得最佳线性预测，求 a_1、a_2、a_3之值。若 λ 很小，求 a_1、a_2、a_3的近似值及最小均方误差。

3. 设有零均值的随机过程 s(t) 和 n(t) (s(t) 为信号，n(t) 为附加噪声)，即 $E\{s(t)\}=0$，$E\{n(t)\}=0$，$\eta(t)$ 为信号 s(t) 和附加噪声的混合，即 $\eta(t)=s(t)+n(t)$。试利用正交性原理及 $(-\infty,\infty)$ 范围内 $\eta(t)$的观测值对 $s'(t)=\frac{d}{dt}s(t)$ 进行最佳估值，即设计一网络（不符合因果性的），其冲激响应为$\hat{h}(t)$，使

$$\hat{s}'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\alpha)\hat{h}(\alpha)d\alpha$$

以满足 $E\{[s'(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\alpha)\hat{h}(\alpha)d\alpha]^2\}$为最小，证：(1) $\hat{h}(t)$应满足

$$R_{s'\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_\eta(\tau-\alpha)\hat{h}(\alpha)d\alpha$$

(2) $$\hat{H}(j\omega)=\frac{j\omega S_{s\eta}(\omega)}{S_\eta(\omega)}$$

4. 设有零均值、彼此不相关的随机过程 $s(t)$ 和 $n(t)$，设 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，$E\{s(t)\}=0$，$E\{n(t)\}=0$，且 $R_s(\tau)=e^{-|\tau|}$，$R_n(\tau)=e^{-3|\tau|}$，$R_{sn}(\tau)=0$，利用 $\eta(t)$ 在 $(-\infty,t)$ 内的观测值对 $s(t)$ 进行最佳估值，即求获得 $s(t)$ 的最佳滤波系统（该系统为可实现的）。

5. 设有随机信号 $S(t)$，其均值为零，相关函数为

$$R_s(\tau)=\frac{3}{2}e^{-|\tau|}+\frac{11}{3}e^{-3|\tau|}$$

现利用 $(-\infty,t)$ 内对 $s(t)$ 的观测值预测 $s(t+\lambda)$。求实现最佳预测的方法。如果选 $\lambda=\ln 2$，求最佳预测用的系统转移函数，画出其网络，并求其最小均方误差。

6. 设有按泊松分布出现的脉冲序列，单位时间内出现脉冲的平均次数为 μ，每一个脉冲的极性是正还是负是等概率的，每个脉冲的波形为

$$g(t)=\begin{cases}Ee^{-at} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

由这组脉冲序列组成了一个随机过程 $\xi(t)$。现利用 $(-\infty,t)$ 内对该信号的观测值预测 $\xi(t+\lambda)$，$\lambda>0$，求实现最佳预测的方法。

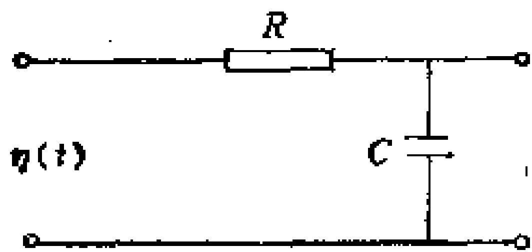
7. 有一RC网络如图题 7-7 所示。设 $\alpha=\frac{1}{RC}$，若网络的输入为

$$\eta(t)=s(t)+n(t)$$

其中 $s(t)$ 为信号

$$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$$

A代表振幅，是一个常数，ω_0 代表角频率，也是一个常



图题 7-7

数，θ代表相角，它是均匀分布于$[0,2\pi]$间的随机变量。

$n(t)$是零均值的白噪声，其功率密度为

$$S_n(f)=N_0\text{（瓦/赫）}。$$

试计算（1）信号的输入功率密度；

（2）信号的输入功率；

（3）信号的输出功率；

（4）噪声的输出功率；

（5）求输出信杂比。

8. 设有信号$s(t)$、噪声$n(t)$为相互统计独立的零均值的平稳高斯过程，信号$s(t)$的自相关函数为

$$R_{ss}(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\quad(-\infty<\tau<\infty,\alpha>0)$$

噪声为白噪声，即

$$R_{nn}(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

现把信号和噪声之和$\eta(t)=s(t)+n(t)$送进一不具有因果性的滤波器$h(t)$，使$\eta(t)$经滤波器后的输出为$\hat{s}(t)$。$\hat{s}(t)$作为信号$s(t)$的最小均方误差估值，即使$E\{[s(t)-\hat{s}(t)]^2\}$为最小。现要求

$$P\{|\hat{s}(t)-s(t)|\geqslant 0.1\}\leqslant 0.1$$

问αN_0应如何选择才能满足上述概率的要求。

9. 设有离散信号的模型

$$s(k+1)=\Phi s(k)+\Gamma w(k)$$

其中$s(1)$为高斯随机变量，均值为m_0，方差为P_0。Φ、Γ均为已知常数，$w(k)$，$k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为σ_w^2。

观测过程为

$$\eta(k)=s(k)+n(k)\qquad(k=1,2,\cdots)$$

$n(k)$，$k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为σ_n^2。$n(k)$和$w(l)$是相互统计独立的。

（1）观测$\eta(1)$以估计$s(1)$

则，求$f_{s(1)/\eta(1)}(s_1/\eta_1)$；

（2）证明$s(1)$的最佳估值

$$\hat{s}(1)=m_0+P_1\frac{1}{\sigma_n^2}(\eta_1-m_0)$$

其中P_1是均方误差，它满足方程式

$$P_1^{-1}=P_0^{-1}+\frac{1}{\sigma_n^2}$$

（3）观测$\eta(2)$后以估计$s(2)$，即利用$\eta(1)$、$\eta(2)$两个观测值，证明

$$f_{s(2)/\eta(1)\eta(2)}(s_2/\eta_1\eta_2)$$

$$=\frac{f_{\eta(2)/s(2)\eta(1)}(\eta_2/s_2\eta_1)f_{s(2)/\eta(1)}(s_2/\eta_1)}{f_{\eta(2)/\eta(1)}(\eta_2/\eta_1)}$$

（4）当给定$\eta(1)$时，$s(2)$是一高斯随机变量，其均值为$\Phi\hat{S}(1)$，方差为M_2

$$M_2=\Phi P_1\Phi+\Gamma\sigma_w^2\Gamma=\Phi^2P_1+\Gamma^2\sigma_w^2$$

（5）证明$\hat{s}(2)=\Phi\hat{s}(1)+P_2\frac{1}{\sigma_n^2}(\eta_2-\Phi\hat{s}(1))$

其中 $$P_2^{-1}=M_2^{-1}+\frac{1}{\sigma_n^2}$$

P_2是均方误差 $$P_2=E\{[s(2)-\hat{s}(2)]^2\}$$

（6）利用数学归纳法求$\hat{s}(k)$和P_k，以$\hat{s}(k-1)$和M_k表示之。$\hat{s}(k)$代表$s(k)$的最佳估值，P_k代表k次最佳估值时的最小均方误差。

10．设有信号s(t)

$$s(t)=\begin{cases}\frac{1}{RC}e^{\frac{t-t_0}{RC}} & (t\leqslant t_0)\\ 0 & (t>t_0)\end{cases}$$

在观测时，信号中混有白噪声，即$\eta(t)=s(t)+n(t)$，$n(t)$为白噪声，其功率密度为N_0，均值为零，$\eta(t)$代表观测值。求在$t=t_0$处获得最大输出信杂比的匹配滤波器，并画出匹配滤波器输出信号的波形。

11．设有一高频脉冲信号s(t)，其包络为一方波，脉冲宽度为τ_0载频为$f_0\left(T_0=\frac{1}{f_0}\right)$。为了处理方便，设$\frac{\tau_0}{T_0}=m$，m为整数，脉冲幅度为1。在观测信号时，若观测到的高频脉冲中混有附加噪声，即

$$\eta(t)=s(t)+n(t)$$

若$n(t)$为均值为零的白噪声，功率密度为N_0，求在$t=\tau_0$处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。

12．设有一高频脉冲串，每一个高频脉冲的参数与题11所给定的参数相同，脉冲串共有n个脉冲。若在该高频脉冲串中混有白噪声$n(t)$，即观测到的是

$$\eta(t)=s(t)+n(t)$$

$s(t)$代表脉冲串，$n(t)$为零均值的白噪声，功率密度为N_0，求在$t=t_0=(n-1)T+\tau_0$处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。其中T代表脉冲的重复周期。

13．推导最佳一步预测器中的递推公式(31)、(32)、(33)、(35)。

附录 I． 特征函数与母函数

§1 一元随机变量的特征函数

由于（1）数字特征只能描述随机变量的部分特性，（2）并不是一切随机变量都存在数学期望和方差，（3）用随机变量的分布求多个随机变量之和的分布是十分繁杂的，因此需要寻求一种表征量，一方面它能唯一地决定随机变量的分布函数（或概率密度），另一方面对于求独立随机变量之和的分布函数（概率密度）具有简单的运算方法。为此，这里介绍特征函数。

（一） 定义

设随机变量 ξ 的分布函数为 F(x)，称 $\exp\{jt\xi\}$ 的数学期望为 ξ 的特征函数，用 $\Phi(t)$ 表示之，即

$$\Phi(t) = E\{e^{jt\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF(x) \qquad (1)$$

其中 $e^{jt\xi} = \eta + j\zeta$ 是一个复随机变量。

从（1）式可知，$\Phi(t)$ 是一个实变量 t 的复值函数。

因 $|\Phi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{jtx} \right| dF(x)$

由于 $|e^{jtx}| = 1$，所以 $\Phi(t)$ 对一切实数 t 都有定义。

显然，特征函数只与分布函数有关，因此 $\Phi(t)$ 也称为某一分布函数 F(x) 的特征函数。

对于离散随机变量，若其分布律为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

则根据（1）式，其特征函数为

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{jtx_k} p_k \tag{2}$$

对于连续随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则根据（1）式，其特征函数为

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx \tag{3}$$

（3）式说明特征函数为概率密度 $f(x)$ 的付氏变换。付氏分析在许多数学分支中起着重要的作用，同样，它在概率论中也起着重要的作用。

（二） 特征函数的一些性质

性质一 $\Phi(0)=1$，$|\Phi(t)|\leqslant\Phi(0)$，$\Phi(-t)=\overline{\Phi(t)}$

证 $\Phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j0} dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)=1$

$$|\Phi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF(x)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{jtx}|\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)=1=\Phi(0)$$

$$\Phi(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jtx} dF(x)$$

$$=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF(x)}=\overline{\Phi(t)}$$

性质二 特征函数在 $(-\infty,\ \infty)$ 上一致连续。

证 因 $|\Phi(t+h)-\Phi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t+h)x} dF(x)\right.$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF(x)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{jhx}-1)e^{jtx}dF(x)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$|e^{jhx}-1|\left|e^{jtx}\right|dF(x)$$

所以 $|\Phi(t+h)-\Phi(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{jhx}-1|dF(x)$

$$\leqslant 2\int_{|x|\geqslant A}dF(x)+\int_{-A}^{A}|e^{jhx}-1|dF(x)$$

$$=2\int_{|x|\geqslant A}dF(x)+2\int_{-A}^{A}\sin\frac{hx}{2}dF(x) \qquad (4)$$

(4)式右边已与 t 无关。选足够大的 A，使$\int_{|x|\geqslant A}dF(x)$任意小，即给定任意 ε，选 A 使

$$\int_{|x|\geqslant A}dF(x)<\frac{\varepsilon}{4}$$

同时，再选取 $\delta>0$，使当 $|h|<\delta$ 时（即选 h 足够小），对一切 $x\epsilon[-A, A]$均有

$$\left|2\sin\frac{hx}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

则 $|\Phi(t+h)-\Phi(t)|\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{-A}^{A}dF(x)<\varepsilon$

即 $\Phi(t)$在$(-\infty, \infty)$上一致连续。

性质三 设有随机变量 ξ、η，$\eta=a\xi+b$，其中 a、b 均为常数，又设 $\Phi_\xi(t)$、$\Phi_\eta(t)$分别表示随机变量 ξ、η 的特征函数，则有

$$\Phi_\eta(t)=e^{jbt}\Phi_\xi(at)$$

证 $\Phi_\eta(t)=E\{e^{j\eta t}\}=E\{e^{j(a\xi+b)t}\}$

$$=e^{jbt}E\{e^{jat\xi}\}=e^{jbt}\Phi_\xi(at)$$

性质四　两个相互统计独立的随机变量之和的特征函数等于各个特征函数之积。

证　设ξ_1和ξ_2是两个相互统计独立的随机变量，而随机变量$\eta=\xi_1+\xi_2$。由ξ_1和ξ_2的统计独立性可知复随机变量$e^{jt\xi_1}$和$e^{jt\xi_2}$也是相互统计独立的，因此

$$E\{e^{jt\eta}\}=E\{e^{jt(\xi_1+\xi_2)}\}=E\{e^{jt\xi_1}\}\cdot E\{e^{jt\xi_2}\}$$

性质四可以推广到n个统计独立随机变量之和的场合，和的特征函数可由各特征函数相乘得到。由于这一性质，概率论中许多涉及到相互统计独立随机变量之和的问题都可利用特征函数作为一种有力的工具加以解决。中心极限定理的证明也要用到特征函数。

性质五　设随机变量ξ有n阶绝对矩存在，则它的特征函数可求导n次，且当$k\leqslant n$时，

$$\Phi^{(k)}(0)=j^kE\{\xi^k\}$$

证　$$\left|\frac{d^k}{dt^k}(e^{jtx})\right|=|j^kx^ke^{jtx}|=|x|^k$$

由于ξ的n阶绝对矩存在，则当$k\leqslant n$时，ξ的k阶绝对矩也必然存在，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^kdF(x)<\infty$$

而　$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^k}{dt^k}(e^{jtx})dF(x)\right|=\left|j^k\int_{-\infty}^{\infty}x^ke^{jtx}dF(x)\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x|^kdF(x)<\infty$$

因此下式中的积分与微分的次序可以相互交换

$$\Phi^{(k)}(t)=\frac{d_k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} e^{jtx} dF(x) = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{jtx} dF(x)$$

由此可知$\Phi^{(k)}(t)$是存在的，即特征函数可以求导k次($k \leqslant n$)。而

$$\Phi^{(k)}(0) = j^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0} x^k dF(x) = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$$

$$= j^k E\{\xi^k\}$$

利用性质五可以从特征函数求随机变量ξ的k阶原点矩。

性质六 对于任意的正整数n，任意实数t_1、t_2、…、t_n以及任意复数λ_1、λ_2、…、λ_n，下式

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_k - t_i) \lambda_k \overline{\lambda_i} \geqslant 0$$

必成立。

证 $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_k - t_i) \lambda_k \overline{\lambda_i}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_k - t_i)x} dF(x) \right] \lambda_k \overline{\lambda_i}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} e^{j(t_k - t_i)x} \lambda_k \overline{\lambda_i} \right] dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} e^{jt_k x} \lambda_k \right] \left[\sum_{i=1}^{n} e^{-jt_i x} \overline{\lambda_i} \right] dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} e^{jt_k x} \lambda_k \right|^2 dF(x) \geqslant 0 \qquad (5)$$

这一性质称为特征函数的非负定性，是特征函数最本质的性质。

（三）例

1. 伯努利分布的特征函数

$$\Phi(t)=E\{e^{jt\xi}\}=e^{jt\cdot 1}p+e^{jt\cdot 0}q$$

$$=q+pe^{jt}$$

2. 二项式分布 $b(k;\ n,\ p)$的特征函数

$$\Phi(t)=(q+pe^{jt})^n$$

3. 泊松分布 $p(k;\ \lambda)=p\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$,
$k=0,\ 1,\ \cdots,\ \lambda>0$ 的特征函数

$$\Phi(t)=E\{e^{jt\xi}\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{jt})^k}{k!}=e^{\lambda(e^{jt}-1)}$$

4. 正态分布$N(a,\ \sigma^2)$的特征函数（a为数学期望，σ^2为方差）

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=e^{jat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-jt\sigma}^{\infty-jt\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

（利用围道积分）

$$=\exp\left\{jat-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\exp\left\{jat-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$$

5. 设随机变量ξ在$[-a,\ a]$上均匀分布，则其特征函数为

$$\Phi(t)=\int_{-a}^{a}e^{jtx}\frac{1}{2a}dx=\frac{\sin at}{at}$$

6. 利用泊松分布的特征函数求泊松分布随机变量的数学期望和方差：

$$\Phi(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)}$$

$$\Phi'(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)}\cdot\lambda e^{jt}\cdot j$$

$$\Phi''(t)=-(e^{\lambda(e^{jt}-1)})[\lambda^2e^{2jt}+\lambda e^{jt}]$$

$$E\{\xi\}=\frac{1}{j}\Phi'(t)\big|_{t=0}=\lambda$$

$$E\{\xi^2\}=-\Phi''(t)\big|_{t=0}=\lambda^2+\lambda$$

$$D\xi=E\{\xi^2\}-[E\{\xi\}]^2=\lambda$$

（四） 逆转公式

上面已经说明可以从随机变量的分布函数求得它的特征函数。现在的问题是能否从特征函数确定其相应的分布函数。

设随机变量 ξ 的特征函数和分布函数分别为 $\phi(t)$ 和 $F(x)$，又设 x_1 和 x_2 是 $F(x)$ 的连续点，则

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jtx_1}-e^{-jtx_2}}{jt}\phi(t)dt \qquad (6)$$

（6）式称为逆转公式。

证 不妨假定 $x_1<x_2$。令

$$I_T=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jtx_1}-e^{-jtx_2}}{jt}\phi(t)dt$$

因 $$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jtx}dF(x)$$

则 $$I_T=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jt(x-x_1)}-e^{jt(x-x_2)}}{jt}dF(x)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{jt(x-x_1)}-e^{jt(x-x_2)}}{jt}dtdF(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{T}\frac{e^{jt(x-x_1)}-e^{-jt(x-x_1)}-e^{jt(x-x_2)}+e^{-jt(x-x_2)}}{jt}$$

$$dtdF(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{T}\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]dtdF(x)$$

从数学分析可知，对于任意的α和T，有

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha T}\frac{\sin u}{u}du\right|<K$$

当$T\to\infty$时，对于$\alpha\geqslant\delta>0$或$\alpha\leqslant-\delta<0$一致地有

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=\begin{cases}\frac{1}{2} & (\alpha>0)\\ 0 & (\alpha=0)\\ -\frac{1}{2} & (\alpha<0)\end{cases}$$

选δ足够小，使$x_1+\delta<x_2-\delta$，把I_T的积分区间分成五个部分（见图 I-1）。设

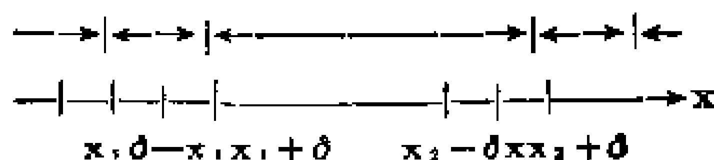


图 I-1

$$\Psi(T, x; x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]dt$$

则 $$I_T=\int_{-\infty}^{x_1-\delta}+\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}+\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta}+\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta}+\int_{x_2+\delta}^{\infty}$$

$$\cdot\Psi(T, x; x_1, x_2)dF(x)$$

当$T\to\infty$时，对x一致地有

$$\Psi(T,\ x;\ x_1,\ x_2)\to\begin{cases}0 & (x\leqslant x_1-\delta\text{ 或 }x\geqslant x_2+\delta)\\ 1 & (x_1+\delta\leqslant x\leqslant x_2-\delta)\end{cases}$$

而当 $x_1-\delta\leqslant x\leqslant x_1+\delta$，$x_2-\delta\leqslant x\leqslant x_2+\delta$ 时

$$|\Psi(T,\ x;\ x_1,\ x_2)|\leqslant 2K$$

综合以上各点可知，对于任意的 $\delta>0$ 有

$$\lim_{T\to\infty}I_T=F(x_2-\delta)-F(x_1+\delta)+R(\delta,\ x_1,\ x_2)$$

其中 $|R(\delta,\ x_1,\ x_2)|\leqslant 2K[F(x_1+\delta)-F(x_1-\delta)$

$$+F(x_2+\delta)-F(x_2-\delta)]$$

上式中左端与 δ 无关，由于 x_1、x_2 是 $F(x)$ 的连续点，当 $\delta\to 0$ 时右端的极限为 $F(x_2)-F(x_1)$。（6）式得证。

应用（6）式，在 $F(x)$ 的每一连续点 x 上有

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jty}-e^{-jtx}}{jt}\varphi(t)dt \quad (7)$$

（7）式中 y 沿着 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$，由此可知，分布函数 $F(x)$ 被它的连续点上的值唯一决定。因此，分布函数由其特征函数唯一确定，这就是唯一性定理。

（五） 若 $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$，则相应的分布函数 $F(x)$ 的导数存在并连续，而且

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jtx}\varphi(t)dt \quad (8)$$

证 若 $x-\delta$、$x+\delta$、是 $F(x)$ 的连续点，根据式（6）

$$F(x+\delta)-F(x-\delta)=\frac{1}{2\pi}$$

$$\cdot\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jt(x-\delta)}-e^{-jt(x+\delta)}}{jt}\varphi(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-jtx}(e^{jt\delta} - e^{-jt\delta})}{jt} \Phi(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin\delta t}{t} e^{-jtx} \Phi(t)dt$$

$$\frac{F(x+\delta) - F(x-\delta)}{2\delta} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin\delta t}{\delta t} e^{-jtx} \Phi(t)dt$$

由于 $\left| \frac{\sin\delta t}{\delta t} e^{-jtx} \Phi(t) \right| \leqslant |\Phi(t)|$

根据条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| dt < \infty$，令 $\delta \to 0$，利用勒贝格控制收敛定理，得

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jtx} \Phi(t)dt$$

关于 $F'(x)$ 的连续性，可再次利用控制收敛定理证明。

因此，若 $\Phi(t)$ 满足绝对可积的条件，则概率密度 $f(x)$ 是特征函数 $\Phi(t)$ 的付氏反变换，而 $\Phi(t)$ 为 $f(x)$ 的付氏变换。

若随机变量 ξ_1 服从正态分布 $N(a_1, \sigma_1^2)$，则 ξ_1 的特征函数为 $\exp\{ja_1t - \frac{1}{2}\sigma_1^2t^2\}$。若随机变量 ξ_2 服从正态分布 $N(a_2, \sigma_2^2)$，则 ξ_2 的特征函数为 $\exp\{ja_2t - \frac{1}{2}\sigma_2^2t^2\}$。若 ξ_1、ξ_2 是相互统计独立的，且 $\eta = \xi_1 + \xi_2$，则随机变量 η 的特征函数为

$$\Phi_\eta(t) = \exp\{j(a_1 + a_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2\}$$

于是 η 也是正态分布的，$E\eta = a_1 + a_2$，$D\eta = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$。

同理，相互统计独立的泊松分布随机变量之和仍为泊松分布。

§2 多元随机变量（随机矢量）的特征函数

若多元随变机量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其概率密度为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，与一元随机变量相仿，可定义它的特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{j(x_1t_1+x_2t_2+\cdots\\&\quad+x_nt_n)dF(x_1, \cdots, x_n)\\&=E\{\exp[j(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots\\&\quad+t_n\xi_n)]\}\end{aligned} \qquad (1)$$

类似于一元的情况，可建立起n元特征函数的理论，其方法是完全一致的。下面仅叙述有关结论。

(一) 性质一 $\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 R^n 中一致连续，而且

$$|\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)|\leqslant\Phi(0, 0, \cdots, 0)=1$$

$$\Phi(-t_1, -t_2, \cdots, -t_n)=\overline{\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)}$$

(二) 性质二 设随机矢量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的特征函数为 $\Phi_\xi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，设 $\eta_1=\sigma_1\xi_1+a_1, \eta_2=\sigma_2\xi_2+a_2, \cdots \eta_n=\sigma_n\xi_n+a_n$，其中 a_i、σ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是实常数，则随机矢量 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的特征函数为

$$\exp\{j\sum_{i=1}^{n}a_it_i\}\Phi_\xi(\sigma_1t_1, \sigma_2t_2, \cdots, \sigma_nt_n)$$

(三) 性质三 若 $\Phi_\xi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是随机矢量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的特征函数，则 $\eta=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$ 的特

征函数为

$$\Phi_\eta(t)=E\{e^{jt\eta}\}=\Phi_\xi(a_1t,\ a_2t,\ \cdots,\ a_nt)$$

（四）性质四 如果矩 $E\{\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\}$ 存在，则

$$E\{\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\}$$

$$=(j)^{\left(-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

（五）性质五 若随机矢量（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）的特征函数为 Φ（t_1，t_2，…，t_n），则 k 维（$k<n$）随机矢量（ξ_1，ξ_2，…，ξ_k）的特征函数为

$$\Phi_{1,2,\cdots,k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,0,\cdots,0)$$

这是前 k 个分量的 k 维边际分布所对应的特征函数。对应于任意 k 个分量（ξ_{i_1}，ξ_{i_2}，…，ξ_{i_k}）的 k 维边际分布的特征函数，可以类似地得到。

（六） 逆转公式 如果 $\Phi(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 是随机矢量（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）的特征函数，而 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是它的分布函数，则

$$P\{a_k\leqslant\xi_k<b_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

$$=\lim_{\substack{T_i\to\infty\\ i=1,2,\cdots,n}}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-T_1}^{T_1}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-jt_ka_k}-e^{-jt_kb_k}}{jt_k}\Phi(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n$$

其中 a_k、$b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是任意实数。但必需满足（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）落在平行体

$$a_k\leqslant\xi_k<b_k\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

面上的概率为 0，否则，逆转公式不能成立。

（七） 唯一性定理 分布函数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 由其

特征函数唯一确定。

有了唯一性定理，可以进一步得到特征函数的另外二个性质。

（八）性质六 若 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数为 $\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，而 ξ_i 的特征函数为 $\Phi_{\xi_i}(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，则随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互统计独立的充要条件为 $\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\Phi_{\xi_1}(t_1)\Phi_{\xi_2}(t_2)\cdots\Phi_{\xi_n}(t_n)$

（九）性质七 若以 $\Phi_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)$、$\Phi_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 及 $\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 分别表示随机矢量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$、$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 及 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 的特征函数，则 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 和 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 相互统计独立的充要条件为：对一切实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 有

$$\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)=\Phi_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)\Phi_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$$

§3 母 函 数

（一） 整值随机变量与母函数的定义

在离散随机变量中，非负整数值随机变量（即取值为0，1，2，…的随机变量）占有重要的地位。如二项分布、几何分布、泊松分布等都是取非负整值的。在研究分析这类非负整值随机变量时，可以采用母函数法。

定义 若随机变量 ξ 取非负整值，其相应的分布律为

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots \\ p_0, & p_1, & p_2, & \cdots \end{pmatrix}$$

设 $$G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E\{s^k\}$$

则称　　$G(s)$为随机变量ξ的母函数。

事实上，如设 $s=e^{it}$，则

$$G(s)=G(e^{it})=E\{e^{itk}\}=\sum_{k=0}^{\infty}p_k e^{itk}=\phi(t)$$

所以母函数本质上就是特征函数，不过母函数在十九世纪初就被拉普拉斯引入，成为概率论中第一个被系统地应用的变换方法，它比较简单，在处理整值随机变量的场合很方便。

由于 $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$，由幂级数的收敛性知道$G(s)$至少在$|s|\leqslant 1$时一致收敛且绝对收敛。因此，母函数对任何整值随机变量都存在。

注　对于任一数列$\{a_n\}$，也可以定义 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n$为其母函数。但目前只讨论概率分布的母函数。

（二）计算举例

1. 二项分布

$$G(s)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}s^k=(q+ps)^n$$

2. 泊松分布

$$G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}s^k=e^{-\lambda}e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}$$

3. 几何分布

$$G(s)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}ps^k=ps\sum_{k=1}^{\infty}(qs)^{k-1}=\frac{ps}{1-qs}$$

（三）　母函数的性质

1. 唯一性

由概率分布及 $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ 所确定的母函数显然是唯一确定的。反之，由母函数也能唯一确定随机变量的概率分布。

设概率分布 $\{p_k\}$ 及 $\{q_k\}$ 分别具有母函数 $G(s)$ 及 $H(s)$，且 $G(s)=H(s)$，因 $G(s)$ 和 $H(s)$ 均为幂级数，且当 $|s|\leqslant 1$ 时该幂级数均收敛，对 $G(s)$ 和 $H(s)$ 求导 k 次，并令 $s=0$，则得

$$k!p_k=G^{(k)}(0)=H^{(k)}(0)=k!q_k$$

因此，$p_k=q_k$，$k=0, 1, 2, \cdots$，即两个概率分布相同。由此可知，概率分布和母函数是一一对应的。因而，研究非负整值随机变量的概率分布及其性质可以转化为对相应母函数的研究。母函数是幂级数，具有许多便于处理的性质，因此，母函数是研究整值随机变量的有效工具。

2. 母函数与数字特征

利用母函数可以求得相应概率分布的数字特征。若

$$G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

则

$$G'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$$

$$G''(s)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

上述两个级数至少在 $|s|<1$ 是收敛的。当随机变量 ξ 的数学期望存在时，即 $E\{\xi\}=\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ 存在时

$$G'(1)=G'(s)]_{s=1}=\sum_{k=1}^{\infty} k p_k=E\{\xi\}$$

若ξ不存在数学期望，即 $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \infty$，则 $\lim_{s\to 1} G'(s) = \infty$。

同理，当ξ的方差存在时

$$E\{\xi(\xi-1)\} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = G''(s)]_{s=1} = G''(1)$$

故　$D_\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$

于是得到了利用母函数求数学期望和方差的方法。

例一　求二项分布的数学期望和方差

解　二项分布的母函数为 $G(s) = (q+ps)^n$，故

$E\xi = G'(s)]_{s=1} = n(q+p)^{n-1} \cdot p = np$

$G''(s)]_{s=1} = n(n-1)(q+p)^{n-2}p^2 = n(n-1)p^2$

$D\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$

例二　求泊松分布的数学期望和方差

解　泊松分布的母函数为 $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$，故

$E\xi = G'(s)]_{s=1} = [e^{\lambda(s-1)} \cdot \lambda]_{s=1} = \lambda$

$[G''(s)]_{s=1} = [\lambda^2 e^{\lambda(s-1)}]_{s=1} = \lambda^2$

$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

3.　独立随机变量和的母函数

若ξ和η为两个相互统计独立的非负整值随机变量，其概率分布分别为$\{a_k\}$及$\{b_k\}$，相应的母函数分别为 $A(s)$ 及 $B(s)$，而随机变量$\zeta = \xi + \eta$，求ζ的概率分布。显然，ζ也是整值随机变量，若记 $G_r = P\{\zeta = r\}$，

则　$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \cdots + a_r b_0 = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}$

这就是离散卷积公式。

设 $C(s)$为随机变量ζ的母函数，$C(s) = \sum_{r=0}^{\infty} G_r s^r$。

利用母函数在$|s|<1$的一致收敛性和绝对收敛性进行下述运算：

$$A(s)B(s)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k\right)\left(\sum_{i=0}^{k}b_i s^i\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}a_k b_i s^{k+i}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{r}a_k b_{r-k}\right]s^r \qquad (设\ k+i=r)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}c_r s^r=C(s)$$

因此 $$C(s)=A(s)B(s)$$

即两个独立的非负整值随机变量之和的母函数是这两个相应母函数的乘积。由于母函数具有这样一个性质，在随机变量求和问题中采用母函数十分方便。

上述结果可以推广到n个相互统计独立的非负整值随机变量的求和问题中。若非负整值随机变量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n相互统计独立，它们的母函数分别用$G_1(s)$，$G_2(s)$，…，$G_n(s)$表示，则随机变量$\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$的母函数为

$$G_\eta(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$$

特别是当ξ_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是独立同分布的非负整值随机变量时$G_i(s)=G_1(s)$，则$G(s)=[G_1(s)]^n$。

例三 求二项分布的母函数

解 在贝努利试验中A事件出现的概率为p，用$\xi_i=1$代表A事件出现，则A事件不出现用$\xi_i=0$表示，其概率为$q=1-p$。于是得到一随机序列$\{\xi_i\}$，该序列中的随机变量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n是相互统计独立的同分布的。设$\eta=\xi_1+$

$\xi_2+\cdots+\xi_n$，则 η 服从二项分布。

ξ_i 的母函数为 $G_i(s)=ps+q$，故 η 的母函数为 $G_\eta(s)=(ps+q)^n$，该结果与直接计算所得相同。

例四 五颗骰子任意投掷，问总数为 15 的概率为何？

解 投掷每颗骰子可出现1、2、3、4、5、6六种可能，它们的出现概率均为 $\frac{1}{6}$。出现某数 ξ_i 是一随机变量，其相应的母函数为 $\frac{1}{6}(s^1+s^2+\cdots+s^6)=\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}$。

一次投掷五颗骰子时，每颗骰子出现的数是相互统计独立的随机变量，$\{\xi_i,\ i=1,2,3,4,5\}$。五颗骰子出现数的总和为

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5$$

因此 η 的母函数为

$$G_\eta(s)=\left[\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}\right]^5$$

展开 $G_\eta(s)$ 得

$$G_\eta(s)=\frac{1}{6^5}s^5(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$$

$$=\frac{1}{6^5}s^5\left[1-\binom{5}{1}s^6+\binom{5}{2}s^{12}-\cdots-s^{30}\right]\left[1+5s+\frac{5.6}{1.2}s^2+\cdots+\frac{5\cdot6\cdot\cdots\cdot(5+k-1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot k}s^k+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{6^5}s^5\left[1-\binom{5}{1}s^6+\binom{5}{2}s^{12}-\cdots-s^{30}\right]\left[1+5s+\cdots+\binom{k+4}{k}s^k+\cdots\right]$$

在 $G_\eta(s)$ 展开式中取 s^{15} 的系数，得

$$P\{\eta=15\}=\frac{1}{6^5}\left[\binom{14}{10}\times 1-\binom{5}{1}\binom{8}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{6^5}\left[\frac{14\times 13\times 12\times 11}{1\times 2\times 3\times 4}-5\frac{8\times 7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3\times 4}\right]$$

$$=\frac{651}{6^5}=0.084$$

通过例四可知，利用母函数解决一些古典概率中的问题是很方便的。

（四） 随机个独立同分布非负整值随机变量之和的母函数

若 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，…是一串相互统计独立具有相同概率分布的非负整值随机变量，$P\{\xi_1=k\}=f_k$，其母函数为 $F(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k s^k$，又若 ν 是正整数的随机变量，$P\{\nu=n\}=g_n$，其母函数为 $G(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n s^n$ 且 ν 和 $\{\xi_i\}$ 相互统计独立。定义 $\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\eta_\nu$，$\eta$ 是随机个独立同分布非负整值随机变量之和，求 η 的母函数及其特征数字。

记 $P\{\eta=r\}=h_r$，利用全概率公式及 $\{\xi_i\}$、ν 相互统计独立，则

$$h_r=P\{\eta=r\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\nu=n\}P\{\eta=r/\nu=n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\nu=n\}P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\nu=r/\nu=n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\nu=n\}P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=r\}$$

由于$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$为n个相互统计独立同分布非负整值随机变量之和，故其母函数为

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=r\}s^r=[F(s)]^n$$

而η的母函数为$H(s)=\sum_{r=0}^{\infty} h_r s^r$

$$\text{则}\ H(s)=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu=n\}P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=r\}\right]s^r$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu=n\}\left[\sum_{r=0}^{\infty} P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=r\}s^r\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu=n\}[F(s)]^n$$

$$=G[F(s)]$$

因此，随机个相互统计独立同分布非负整值随机变量之和的母函数是原来两个母函数的复合。

由此 $$H'(s)=G'[F(s)]F'(s)$$

当$E\xi_i$和$E\nu$存在时，在上式中令$s=1$，得

$$E\eta=[H'(s)]_{s=1}=G'(1)F'(1)=(E\nu)(E\xi_i)$$

又 $$H''(s)=G''[F(s)][F'(s)]^2+G'[F(s)]F''(s)$$

令$s=1$，得 $$H''(1)=G''(1)[F'(1)]^2+G'(1)F''(1)$$

$$\begin{aligned}D\eta&=H''(1)+H'(1)-[H'(1)]^2\\&=G''(1)[F'(1)]^2+G'(1)F''(1)+G'(1)F'(1)\\&\qquad-[G'(1)]^2[F'(1)]^2\\&=[F'(1)]^2\{G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2\}\\&\quad+G'(1)\{F''(1)+F'(1)-[F'(1)]^2\}\\&=(E\xi_i)^2(D\nu)+(E\nu)(D\xi_i)\end{aligned}$$

例五 在上述讨论中，若ν服从参数为λ的泊松分布，

ξ_i的母函数为F(s)，求$\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\nu$的母函数表示式。

解 因$G(s)=e^{\lambda(s-1)}$，则η的母函数为

$$H(s)=\exp\{\lambda[F(s)-1]\}$$

具有这种形式的母函数称为复合泊松分布的母函数，η服从复合泊松分布。

特别是，当$F(s)=q+ps$时，则$H(s)=e^{\lambda p(s-1)}$，这说明η仍服从泊松分布。

附录II. 系统的状态方程求解方法

（一） 设$\mathbf{x}(t)$为n维矢量并满足

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \qquad (t_0\text{为起始时间})\end{cases} \tag{1}$$

(1)式代表在零激励时系统的状态方程，$\mathbf{A}(t)$是$n\times n$矩阵，$\mathbf{x}(t)$为状态矢量，$\mathbf{x}(t)$连续可导。

(1)式的解为

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{2,a}$$

而

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I}\end{cases} \tag{2,b}$$

将(2)式代入(1)式，就可验证(2)式确是(1)式的解。满足特定条件的微分方程的解是唯一的。

(2)式中的$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$称为状态转移矩阵。

（二） 状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$的两个重要性质

设t_1、t_2为两个不同时刻t_1、$t_2\geqslant t_0$，则根据(2)式

$$\mathbf{x}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{3}$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\boldsymbol{\phi}(t_1,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{4}$$

如果(1)式所代表的微分方程的起始条件为$t=t_1$，其初值为

$\mathbf{x}(t_1)$，则

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

因此 $$\mathbf{x}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2,t_1)\mathbf{x}(t_1) \tag{5}$$

（4）式代入（5）式得

$$\mathbf{x}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{6}$$

比较（3）式与（6）式得

$$\boldsymbol{\phi}(t_2,t_0)=\boldsymbol{\phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1,t_0) \tag{7}$$

在（7）式中令 $t_2=t_0$，则

$$\boldsymbol{\phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I}=\boldsymbol{\phi}(t_0,t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1,t_0)$$

或 $$[\boldsymbol{\phi}(t_1,t_0)]^{-1}=\boldsymbol{\phi}(t_0,t_1) \tag{8}$$

（7）、（8）两式是状态转移矩阵的两个重要特性。

（三） 计算举例

例一 设 $\dot{x}(t)=2x(t)$，$x(t_0)=x_0$，试利用状态转移矩阵求该方程的解。

解 此例中的 $\phi(t,t_0)$满足下列方程

$$\dot{\phi}(t,t_0)=2\phi(t,t_0)$$

$$\phi(t_0,t_0)=1$$

即 $$\phi(t,t_0)=e^{2(t-t_0)}$$

故 $$x(t)=\phi(t,t_0)x_0=x_0e^{2(t-t_0)}$$

例二 设 $\dot{x}(t)=a(t)x(t)$，$x(t_0)=x_0$，试利用状态转移矩阵求该方程的解。

解 此例中的 $\phi(t,t_0)$应该满足下列方程

$$\dot{\phi}(t,t_0)=a(t)\phi(t,t_0)$$

$$\phi(t_0,t_0)=1$$

即 $$\frac{\dot{\phi}(t,t_0)}{\phi(t,t_0)}=a(t)$$

因此 $$\phi(t,t_0)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right\}$$

或 $$x(t)=x_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right\}$$

例三 设有方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}$$

试求解之。

解 因 $\dot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{A}\mathbf{x}(t)=0$

其中 $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

故 $$e^{-\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}(0)$$

利用哈密尔顿-凯莱定理展开 $e^{\mathbf{A}t}$：

A 的特征方程为

$$|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ 0 & \alpha+2\end{vmatrix}=\alpha(\alpha+2)=0$$

A 的特征根为 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=-2$。设

$$e^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}$$

$\alpha=0$ 时 $\quad e^0=1=c_0+c_1\cdot 0$

$\alpha=-2$ 时 $\quad e^{-2t}=c_0+c_1(-2)$

所以 $$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

故 $$e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$$

故 $$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$$

(四) 系统具有激励时状态方程的解

考虑下列最一般的时变微分方程：

设状态方程为 $$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{9}$$

输出方程为 $$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

且其起始条件为 $$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

(9)式中 $\mathbf{x}(t)$ 为状态变量组成的列矩阵，$\mathbf{u}(t)$为系统输入端的激励（列矩阵），$\mathbf{y}(t)$为输出（列矩阵），$\mathbf{A}(t)$、$\mathbf{B}(t)$、$\mathbf{C}(t)$、$\mathbf{D}(t)$为系统的参数矩阵。其解的形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\boldsymbol{\phi}^{-1}(\lambda,t_0)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{u}(\lambda)d\lambda\\&=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\lambda)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{u}(\lambda)d\lambda\end{aligned} \tag{10}$$

为了证明(10)式，设

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{z}(t) \tag{11}$$

或 $$\mathbf{z}(t)=\boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{x}(t)$$

对(11)式求导得

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)\mathbf{z}(t)+\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\dot{\mathbf{z}}(t) \tag{12}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)\mathbf{z}(t)+\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{13}$$

根据(26)式

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)\mathbf{z}(t)=\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{z}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

于是 $$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

或 $$\dot{\mathbf{z}}(t)=\boldsymbol{\phi}^{-1}(t,t_0)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{14}$$

对(14)式积分得

$$z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(\lambda,t_0)B(\lambda)u(\lambda)d\lambda \qquad (15)$$

从(11)式　$z(t_0)=\phi^{-1}(t_0,t_0)x(t_0)=x(t_0)$

故 $x(t)=\phi(t,t_0)z(t)$

$$=\phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,t_0)\phi^{-1}(\lambda,t_0)B(\lambda)u(\lambda)\,d\lambda$$

$$=\phi(t,t_0)\,x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,\lambda)B(\lambda)u(\lambda)d\lambda \qquad (16)$$

根据(9)式，系统的输出为

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)$$

$$=C(t)\phi(t,t_0)x(t_0)+C(t)\int_{t_0}^{t}\phi(t,\lambda)B(\lambda)u(\lambda)\,d\lambda + D(t)u(t) \qquad (17)$$

由此可知，为了求解(9)式，必需先解方程式(26)

$$\begin{cases}\dot{\phi}(t,t_0)=A(t)\phi(t,t_0)\\ \phi(t_0,t_0)=I\end{cases} \qquad (26)$$

当系统为时变系统，即 $A(t)$ 是时间的函数时，求解(26)并不容易。

（五）当系统为时不变系统时，即A、B、C、D均为常数矩阵时，求状态方程(9)的解。

这时(9)式可写成：

状态方程　$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

输出方程　$y(t)=Cx(t)+Du(t)$　　　(18)

起始条件　$x(t_0)=x_0$

根据（四），首先要求解

$$\begin{cases}\dot{\phi}(t,t_0)=A\phi(t,t_0)\\ \phi(t_0,t_0)=I\end{cases}$$

定义：$\exp(At)=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{A^nt^n}{n!}+\cdots$ (19)

则 $\phi(t,t_0)=\exp\{A(t-t_0)\}$ (20)

这是因为$\frac{d}{dt}\phi(t,t_0)=\frac{d}{dt}\exp\{A(t-t_0)\}$

$$=A+A^2(t-t_0)+\frac{A^3}{2!}(t-t_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{A^n}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}+\cdots$$

$$=A\exp\{A(t-t_0)\}=A\phi(t,t_0)$$

且 $\exp\{A(t_0-t_0)\}=I=\phi(t_0,t_0)$

得到了$\phi(t,t_0)$的表示式后，利用(16)、(17)式就可以得到(18)式的解。

例四 设状态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)$$

其起始条件为$x(0)=x_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$u(t)$为阶跃函数，求解此方程。

解： 本例中 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

先求状态转移矩阵。A 矩阵的特征方程式为

$$|\alpha I-A|=\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1\\ -1 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha+1)^2+1=\alpha^2+2\alpha+2=0$$

A 的特征值为$\alpha_1=-1-j$，$\alpha_2=-1+j$，设

$$e^{At}=c_0I+c_1A$$

则 $e^{-(t+jt)}=c_0+c_1(-1-j)$

$$e^{-(1-j)t} = c_0 + c_1(-1+j)$$

$$c_1 = e^{-t}\sin t$$

$$c_0 = e^{-t}(\sin t + \cos t)$$

因此 $e^{At} = e^{-t}(\sin t + \cos t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\sin t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = \exp\{\mathbf{A}(t-t_0)\}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)}\cos(t-t_0) & -e^{-(t-t_0)}\sin(t-t_0) \\ e^{-(t-t_0)}\sin(t-t_0) & e^{-(t-t_0)}\cos(t-t_0) \end{pmatrix}$$

由(16)式知

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-\lambda)}\cos(t-\lambda) & -e^{-(t-\lambda)}\sin(t-\lambda) \\ e^{-(t-\lambda)}\sin(t-\lambda) & e^{-(t-\lambda)}\cos(t-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-v}\cos v \\ e^{-v}\sin v \end{pmatrix} dv$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) \end{pmatrix} \qquad (t>0)$$

（六）用拉氏变换法求解方程式（18）

状态方程为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ **(21)**

在起始条件中令 $t_0 = 0$，即 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$，设

$$\mathscr{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{X}(s), \qquad \mathscr{L}\{\mathbf{u}(t)\} = \mathbf{U}(s)$$

则 $\mathscr{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0$

对(21)式两边取拉氏变换，得

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{22}$$

对(22)式取拉氏反变换即可得 $\mathbf{x}(t)$ 的表示式。比较(22)、(16)、(20)式知

$$\mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}=\exp\{\mathbf{A}t\}$$

$$\mathbf{x}(t)=\exp\{\mathbf{A}t\}\mathbf{x}_0+\mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\}*\mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{U}(s)\}$$

例五 用拉氏变换法求解例四中的状态方程。

解： $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix}$$

所以 $\mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}=\exp\{\mathbf{A}t\}$

$$=\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

因 $u(t)$ 为阶跃函数，故 $\mathbf{U}(s)=\frac{1}{s}$。从(22)式知

$$\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s[(s+1)^2+1]} \\ \dfrac{1}{s[(s+1)^2+1]} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]\\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]\end{pmatrix}$$

于是 $$x(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}[1+e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t]\\ \frac{1}{2}[1-e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t]\end{pmatrix}\quad (t>0)$$

（七）线性离散时间动态系统的分析

设$\mathbf{U}(n)$为系统的输入，它是一离散的时间序列，$\mathbf{X}(n)$为系统的状态变量，则状态方程可表示为

$$\mathbf{X}(n+1)=\mathbf{a}(n)\mathbf{X}(n)+\mathbf{b}(n)\mathbf{U}(n)\qquad(23)$$

起始条件为$n=n_0$时，$\mathbf{X}(n)=\mathbf{X}(n_0)$。式中$\mathbf{a}(n)$、$\mathbf{b}(n)$代表动态系统的参数矩阵。

采用递推法解(23)式：

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(n+1)&=\mathbf{a}(n)\mathbf{X}(n)+\mathbf{b}(n)\mathbf{U}(n)\\&=\mathbf{a}(n)[\mathbf{a}(n-1)\mathbf{X}(n-1)\\&\quad+\mathbf{b}(n-1)\mathbf{U}(n-1)]+\mathbf{b}(n)\mathbf{U}(n)\\&=\mathbf{a}(n)\mathbf{a}(n-1)\mathbf{X}(n-1)\\&\quad+\mathbf{a}(n)\mathbf{b}(n-1)\mathbf{U}(n-1)+\mathbf{b}(n)\mathbf{U}(n)\\&=\cdots\cdots\\&=\mathbf{a}(n)\mathbf{a}(n-1)\cdots\mathbf{a}(n_0)\mathbf{X}(n_0)\\&\quad+\mathbf{a}(n)\mathbf{a}(n-1)\cdots\mathbf{a}(n_0+1)\mathbf{b}(n_0)\mathbf{U}(n_0)\\&\quad+\mathbf{a}(n)\cdots\mathbf{a}(n_0+2)\mathbf{b}(n_0+1)\mathbf{U}(n_0+1)+\cdots\\&\quad+\mathbf{a}(n)\mathbf{b}(n-1)\mathbf{U}(n-1)+\mathbf{b}(n)\mathbf{U}(n)\end{aligned}$$

引入系统状态转移矩阵$\Phi(n,n_0)$，则

$$\Phi(n+1,n_0)\triangleq\mathbf{a}(n)\mathbf{a}(n-1)\cdots\mathbf{a}(n_0)\quad(0\leqslant n_0\leqslant n)$$

于是
$$\begin{cases}\Phi(n+1,n_0)=a(n)\Phi(n,n_0)\\ \Phi(n,n)=I\end{cases} \tag{24}$$

则
$$X(n)=\Phi(n,n_0)X(n_0)+\sum_{i=n_0}^{n-1}\Phi(n,i+1)b(i)U(i) \tag{25}$$

如果 $n_0=0$，则

$$X(n)=\Phi(n,0)X(0)+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(n,i+1)b(i)U(i) \tag{26}$$

如果动态系统为时不变系统，即 $a(n)$、$b(n)$ 均为常数矩阵，$a(n)=a$，$b(n)=b$，于是(25)式可写成

$$X(n)=a^{n-n_0}X(n_0)+\sum_{i=n_0}^{n-1}a^{n-1-i}bU(i) \tag{27}$$

(26)式可写成

$$X(n)=a^nX(0)+\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}bU(i) \tag{28}$$

例六 设有离散动态系统，它的状态方程可表示为

$$X(n+1)=\begin{pmatrix}x_1(n+1)\\ x_2(n+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(n)\\ x_2(n)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(n)\\ u_2(n)\end{pmatrix}$$
$$=aX(n)+bU(n)$$

即
$$a=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix},\quad X(n)=\begin{pmatrix}x_1(n)\\ x_2(n)\end{pmatrix}$$
$$b=\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix},\quad U(n)=\begin{pmatrix}u_1(n)\\ u_2(n)\end{pmatrix}$$

当系统的初始条件为零初始值，即 $n=0$ 时，$X(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，求 $X(n)$。

解 本例的主要问题是求状态转移矩阵

$$\Phi(n,0)=a^n$$

a 的特征方程为

$$|\alpha I-a|=\begin{pmatrix}\alpha+1 & -3\\ 2 & \alpha-4\end{pmatrix}=(\alpha-1)(\alpha-2)=0$$

于是 a 的特征值为 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=2$。可以利用哈密尔顿-凯莱定理展开 a^n，也可以用利用正交变换求 a^n。现采用后者。

特征值为 $\alpha_1=1$时的特征矢量为$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，特征值为 $\alpha_2=2$ 时的特征矢量为$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

于是得 a 的正交变换矩阵

$$U=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$U^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

故 $a=U\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}U^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$a^n=U\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}U^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-2^{n+1} & 3\cdot 2^n-3\\ 2-2^{n+1} & 3\cdot 2^n-2\end{pmatrix}$$

代入(28)式得

$$X(n)=\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}bU(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 3-2^{n-i} & 3\cdot 2^{n-1-i}-3 \\ 2-2^{n-i} & 3\cdot 2^{n-1-i}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} [(3-2^{n-i})11u_1(i) + (9\cdot 2^{n-i}-18)u_2(i)] \\ \sum_{i=0}^{n-1} [(2-2^{n-i})11u_1(i) + (9\cdot 2^{n-i}-12)u_2(i)] \end{pmatrix}$$

索　引

二　画

卜里耶模型	Polya model
卜里耶过程	Polya process
几何分布	geometrical distribution
二项分布	binomial distribution
二阶矩过程	second order process finite variance process

三　画

马尔可夫过程	Markov process
马尔可夫链	Markov chain
亏值	defect
三角形不等式	triangle inequality
广义谱分析	generalized spectral analysis

四　画

方差	variance
互相关函数，互关函数	cross correlation function
互协方差函数	cross covariance function
反射壁	reflecting barrier
不可约的	irreducible
计数过程	counting process
无限小转移率	infinitesimal transition rate
尤尔过程	Yule's process

巴塞伐等式　Parseval's equality

互谱密度　cross spectral density

预测　prediction

一步预测　one step prediction

匹配滤波器(见共轭滤波器)

matched filter

五　画

切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

Chapman-kolmogorov equation

母函数　generating function

艾伦菲斯特模型　Ehrenfest model

正交增量过程　orthogonal increment process

可达性　accessibility

可达的　accessible, reachable

正常返态　positive recurrent state

平稳分布　stationary distribution

平稳增量过程　stationary increment process

生灭过程　birth and death process

电话交换　telephone exchange

可靠性理论　reliability theory

平衡方程式　balance equation

平稳随机过程　stationary stochastic process

平稳过程　stationary process

正态分布　normal distribution

功率谱　power spectrum

功率谱密度，功率密度

power spectral density, spectral density,

白噪声　white noise

因果性　causality

因果性系统　causal system

可实现系统	realizable system
包络函数	envelop function
包络检波	envelop detection
正态过程	normal process
正定	positive definite
正态马尔可夫过程	Normal Markovian process
正态分布白噪声	white noise with normal distribution
正交性原理	orthogonality principle
可实现的最佳系统	optimum causal system optimum realizable system
卡曼滤波	Kalman filtering

六 画

协方差	covariance
协方差函数	covariance function
协方差矩阵	covariance matrix
自相关	auto-correlation
自协方差	auto-covariance
齐次马尔可夫链（时齐性马尔可夫链）	homogeneous Markov chain
吸收壁	absorbing barrier
吸收态	absorbing state
传递性	transitive
闭集	closed set
闭的	closed
吸收概率	absorbing probability
齐次马尔可夫过程（时齐性马尔可夫过程）	homogeneous Markov process
过滤的泊松过程	filtered poisson process
负二项分布	negative binomial distribution
许瓦兹不等式	Schwartz inequolity
各态历经性	ergodic property

动态系统	dynamic system
冲激函数	impulse function
冲激响应	impulse response
多元正态分布	multiple normal distribution
n-维正态分布	n-dimensional normal distribution
合流型超几何级数	confluent hypergeometric series
伊藤积分	Ito integral
回归	regression
过滤	filtering
共轭滤波器(见匹配滤波器)	conjugate filter
自回归过程	autoregressive process

七 画

伯努利过程	Bernoulli process
状态	state
连续参量	continuous parameter
连续参量随机过程	stochastic process with continuous parameter
连续随机序列	continuous random sequence
均值	mean value
均值函数	mean value function
状态空间	state space
状态传递图	state transition diagram
极限分布	limiting distribution
严平稳	stationary in strict sense
时间间隔分布	interarrival time distribution
纯增殖过程	pure birth process
状态传递速率图	state transition rate diagram
更新计数过程	renewal counting process
更新过程	renewal process
更新函数	renewal function
更新强度	renewal intensity

更新方程	renewal equation
纯灭过程	pure death process
均方极限	limit in mean square sense
均方收敛	mean square convergence
均方连续	mean square continuous
均方导数	mean square derivative
均方可导	mean square differentiability
均方积分	mean square integral
均方可积	mean square integrability
时间平均	time average
时间相关函数	time correlation function
肖特基公式	Schottky formula
时不变系统	time invariant system
状态变量	state variable
状态方程	state equation
希尔伯特变换	Hilbert transform
李不西兹条件	Lipchitz condition
估值理论	estimation theory
均方估值	mean square estimation
时变信号的递归估计	recursive estimation of time varying signal

八　画

泊松分布	Poisson distribution
转移概率	transition probability
一步转移概率	one step transition probability
转移概率矩阵，转移矩阵	matrix of transition probability
一步转移概率矩阵，一步转移矩阵	matrix of one step transition probability
非齐次马尔可夫链，非时齐性马尔可夫链	non-homogeneous Markov chain
周期的状态	periodic state

转移概率分布	transition probability distribution function
转移概率密度	transition probability density
泊松过程	Poisson process
到达时间条件分布	conditional distribution of the arrival times
非齐次泊松过程,非时齐性泊松过程	non-homogeneous Poisson process
线性的生灭过程	linear birth and death process
非负定	non-negative definite
周期性平稳随机过程	periodic stationary stochastic process
线性系统	linear system
卷积	convolution
转移函数，传递函数	transfer function
单位样值响应	unit sample response
抽样定理	sampling theorem
奇分量	singular component
规则分量	regular component
线性离散系统	linear discrete system
线性变换	linear transformation
非线性系统	non-linear system
线性估计	linear estimate

九　　画

标准差	standard deviation
相关函数	correlation function
复随机过程	complex stochastic process
独立增量过程	independent increment process
相通	communicate
复合泊松过程	compound Poisson Process
柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程	Kolmogorov-Feller forward equation
柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程	Kolmogorov-Feller backward equation

绝灭概率	probability of extinction
柯西准则	Cauchy criterion
洛夫准则	Loe've criterion
规范化维纳过程	Norma lized Wiener process
统计平均(见集平均)	statistical average
窄带随机过程	narrow band stochastic process
窄带信号	narrow band signal
窄带实平稳随机过程	narrow band real stationary stochastic process
独立性	independency

十 画

样本	sample
样本点	sample point
样本空间	sample space
样本函数(现实)	sample function, realization
离散参量离散型随机过程	discrete stochastic process with discrete parameter
离散参量连续型随机过程	continuous stochastic process with discrete parameter, continuous random sequence
矩	moment
宽平稳(随机过程),宽平稳(过程)	stationary stochastic process in wide sense, stationary in wide sense, wide sense stationary
离散分枝过程	discrete branch process
埃尔兰公式	Erlang formula
热噪声	thermal noise
泰勒展开(平稳随机过程)	Taylor's expansion of stationary stochastic process
能谱密度	energy spectral density

离散系统	discrete system
高斯过程(正态过程)	Gaussian process
高斯密度函数	Gaussian density function
n 维高斯密度函数	n-dimensional Gaussian density function
离散形式的维纳滤波	discrete form of Wiener filtering
递归线性均方估计	recursive linear mean square estimate
递归过程	recursive process
一阶递归过程	recursive process of first order.

十 一 画

常返态	recurrent state persistent state
特征函数	characteristic function
排队问题	queuing problem
辅助方程	subsidary equation auxilliary equation
维纳过程	Wiener process
维纳-欣斤公式	Wiener-Khintchine formula
理想带通限幅器	ideal band pass limiter
符号函数	sign function
阈交	threshold crossing
维纳积分	Wiener integral
维纳-柯尔莫哥洛夫原理	The Wiener-Kolmogorov theory
维纳-霍夫方程	Wiener-Holf equation

十 二 画

随机过程	stochastic process random process
随机变量	random variable
随机序列	random sequence
随机矢量	random vector
随机电报信号	random telegraph signal
斯特灵公式	Stirling formula
随机矩阵	random matrix

滑过态(非常返态)	transient state
遍历态	ergodic state
等待时间分布	waiting time distribution
散弹噪声	shot noise
随机分析	stochastic analysis
滑动平均	moving average
随机微分方程	stochastic differential equation
遍历性(各态历经性)	ergodicity ergodic property
集平均(见统计平均)	ensemble average
联合平稳随机过程	jointly stationay stochastic process
遍历转换技术	ergodic conversion
奥斯特-乌伦贝克过程	Ornstein-Uhlenbeck process
瑞利分布	Rayleigh's distribution
最小均方误差	minimum mean square error M.M.S.E
最佳线性估计	optimal linear estimate
最佳预测	optimal prediction
最佳过滤	optimal filtering
最佳平滑	optimal smoothing

十 三 画

数字特征(特征数字)	characteristic numbers
零常返态	null recurrent state
概率流	flow of probability
跳跃率函数	jump rate function
跳跃强度函数	jump intensity function
福克-普朗克方程式	Fokker-Planck equation
零输入响应	zero input response
零状态解	zero state solution
零输入状态转移函数	zero input state transition function
解析信号	analytic signal
零级修正贝塞尔函数，零级变号贝塞尔函数	zero order modified Bessel's function

零交	zero crossing

十 四 画

谱分析	spectral analysis
谱分解定理	spectral decomposition theorem

十 六 画

噪音	noise

参 考 书

1. A.Papoulis: Probability, Random Variables and Stochastic Processes
2. H. J. Larson and B. O. Shubert: Probabilistic Models in Engineering Science, Random Noise, Signalsand Dynamic Systems
3. 复旦大学编，吴立德等：概率论第三册，随机过程
4. K. L. Chung: Elementary Probability Theory With Stochastic Processes
5. W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications
6. W. B. Davenport and W. L. Root: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise
7. W. B Davenport Probability and Random Processes
8. Y. W. Lee Statistical Theory of Communication
9. D Kannan: An Introduction to Stochasfic Processes
10. S. K. Srinivasan and K. M. Mehata Probability and Random Processes
11. A. D Whalen Detection of Signals in Noise
12. Touraj Assefi Stochastic Processes and Estimation Theory With Applications
13. M. Schwartz and L. Shaw Signal Processing